

Licence mention Mathématiques - Semestre 4
Probabilités 1

Couple de variables aléatoires réelles discrètes

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Le couple (X, Y) est discret si et seulement si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes ; on dira que (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1 - Loi conjointe. Lois marginales.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

Les lois de probabilité de X et de Y sont la donnée de :

- $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, avec $I \subset \mathbb{N}^*$ et $\Omega_Y = Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, avec $J \subset \mathbb{N}^*$;
- pour tous $i \in I, j \in J, p_{i\bullet} = P(X = x_i)$ et $p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$.

La loi de probabilité de (X, Y) est la donnée de :

- $\Omega_{(X,Y)} = \Omega_X \times \Omega_Y = \{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$;
- pour tous $i \in I, j \in J, p_{i,j} = P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

Il est possible que certains couples (x_i, y_j) soient de probabilité nulle (valeurs de X et Y incompatibles).

Définitions.

(i) L'application $P_{(X,Y)} : \begin{cases} \Omega_X \times \Omega_Y \rightarrow [0, 1] \\ (x_i, y_j) \rightarrow p_{i,j} \end{cases}$ est appelée *loi conjointe du couple (X, Y)* .

(ii) Les applications $P_X : \begin{cases} \Omega_X \rightarrow [0, 1] \\ x_i \rightarrow p_{i\bullet} \end{cases}$ et $P_Y : \begin{cases} \Omega_Y \rightarrow [0, 1] \\ y_j \rightarrow p_{\bullet j} \end{cases}$ sont appelées *lois marginales* de

(X, Y) . Ce sont les lois de probabilité P_X et P_Y de X et Y .

Proposition.

Avec les notations précédentes, on a :

- (i) pour tout $i \in I, p_{i\bullet} = \sum_{j \in J} p_{i,j}$. (ii) pour tout $j \in J, p_{\bullet j} = \sum_{i \in I} p_{i,j}$. (iii) $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$.

Preuve.

(i) Pour tout $i \in I, (X = x_i) = (X = x_i) \cap \Omega = (X = x_i) \cap \left(\bigcup_{j \in J} (Y = y_j) \right) = \bigcup_{j \in J} ((X = x_i) \cap (Y = y_j))$,

réunion d'éléments deux à deux disjoints,

$$\text{donc } p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} p_{i,j}.$$

(ii) La démonstration est analogue à celle du (i).

(iii) Comme $\sum_{i \in I} p_{i\bullet} = \sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$, on a $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} p_{i,j} \right) = 1$.

Ainsi, la loi conjointe du couple (X, Y) détermine complètement chacune des lois marginales. Nous verrons plus loin que la réciproque n'est pas vraie.

Proposition.

Avec les notations précédentes, pour toutes parties A et B de \mathbb{R} , on a :

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{x_i \in A} \sum_{y_j \in B} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{x_i \in A} \sum_{y_j \in B} p_{i,j}.$$

Représentation de la loi conjointe et des lois marginales.

| | | | | | |
|-----------------|------------------------------|-----|------------------------------|-----|-----------------------------|
| $X \setminus Y$ | y_1 | ... | y_j | ... | loi de X |
| x_1 | $p_{1,1}$ | ... | $p_{1,j}$ | ... | $p_{1\bullet} = P(X = x_1)$ |
| \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots |
| x_i | $p_{i,1}$ | ... | $p_{i,j}$ | ... | $p_{i\bullet} = P(X = x_i)$ |
| \vdots | \vdots | | \vdots | | \vdots |
| loi de Y | $p_{\bullet 1} = P(Y = y_1)$ | ... | $p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$ | ... | 1 |

Exemple.

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, à 0 sinon.

Soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, à 0 sinon.

Déterminons la loi conjointe du couple (X, Y) et ses lois marginales.

On distingue les deux types de tirage avec ou sans remise.

| | | | | | | | |
|-----------------|---------------------|-----------------|---------------|---------------------|---------------|---------------|---------------|
| | tirages avec remise | | | tirages sans remise | | | |
| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | loi de X | $X \setminus Y$ | 0 | 1 | loi de X |
| 0 | $\frac{16}{49}$ | $\frac{12}{49}$ | $\frac{4}{7}$ | 0 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ |
| 1 | $\frac{12}{49}$ | $\frac{9}{49}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{7}$ |
| loi de Y | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 | loi de Y | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 |

On constate que les lois marginales sont identiques dans les deux cas, alors que les lois conjointes sont différentes. Cela illustre bien le fait que la donnée des seules lois marginales ne suffit pas pour obtenir la loi conjointe.

2 - Lois conditionnelles.**Définitions.**

(i) Loi de X conditionnelle à $(Y = y_j)$, avec $p_{\bullet j} = P(Y = y_j) \neq 0$.

C'est l'application $P_X^{(Y=y_j)} : \begin{cases} \Omega_X \rightarrow [0, 1] \\ x_i \rightarrow P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}} \end{cases}$.

(ii) Loi de Y conditionnelle à $(X = x_i)$, avec $p_{i\bullet} = P(X = x_i) \neq 0$.

C'est l'application $P_Y^{(X=x_i)} : \begin{cases} \Omega_Y \rightarrow [0, 1] \\ y_j \rightarrow P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{i,j}}{p_{i\bullet}} \end{cases}$.

Remarque.

Ces applications sont bien des probabilités. En effet, par exemple,

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i \in I} \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_{i \in I} p_{i,j} = \frac{1}{p_{\bullet j}} p_{\bullet j} = 1.$$

Reprenons l'exemple précédent.

Dans le cas des tirages avec remise, le conditionnement de X par n'importe quelle valeur de Y ne modifie pas la loi de X . On dira que X et Y sont indépendantes en probabilité.

Dans le cas des tirages sans remise, le conditionnement de X par une valeur de Y modifie la loi de X . On dira que X et Y sont liés en probabilité.

| tirages avec remise | | | tirages sans remise | | |
|---------------------|---------------|---------------|---------------------|---------------|---------------|
| $X / Y = 0$ | 0 | 1 | $X / Y = 0$ | 0 | 1 |
| loi $P_X^{(Y=0)}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | loi $P_X^{(Y=0)}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $X / Y = 1$ | 0 | 1 | $X / Y = 1$ | 0 | 1 |
| loi $P_X^{(Y=1)}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | loi $P_X^{(Y=1)}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $Y / X = 0$ | 0 | 1 | $Y / X = 0$ | 0 | 1 |
| loi $P_Y^{(X=0)}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | loi $P_Y^{(X=0)}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $Y / X = 1$ | 0 | 1 | $Y / X = 1$ | 0 | 1 |
| loi $P_Y^{(X=1)}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | loi $P_Y^{(X=1)}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Proposition.

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous $i \in I, j \in J$,
 $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, i.e. $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$.

Preuve.

Appliquant la définition d'indépendance de 2 v.a.r. (donnée dans le chapitre 4) avec $A = \{x_i\}$ et $B = \{y_j\}$, on obtient $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ pour tous $i \in I, j \in J$.

Réciproquement, si pour tous $i \in I, j \in J, p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$, alors pour tous $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{(x_i, y_j) \in A \times B} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{(x_i, y_j) \in A \times B} P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in A} P(X = x_i) \sum_{y_j \in B} P(Y = y_j) = P(X \in A)P(Y \in B)$$
, i.e. X et Y sont indépendantes.

Cela signifie aussi que $P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = p_{i\bullet} = P(X = x_i)$.

Proposition.

Si X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes, et si f et g sont deux fonctions numériques dont les domaines de définition contiennent respectivement Ω_X et Ω_Y , alors les v.a.r. discrètes $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

3 - Linéarité de l'espérance mathématique.

Proposition.

Si X et Y sont deux v.a.r. discrètes admettant une espérance mathématique, alors $X + Y$ admet une espérance mathématique donnée par $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Preuve.

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_{i\bullet} = \sum_{i \in I} x_i \sum_{j \in J} p_{ij} = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i p_{ij}$$
 et
$$E(Y) = \sum_{j \in J} y_j p_{\bullet j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j p_{ij}$$
,
donc
$$E(X) + E(Y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (x_i + y_j) p_{ij}$$
.

Posons $Z = X + Y$ et $K_z = \{(i, j) \in I \times J / x_i + y_j = z\}$ pour tout $z \in Z(\Omega) = \Omega_Z$.

La famille $\{K_z, z \in \Omega_Z\}$ est une partition de $I \times J$ donc

$$E(X) + E(Y) = \sum_{z \in \Omega_Z} \sum_{(i,j) \in K_z} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{z \in \Omega_Z} z \sum_{(i,j) \in K_z} p_{ij} = \sum_{z \in \Omega_Z} z P(Z = z) = E(Z)$$

et ainsi $E(X) + E(Y) = E(Z) = E(X + Y)$.

(Dans le cas où $I \times J$ est infini, i.e. $\Omega_X \times \Omega_Y$ est infini, il faut justifier l'existence de $E(Z)$, i.e. la convergence de $\sum_{z \in \Omega_Z} |z| P(Z = z)$. Il suffit de "remonter" le calcul précédent en utilisant l'inégalité triangulaire et l'existence de $E(X)$ et $E(Y)$.)

Corollaire.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , admettant une espérance mathématique. Soit λ un réel. Alors $X + Y$ et λX admettent une espérance mathématique et on a $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Ainsi, l'espérance mathématique est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des v.a.r. discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et admettant une espérance mathématique.

Proposition.

Si X et Y admettent une espérance mathématique $E(X)$ et $E(Y)$, et si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Réciproquement, si Y admet une espérance mathématique $E(Y)$ et si $|X| \leq |Y|$, alors X admet une espérance mathématique.

Preuve.

Pour le premier résultat, il suffit de considérer la v.a. positive $Z = Y - X$, puis d'utiliser la linéarité de l'espérance mathématique. Le deuxième résultat, un peu technique, est admis.

4 - Covariance de deux v.a.r. discrètes.

Il s'agit de quantifier le lien en probabilité des composantes X et Y du couple (X, Y) .

Proposition.

Si X et Y sont deux v.a.r. discrètes admettant une espérance mathématique et un moment d'ordre 2 (i.e. $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent), alors XY admet une espérance mathématique donnée par $E(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j p_{ij}$.

Preuve.

Un raisonnement analogue à celui de la preuve précédente donne la formule en cas d'existence de $E(XY)$. Montrons que cette série est absolument convergente.

De $(|x_i| - |y_j|)^2 \geq 0$ on déduit l'inégalité $|x_i y_j| \leq \frac{x_i^2 + y_j^2}{2}$;

Par hypothèse, $E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 p_{i\cdot} = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i^2 p_{ij}$ et $E(Y^2) = \sum_{j \in J} y_j^2 p_{\cdot j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} y_j^2 p_{ij}$.

On en déduit que $\sum_{(i,j) \in I \times J} |x_i y_j| p_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in I \times J} \frac{x_i^2 + y_j^2}{2} p_{ij} = \frac{E(X^2) + E(Y^2)}{2}$.

Corollaire.

Si X et Y sont 2 v.a.r. discrètes admettant un moment d'ordre 2, alors $X + Y$ admet un moment d'ordre 2.

Preuve.

Il suffit de remarquer que $(X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$ et d'utiliser la linéarité de l'espérance mathématique.

Définition.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant un moment d'ordre 2. On appelle *covariance de X et Y* le réel $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

Proposition.

(i) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

(ii) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.

Preuve.

(i) De la linéarité de l'espérance mathématique on déduit

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E(XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

(ii) Par définition, $Var(X + Y) = E((X + Y - E(X + Y))^2)$. De plus,

$$\begin{aligned} (X + Y - E(X + Y))^2 &= (X - E(X) + Y - E(Y))^2 \\ &= (X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X))(Y - E(Y)), \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Remarque.

Pour toutes v.a.r. discrètes X, X' et Y admettant un moment d'ordre 2, pour tous réels λ et μ , on a :

$$\text{Cov}(\lambda X + \mu X', Y) = \lambda \text{Cov}(X, Y) + \mu \text{Cov}(X', Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \text{Var}(X).$$

La covariance est donc une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel des v.a.r. discrètes admettant un moment d'ordre 2 ; sa forme quadratique associée est la variance, qui est positive mais non nécessairement définie ($\text{Var}(X) = 0$ équivaut à X constante).

Il en résulte, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sigma_X \sigma_Y.$$

Définition.

On appelle *coefficient de corrélation linéaire de X et Y* le réel $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit que $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. De plus, si $|\rho_{X,Y}| = 1$, il existe un réel λ tel que $\text{Var}(X + \lambda Y) = 0$, et donc un réel a tel que $P(X + \lambda Y = a) = 1$; ainsi, Y est une fonction affine de X . Réciproquement, on peut vérifier que si Y est une fonction affine de X , alors $|\rho_{X,Y}| = 1$.

Proposition.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$(i) E(XY) = E(X)E(Y), \text{ i.e. } \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

$$(ii) \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Preuve.

$$(i) E(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j p_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j p_{i \cdot} p_{\cdot j} = \sum_{i \in I} x_i p_{i \cdot} \sum_{j \in J} y_j p_{\cdot j} = E(X)E(Y),$$

$$\text{et donc } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

$$(ii) \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Ainsi, si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Mais la réciproque est fautive.

Exemple.

Soit X la v.a.r. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, et soit $Y = X^2$. On a $E(XY) = E(X^3) = E(X) = (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} = 0$, et donc $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$ et $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Mais $P((X = 0) \cap (Y = 1)) = P(\emptyset) = 0$ et $P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$(i) \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

$$(ii) \text{Si } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont indépendantes, alors } \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

5 - Somme de deux v.a.r. discrètes indépendantes.

Lorsque X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes, la loi de probabilité de $X + Y$ peut se calculer à partir des lois de X et Y . Sans l'hypothèse d'indépendance, on doit utiliser la loi conjointe de (X, Y) .

Proposition.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes. Alors, pour tout $z \in \Omega_{X+Y}$,

$$P(X+Y=z) = \sum_{x \in \Omega_X} P(X=x)P(Y=z-x) = \sum_{y \in \Omega_Y} P(Y=y)P(X=z-y).$$

$$\text{On écrit aussi } P_{X+Y}(\{z\}) = \sum_{x \in \Omega_X} P_X(\{x\})P_Y(\{z-x\}) = \sum_{y \in \Omega_Y} P_Y(\{y\})P_X(\{z-y\}).$$

On dit que la loi de probabilité P_{X+Y} est le produit de convolution des deux lois de probabilité P_X et P_Y ; on note $P_{X+Y} = P_X * P_Y = P_Y * P_X$.

Preuve.

En utilisant le système complet d'événements $\{(X=x)\}_{x \in \Omega_X}$, on a

$$\begin{aligned} P(X+Y=z) &= P\left((X+Y=z) \cap \left(\bigcup_{x \in \Omega_X} (X=x)\right)\right) = P\left(\bigcup_{x \in \Omega_X} (X+Y=z) \cap (X=x)\right) \\ &= \sum_{x \in \Omega_X} P((X+Y=z) \cap (X=x)) = \sum_{x \in \Omega_X} P((X=x) \cap (Y=z-x)) = \sum_{x \in \Omega_X} P(X=x)P(Y=z-x). \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient la deuxième égalité.

Exemple. Somme de deux v.a.r. Binomiales indépendantes. Loi conditionnelle.

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$.

On a $\Omega_X = \{0, 1, \dots, m\}$, $\Omega_Y = \{0, 1, \dots, n\}$ et $\Omega_{X+Y} = \{0, 1, \dots, m+n\}$.

Pour tout $k \in \Omega_{X+Y} = \{0, 1, \dots, m+n\}$,

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^m P(X=i)P(Y=k-i), \text{ avec } P(Y=k-i) = 0 \text{ si } k-i < 0 \text{ ou } > n,$$

$$\text{donc } P(X+Y=k) = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} C_m^i p^i (1-p)^{m-i} C_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i}$$

$$\text{i.e. } P(X+Y=k) = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} C_m^i C_n^{k-i} p^k (1-p)^{m+n-k} = p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} C_m^i C_n^{k-i}.$$

De la loi de probabilité Hypergéométrique $\mathcal{H}(m+n, k, \frac{m}{m+n})$ on déduit que

$$\sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} \frac{C_m^i C_n^{k-i}}{C_{m+n}^k} = 1, \text{ soit } \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} C_m^i C_n^{k-i} = C_{m+n}^k,$$

d'où $P(X+Y=k) = C_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k}$. Ainsi, $X+Y$ suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(m+n, p)$.

On a, pour tout $k \in \Omega_{X+Y} = \{0, 1, \dots, m+n\}$, $P(X+Y=k) > 0$.

Posons $B = (X+Y=k)$. La loi de X conditionnelle à B est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } i \in \Omega_X^B = \{\max(0, k-n), \dots, \min(m, k)\}, P_X^B(\{i\}) &= P((X=i) / B) = \frac{P((X=i) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((X=i) \cap (X+Y=k))}{P(X+Y=k)} = \frac{P((X=i) \cap (Y=k-i))}{P(X+Y=k)} = \frac{P((X=i)P(Y=k-i))}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{C_m^i p^i (1-p)^{m-i} C_n^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i}}{C_{m+n}^k p^k (1-p)^{m+n-k}} = \frac{C_m^i C_n^{k-i}}{C_{m+n}^k}. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de X conditionnelle $B = (X+Y=k)$ est la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(m+n, k, \frac{m}{m+n})$.

Remarque.

On a des résultats de stabilité analogues pour la somme de deux v.a.r. indépendantes de lois de Pascal ou de Poisson. Voir exercice 5.

Reprenons la notation G_X pour désigner la fonction génératrice d'une variables aléatoire X à valeurs entières. On a alors les résultats suivants :

Proposition.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , alors $G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$.

Preuve

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , alors pour tout x , x^X et x^Y sont aussi indépendantes est donc $G_{X+Y}(x) = E(x^{X+Y}) = E(x^X x^Y) = E(x^X)E(x^Y) = G_X(x)G_Y(x) = (G_X G_Y)(x)$.

Exemples.

1) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi Binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$, alors $G_{X+Y}(x) = G_X(x)G_Y(x) = (px + 1 - p)^m (px + 1 - p)^n = (px + 1 - p)^{m+n}$. On reconnaît la fonction génératrice de la loi Binomiale $\mathcal{B}(m + n, p)$, et comme la fonction génératrice caractérise la loi, $X + Y$ suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(m + n, p)$.

2) Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $G_{X_1 + \dots + X_n}(x) = G_{X_1}(x) \dots G_{X_n}(x) = (px + 1 - p) \dots (px + 1 - p) = (px + 1 - p)^n$. On reconnaît la fonction génératrice de la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et comme la fonction génératrice caractérise la loi, $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

6 - Exercices.**Exercice 1.**

On lance deux dés discernables équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1) On considère les variables aléatoires X et Y respectivement égales au plus petit et au plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) , les lois marginales, l'espérance mathématique de X et de Y , les lois conditionnelles de Y sachant $(X = k)$.

2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = Y - X$.

Exercice 2.

Sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont les lois marginales sont telles que :

- X est à valeurs dans $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P(X = -1) = \frac{1}{4}$;

- Y est à valeurs dans $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

On désigne par p la probabilité de l'événement $(X = -1) \cap (Y = 1)$.

1) Exprimer en fonction de p la loi conjointe du couple (X, Y) .

2) Quelles conditions doit-on imposer à p ?

3) a) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.

b) Déterminer, dans ces conditions, la loi de probabilité des variables aléatoires $S = X + Y$, $D = X - Y$, $\Pi = XY$, $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

Exercice 3.

Soient X une variable aléatoire de loi Uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $Y = (X - 3)^2$.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y .

2) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. D'après examen de juin 2008

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} . La loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (i, j)) = p^2 q^{i+j}$$

où p et q sont deux réels de $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$.

1) a) Déterminer les lois de probabilités de X et de Y . Remarquer que X et Y suivent la même loi.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

c) Déterminer la fonction de répartition F_X de X . On précisera en particulier $F_X(k)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

2) Déterminer la fonction de répartition puis la loi de probabilité de la variable aléatoire $U = \max(X, Y)$.

3) a) Démontrer que pour tout k dans \mathbb{N} , $P(X + Y = k) = (k + 1)p^2 q^k$.

b) Pour tout n dans \mathbb{N} , déterminer la loi de probabilité de U conditionnelle à $(X + Y = 2n + 1)$.

Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

- 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X conditionnelle à l'événement $(Z = k)$.

Exercice 6.

On suppose que dans une population d'insectes, le nombre d'oeufs pondus par un insecte au cours d'une ponte est une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ , avec $\lambda > 0$. On suppose que chacun de ces oeufs, indépendamment des autres, éclot avec une probabilité égale à p , avec $p \in]0, 1[$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'insectes issus de cette ponte.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner, sans calcul, la loi de probabilité de Y conditionnelle à $(X = n)$.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de Y .

Exercice 7.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli de paramètre p et une loi de Poisson de paramètre λ . Soit $Z = XY$.

Déterminer l'espérance mathématique, la loi de probabilité et la variance de Z .

Exercice 8.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_k indépendantes de même loi que X , $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_k)$ et $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

- 1) Donner la fonction de répartition de X .
- 2) Déterminer la fonction de répartition, puis la loi de probabilité, de Y et de Z .
- 3) Calculer l'espérance mathématique de Y pour $k = 2$ et $k = 3$.

Exercice 9.

Un joueur lance un dé à 6 faces équilibré. Soit la variable aléatoire X (resp. Y) égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir une (resp. deux) fois le chiffre 5.

- 1) Donner, sans calcul, la loi de probabilité de X et de Y . Justifier.
- 2) Soit un entier $k \geq 1$. Donner, sans calcul, la loi de probabilité de Y conditionnelle à $(X = k)$. Justifier.
- 3) Déterminer la loi de probabilité du couple (X, Y) .
- 4) Soit un entier $n \geq 2$. Déterminer la loi de probabilité de X conditionnelle à $(Y = n)$.
- 5) Démontrer que $P(X < Y) = 1$.
- 6) Déterminer la loi de probabilité de $Z = Y - X$. Que représente Z ?
- 7) Montrer que X et Z sont indépendantes. Calculer $P(X = Z)$ et $P(X \leq Z)$.
- 8) Déterminer la loi de probabilité de $U = \min(X, Z)$.
- 9) Soit m un entier naturel non nul. Déterminer la loi de probabilité de $V = \min(X, m)$.

Exercice 10.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

- 1) a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de S_n .
b) Retrouver ce résultat en utilisant la loi de probabilité de S_n .
- 2) a) Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et la variance de Y_n .
b) Déterminer la loi de probabilité de $Y_1 + Y_2$.
c) Calculer $cov(Y_n, Y_{n+k})$ pour tous entiers $n, k \geq 1$.
d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de M_n .