

CONDITION DE SPÄTH ET THÉORÈMES DE RÉDUCTION.

MARC CABANES

Amiens, 18 Jan 2012

G un groupe fini, p un nombre premier, $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos.

Quelques notations : $\text{Irr}(\mathbb{F}G)$ sont les classes d'iso de $\mathbb{F}G$ -modules simples, $\text{Irr}(\mathbb{F}G)_{p'}$ les χ de dimensions (notée $\chi(1)$) premières à p . Si $H \trianglelefteq G$ et $\zeta \in \text{Irr}(\mathbb{F}H)$, G_ζ le stabilisateur de la classe d'iso par autom induits par G sur H , $\text{Irr}(G|\zeta)$ les classes des $\mathbb{F}G$ -modules ayant ζ dans leur restriction à H . Clifford : $\text{Irr}(G|\zeta) \sim \text{Irr}(G_\zeta|H)$ qui à son tour si ζ projectif (en particulier si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) $\sim \text{Irr}(\mathbb{F}G_\zeta e_\zeta)$ (voir [NgTs], [Nv]).

NB : $\text{Irr}(\mathbb{F}G) = \coprod_{\lambda \in \text{Irr}(\mathbb{F}Z(G))} \text{Irr}(\mathbb{F}G|\lambda)$.

Conjecture de McKay (1970) : Soit L le normalisateur d'un p -Sylow de G (ou tout sous-groupe de G le contenant), alors

$$(MK) \quad |\text{Irr}(\mathbb{C}G)_{p'}| = |\text{Irr}(\mathbb{C}L)_{p'}|.$$

Raffinement de Isaacs-Navarro ([IN] 2002) : En notant pour tout entier $d \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, $\text{Irr}(\mathbb{C}G)_{d,p'} = \{\chi \mid \chi(1) \equiv \pm d \pmod{p}\}$, on a

$$(MK_d) \quad |\text{Irr}(\mathbb{C}G)_{d,p'}| = |\text{Irr}(\mathbb{C}L)_{d,p'}|.$$

Conjecture d'Alperin ([Al] 1986) : $\mathbb{F}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, si Q p -sous-groupe de G on note $\text{Irr}_Q(\mathbb{F}N_G(Q))$ les simples de $N_G(Q)$ de dimension divisible par $|N_G(Q)/Q|_p$, on définit

$$\text{Alp}(G) := \left(\coprod_Q \text{Irr}_Q(\mathbb{F}N_G(Q)) \right) / G - \text{conj}.$$

La conjecture d'Alperin (AWC) postule que ceci est en bijection avec $\text{Irr}(\mathbb{F}G)$:

$$(AW) \quad \text{Irr}(\mathbb{F}G) \xrightarrow{\sim} \text{Alp}(G).$$

Formes equivariantes : on peut demander que • les bijections sont $\text{Out}(G)$ -equivariantes (ou $\text{Aut}(G)_L$ -equiv dans le cas McKay).

- préservation de $\text{Irr}(\mathbb{F}Z(G))$.
- condition (COHO) sur les couples (γ, λ) , γ représentation de G , λ représentation d'un sous-groupe local (N ou $N_G(Q)$) : voir plus loin.

Definition. On dit que G verifie la **condition de McKay inductive (iMK)** ssi il existe L tel que $N_G(P) \subseteq L \subsetneq G$ $\text{Aut}(G)_P$ -stable et

$$\text{Irr}(\mathbb{C}G)_{p'} \rightarrow \text{Irr}(\mathbb{C}L)_{p'}$$

une bijection $\text{Aut}(G)_L$ -equivariante, preservant les ensembles $\text{Irr}(-|\lambda)$ pour $\lambda \in \text{Irr}(\mathbb{F}Z(G))$ et telle que si $\chi \mapsto \psi$, le couple (χ, ψ) verifie (COHO) expliquee plus loin.

Possibilité de (iMK_d) et (iAW)

Theoremes de Isaacs-Malle-Navarro ([IMN] 2007) et de Navarro-Tiep ([NvTi] 2011). Si G est tel que toutes ses sections simples S sont telles que leur extension centrale universelle $\widehat{S}$ verifie (iMK), respectivement (iAW), alors G verifie (MK), respectivement (AW).

Späth ([S2] 2011) : idem pour (MK_d)

1. REPRESENTATIONS PROJECTIVES.

$\mathcal{P}: G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F})$ telle que $\mathcal{P}(g)\mathcal{P}(g') \in \mathbb{F}^\times \mathcal{P}(gg')$ et $\mathcal{P}(1) = \text{Id}_n$.

Cocycle $\alpha_{\mathcal{P}}: G \times G \rightarrow \mathbb{F}^\times$. $\alpha_{\mathcal{P}} \in Z^2(G, \mathbb{F}^\times)$.

Représentations stables et cocycles : si $H \trianglelefteq G$, et $\mathcal{L}: H \rightarrow \text{GL}_n$ est une représentation irréductible **lineaire** (cocycle trivial), stable par G (les g -conjugaisons envoient $\mathcal{L}$ sur une représentation isomorphe pour tout $g \in G$) alors il existe une représentation projective $\widehat{\mathcal{L}}: G \rightarrow \text{GL}_n$ telle que $\widehat{\mathcal{L}}(gh) = \widehat{\mathcal{L}}(g)\mathcal{L}(h)$ et $\widehat{\mathcal{L}}(hg) = \dots$ pour tous $g \in G, h \in H$. Alors $\alpha_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est un cocycle défini sur G/H .

De plus (Clifford) : $\text{Irr}(\mathbb{F}G \mid \chi) \cong \text{Irr}(\mathbb{F}_{\alpha_{\widehat{\mathcal{L}}}}[G/H])$ (voir [NgTs], [Nv])

2. CONDITION (COHO) DE SPÄTH [S1].

Ici $X \supseteq L \supseteq Z = Z(X)$ sont des groupes finis. Noter que $L/Z \subseteq X/Z \trianglelefteq \text{Aut}(X)$. On prend $\chi \in \text{Irr}(\mathbb{F}X)$, $\psi \in \text{Irr}(\mathbb{F}L)$.

Condition (Coho) Il y a des représentations projectives $\mathcal{P}$ de $\text{Aut}(X)_\chi$, $\mathcal{Q}$ de $\text{Aut}(X)_{L,\psi}$ telles que (identifiant X/Z avec les automorphismes intérieurs dans $\text{Aut}(X)$)

(i) $\text{Res}_{X/Z}^{\text{Aut}(X)_\chi} \mathcal{P} = \mathcal{L} \circ \mathbf{s}$ où $\mathbf{s}: X/Z \rightarrow X$ est une section (normalisée) du quotient $X \rightarrow X/Z$, et $\mathcal{L}$ est une représentation lineaire de $X \in \chi$,

(i') $\text{Res}_{L/Z}^{\text{Aut}(X)_{L,\psi}} \mathcal{Q} = \mathcal{M} \circ \mathbf{t}$ où $\mathbf{t}: L/Z \rightarrow L$ restriction de $\mathbf{s}$, et $\mathcal{M}$ est une représentation lineaire de $L \in \psi$,

(ii) $\alpha_{\mathcal{P}}$ et $\alpha_{\mathcal{Q}}$ coïncident sur $\text{Aut}(X)_{L,\psi,\chi}$.

Quelques remarques :

- IMN et NT avaient une autre version de (COHO) comportant l'existence d'un groupe $X \trianglelefteq A$ tel que $A/X \cong \text{Out}(X)_\chi \dots$
- si $X = [X, X]$, alors $\mathcal{P}$ satisfaisant (i) existe toujours (voir [C]).

- si $\text{Out}(X)$ est cyclique, si χ, ψ au-dessus du meme caractere de Z et $\text{Aut}(X)_{L,\chi} = \text{Aut}(X)_{L,\psi}$ and $N_X(L, \psi) = L$, la condi est realisee (voir [S3]).
- si ψ est une sous-representation "bien definie" de $\text{Res}_L^X \chi$, (i) implique le reste.

3. UNE EQUIVALENCE DE "TRIPLES".

Theoreme 1 $Z = Z(X) \subseteq L \subseteq X \trianglelefteq G$ groupes finis, on suppose $\nu \in \text{Irr}(\mathbb{C}Z)$, $\chi \in \text{Irr}(X|\nu)$, $\psi \in \text{Irr}(L|\nu)$.

Avec les hypotheses

- (i) $X = [X, X]Z$ (donc $[X, X]$ est parfait de centre $Z \cap [X, X]$) et $Z \subseteq Z(G)$.
- (ii) $N_X(L)_\psi = L$, $N_G(L)_\chi = N_G(L)_\psi$ et $G_\chi = X.N_G(L)_\psi$ (donc $N_G(L)_\psi/L \cong G_\chi/X$ par le morphisme naturel).
- (iii) $\text{Res}_{[X,X]}^X \chi$ et $\text{Res}_{L \cap [X,X]}^L \psi$ satisfont (Coho) pour $([X, X], L \cap [X, X], Z \cap [X, X])$.

Alors les "modular character triples" (G_χ, X, χ) et $(N_G(L)_\psi, L, \psi)$ sont isomorphes au sens de [Nv] 8.25. En particulier

$$\text{Irr}(G|\chi) \cong \text{Irr}(N_G(L)|\psi)$$

par une bijection qui conserve la p -valuation des degres.

Oral : << Preuve de IMN : 40 pages de calculs sur les cocycles..

Preuve (Späth) : On peut supposer $G = G_\chi$ et $N_G(L)_\psi = N_G(L)$. La condition (Coho) nous fournit des representations projectives $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de $G/C_G(X)$ et $N_G(L)/C_G(X)$ tels que $\text{Res}_{X/Z} \mathcal{P} = \mathcal{L} \circ \mathbf{r}|_{X/Z}$ et $\text{Res}_{L/Z} \mathcal{Q} = \mathcal{L} \circ \mathbf{r}|_{L/Z}$ où $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ lineaires fournissant χ et ψ et $\mathbf{r}: G/C_G(X) \rightarrow G$ une section ensembliste... et $\alpha_{\mathcal{P}}$ coincide avec $\alpha_{\mathcal{Q}}$ sur $N_G(L)/C_G(X)$.

Par un procede original on fabrique d'abord des representations projectives $\mathcal{P}_\chi$ et $\mathcal{Q}_\psi$ de G et $N_G(L)$ telles que $\mathcal{P}_\chi(t x) = \mathcal{P}_\chi(t) \mathcal{P}_\chi(x)$ pour tous $x \in G$, $t \in N_G(L)$, etc ... puis $\mathcal{R}$ sur G etendant $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{R}(x t) = \mathcal{R}(x) \mathcal{L}(t)$... ce qui permet de comparer les cocycles associés à χ G -stable et ψ $N_G(L)$ -stable, qui sont des cocycles sur $G/X \cong N_G(L)/L$ qui s'averent egaux par la relation initiale entre les cocycles de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.. d'où l'égalité de triples..>>

(...)

4. PREUVE DU THEOREME D'ISAACS-MALLE-NAVARRO.

Induction et formes relatives :

(rMK) $Z \trianglelefteq G$ des groupes finis et $Z \subseteq P \subseteq G$ avec P/Z p -Sylow de G , alors

$$\text{Irr}(G|\zeta)_{p'} \cong \text{Irr}(N_G(P)|\zeta)_{p'}$$

pour tout $\zeta \in \text{Irr}(Z)$.

On va montrer ([IMN] Th B)

Theorem 2. Si toutes les sections simples de G/Z verifient $(\widehat{\text{iMK}})$, alors (rMK) ci-dessus est vrai.

Preuve par récurrence sur $|G/Z|$. On peut supposer (Clifford) $G_\zeta = G$. Réduction de Fong : on suppose Z central.

Soit X/Z un chief factor i.e. sous-groupe normal minimal (donc caractéristiquement simple) de G/Z .

1er cas : X/Z non abélien S^n avec S simple **non abélien**.

On lui applique le Theoreme 1 ci-dessus car la condition (Coho) se transfere bien de $\widehat{S}$ à $\widehat{S}^n$ puis à $[X, X]$.

2eme cas . (Preuve de [IMN])

On suppose maintenant X/Z quelconque (possiblement abélien).

On montre

Lemme. [IMN] Pour tout $N_G(XP) \subseteq H \subseteq G$ on a

$$\text{Irr}(H|\zeta)_{p'} = \coprod_{\psi \in \Psi} \text{Irr}(H|\psi),$$

pour $\Psi := \text{Irr}(X|\zeta)_{p'}^{XP}/N_G(XP) - \mathbf{conj}$.

Preuve : regarder $\text{Res}_X^H \chi = ** \sum_{h \in H/H_{\chi_0}} {}^h \chi_0$ ce qui implique $\chi_0 \in \text{Irr}(X)_{p'}$ et $H/H_{\chi_0} = p'$ et donc XP a un point fixe sur cette somme... etc... ■

Maintenant le lemme implique

$$\begin{aligned} |\text{Irr}(G|\zeta)_{p'}| &= \sum_{\psi \in \Psi} |\text{Irr}(G|\psi)_{p'}| \quad \text{cas } H = G, \\ &= \sum_{\psi \in \Psi} |\text{Irr}(N_G(XP)|\psi)_{p'}| \quad (\text{rMK}) \text{ pour } X \trianglelefteq G \text{ et recurrence,} \\ &= |\text{Irr}(N_G(P)|\zeta)_{p'}| \quad (\text{rMK}) \text{ pour } Z \trianglelefteq N_G(XP) \text{ et recurrence} \end{aligned}$$

lorsque $N_G(XP) \subsetneq G$. Ce qui prouve (rMK) dans ce cas.

Si $N_G(XP) = G$, c'est-à-dire $XP \trianglelefteq G$, on a $Z \subseteq X \subseteq XP \subseteq G$ tous normaux dans G . Mais alors si X/Z est abélien, on voit que G est p -résoluble.

Dans ce cas un théorème de Okuyama-Wajima ([OW] 1980) s'applique (utilisation de la corresp de Glauberman).

CONCLUSION.

• (MK_d) : les bijections ci-dessus préservent les ratios de degrés et $G/L = 1 \pmod p$ pour tout L contenant un norm de p -Sylow...

REFERENCES.

[Al] J.L. Alperin, Weights for finite groups, in *Proc. Symp. pure Math.*, **47** I (1987), 369-379 .

[C] M. Cabanes, "Two remarks on the reduction of Alperin's weight conjecture." (Aug 2011) <http://people.math.jussieu.fr/~cabanes/ProjAlpW8.pdf>

[IN] M. Isaacs, and G. Navarro, New refinements of the McKay conjecture for arbitrary finite groups, *Ann. of Math.*, (2) **156** (2002), 333–344.

[IMN] M. Isaacs, G. Malle, and G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, *Invent. Math.*, **170** (2007), 33–101.

[NgTs] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic, 1989.

[Nv] G. Navarro, *Characters and Blocks of Finite Groups*, Cambridge, 1998.

[NvTi] G. Navarro, P.H. Tiep, A reduction theorem for the Alperin weight conjecture, *Invent. Math.*, **170** (2010), 33–101.

[OW] T. Okuyama and M. Wajima, Character correspondence and p -blocks of p -solvable groups, *Osaka J. Math.* **17** (1980), 801–806.

[S1] B. Späth, Inductive McKay condition in defining characteristic, *Bull. London Math. Soc. to appear*, (2011) doi: 10.1112/blms/bdr100 .

[S2] B. Späth, A reduction theorem for the Alperin-McKay conjecture, *to appear*. <http://www.math.rwth-aachen.de/~Britta.Spaeth/RedThmAM.pdf>

[S3] B. Späth, The inductive McKay Condition in the maximally split case, Preprint, 2010.

QUESTIONS.

Q : Cas de la conjecture d’Alperin ? R : (AW) la seconde partie est plus difficile : difficile de ramener le cas X/Z abélien au cas G p -résoluble (qui est connu, Okuyama encore 1981). Utilisation de la correspondance de Glauberman généralisée (Dade 1980) .

Q : Cas vérifiés pour (iMK) ? R : l’équivariance n’est pas facile pour les groupes de type de Lie. Mais quelques résultats : Brunat, Späth, C-Späth.

Q : Défaut abélien ? Ne simplifie pas vraiment les vérifications : question de l’équivariance, toujours.