Références

[Bbk] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V, VI, Masson (1981).

[CR] C. Curtis et I. Reiner, Methods of representation theory, vol 1, Wiley (1990).

[GP] M. Geck, G. Pfeiffer Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras LMS monographs, New series no. 21, Oxford University press (2000).

[L] S. Lang, Algèbre, Dunod (2004).

1. Rappels sur les groupes de Coxeter. Algèbres de Hecke

1.1. Groupes de Coxeter.

Définition 1.1. (i) *Une matrice de Coxeter est une matrice carrée symétrique à coefficients dans* $\mathbb{N} \cup \infty$*, dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients ne valent ni 0 ni 1.*

(ii) *À une matrice de Coxeter* $M = (m_{s,t})$ *indexée par un ensemble* S *on associe un groupe de Coxeter* W *qui est le groupe défini par la présentation dans laquelle les générateurs sont les éléments de* S *et les relations sont* $(st)^{m_{s,t}} = 1$ *pour tout* s *et tout* t *dans* S *tel que* $m_{s,t} \neq \infty$*. On dit que* (W, S) *est un système de Coxeter.*

Notez que S n'est pas nécessairement fini. Une matrice indexée par S signifie simplement un ensemble de couples $m_{s,t}$ où s et t parcourent S.

Remarque 1.2. Notez qu'en particulier, quand on prend $s = t$ dans les relations ci-desus, on obtient $s^2 = 1$ pour tout $s \in S$. On peut donc réécrire les relations pour $s \neq t$, quand $m_{s,t} \neq \infty$, sous la forme

$$\underbrace{sts\dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\dots}_{m_{s,t}},$$

où chaque membre de l'égalité comporte exactement $m_{s,t}$ facteurs. Ces relations s'appellent des relations de tresses. Nous verrons plus loin pourquoi.

Rappelons la notion de longueur dans un groupe par rapport à un système de générateurs. Si W est un groupe engendré par un ensemble S on appelle longueur d'un élément w, notée $l(w)$, le nombre minimum de facteurs dans une expression de w comme produit d'éléments de S. Une telle décomposition $w = s_1 \dots s_k$ avec $k = l(w)$ est appelée écriture réduite de w. On dira parfois que la suite $(s_1, \dots, s_k)$ est une suite réduite. La définition des groupes de Coxeter implique le résultat suivant :

Lemme 1.3. *Soit* (W, S) *un système de Coxeter ; soient* $w \in W$ *et* $s \in S$ *alors on a* $l(sw) = l(w) \pm 1$.

Démonstration. Soit $w = s_1 \dots s_k$ une écriture réduite de w. On a $sw = ss_1 \dots s_k$, donc $l(sw) \leq k + 1 = l(w) + 1$. Si on applique cette inégalité en remplaçant w par $w' = sw$, on obtient $l(w) \leq l(sw) + 1$. Donc $l(w) - 1 \leq l(sw) \leq l(w) + 1$. D'autre part les relations de définition d'un groupe de Coxeter comportent un nombre pair de facteurs, donc toute relation ne change pas la longueur modulo 2. Ceci montre que $l(sw) \neq l(w)$, d'où le lemme. □

On a bien sûr le même résultat pour le produit ws (en utilisant le passage à l'inverse par exemple, qui coïncide d'ailleurs avec le retournement des produits d'éléments de S). Le lemme implique aussi que les éléments de S sont d'ordre 2.

Exemples 1.4. (i) Nous verrons que le groupe symétrique S_n est le groupe de Coxeter associé à la matrice carrée de taille $n-1$ dont les coefficients valent 3 si $|i-j|=1$ et 2 si $|i-j|>1$. Les générateurs pour cette présentation sont les transpositions $s_i=(i,i+1)$ où i varie de 1 à $n-1$.

(ii) L'importance des groupes de Coxeter vient en partie du fait que les groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples sont des groupes de Coxeter dont les générateurs correspondent aux racines simples du système de racines.

(iii) Un cas particulier est celui où $S=\{s,t\}$ est de cardinal 2 et où $m_{s,t}=m$ est fini. Les éléments du groupe de Coxeter sont tous les produits $sts\ldots$ et $tst\ldots$ ayant moins de m facteurs. Son ordre est donc au plus $2m$. Or le groupe des isométries d'un polygone régulier à m sommets d'un plan euclidien vérifie les relations si on prend comme générateurs s et t deux réflexions par rapport à deux droites faisant un angle π/m. Ceci prouve que dans le groupe de Coxeter correspondant m est l'ordre de st. On en déduit que ce groupe de Coxeter est le groupe diédral d'ordre $2m$ puisque le groupe diédral est un quotient du groupe de Coxeter et que l'ordre du groupe de Coxeter est au plus celui du groupe diédral.

(iv) De même si S est de cardinal 2 et $m_{s,t}$ est infini, on peut considérer le groupe engendré par deux réflexions s et t par rapport à deux droites parallèles dans un plan euclidien par exemple. Le même type de raisonnement montre que ce groupe est isomorphe au groupe de Coxeter et que dans le groupe de Coxeter l'ordre de st est bien infini.

Un ingrédient important utilisé pour l'étude d'un groupe de Coxeter est sa représentation géométrique que nous construisons maintenant. Soit (W,S) un système de Coxeter ; on considère un espace vectoriel E réel de base (e_s) indexée par S. Sur E on définit une forme bilinéaire symétrique par $B_M(e_s,e_{s'})=-\cos(\pi/m_{ss'})$ (ce qui signifie -1 quand $m_{ss'}=\infty$). Pour tout $s\in S$, on définit un endomorphisme de E par $\sigma_s(x)=x-2B_M(e_s,x)e_s$, pour $x\in E$. Comme $B_M(e_s,e_s)=1$ l'orthogonal de e_s pour la forme B_M est un hyperplan supplémentaire de la droite définie par e_s et σ_s est la réflexion de direction e_s par rapport à cet hyperplan. Un calcul (laissé au lecteur) montre que l'on définit ainsi une représentation de W, c'est à dire que $\sigma_s^2=\mathrm{Id}$ et $(\sigma_s\sigma_t)^{m_{s,t}}=\mathrm{Id}$.

Nous pouvons alors prouver

Proposition 1.5. *Pour s et t dans S, l'ordre de $\sigma_s\sigma_t$ est $m_{s,t}$.*

Démonstration. Si $m_{s,t}$ est infini on a $\sigma_s\sigma_t(e_s)=\sigma_s(e_s+2e_t)=e_s+2(e_s+e_t)$ et $\sigma_s\sigma_t(e_t)=\sigma_s(-e_t)=-e_t-2e_s$, donc e_s+e_t est fixe par $\sigma_s\sigma_t$ et $(\sigma_s\sigma_t)^k=2k(e_s+e_t)+e_s$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ceci montre que $\sigma_s\sigma_t$ est d'ordre infini.

Si $m_{s,t}$ est fini, définissons un produit scalaire euclidien dans le plan engendré par e_s et e_t de façon que ces deux vecteurs soient de norme 1 et que leur angle soit $\pi-\pi/m_{s,t}$. La restriction de B_M à ce plan est égale à ce produit scalaire et la restriction de $\sigma_s\sigma_t$ à ce plan est donc la rotation d'angle $2\pi/m_{s,t}$ qui est d'ordre $m_{s,t}$. Comme $\sigma_s\sigma_t$ est l'identité sur le supplémentaire de ce plan intersection des deux hyperplans des réflexions σ_s et σ_t, on obtient bien que $\sigma_s\sigma_t$ est d'ordre $m_{s,t}$. □

Remarquons que la forme B_M est invariante par l'action de $\sigma(W)$, où σ désigne la représentation $W\to\mathrm{GL}(E)$ obtenue. On prouve que cette représentation est fidèle (nous renvoyons à la littérature pour cette preuve par exemple à [Bbk] ou [GP])

Si (W, S) est un système de Coxeter, on appelle réflexions les conjugués des éléments de S dans W. L'ensemble des réflexions est noté R. Les éléments de S sont appelés réflexions élémentaires ou réflexions simples.

Le théorème suivant donne une caractérisation des groupes de Coxeter.

Théorème 1.6. *Si W est un groupe engendré par un ensemble S d'éléments d'ordre 2, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *(W,S) est un système de Coxeter.*

(ii) *Si $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ est une suite réduite d'éléments de S et si $s \in S$ est tel que la suite $(s, s_1, \ldots, s_k)$ n'est pas réduite alors il existe un indice i tel que $s_1 s_2 \ldots s_k = s s_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_k$.*

De plus quand ces deux conditions sont satisfaites on a

(iii) *On peut obtenir toutes les écritures réduites d'un élément de W à partir d'une d'elles en appliquant uniquement des relations de tresses $\underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}}$, où $m_{s,t}$ est l'ordre de st dans W.*

La propriété (ii) s'appelle la propriété d'échange (ou lemme d'échange). Notons que dans cette propriété les deux membres sont des écritures réduites. Nous utiliserons la notation $(s_1, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_k)$ (resp. $s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_k$) pour désigner la sous-suite de $(s_1, \ldots, s_k)$ obtenue en retirant le terme s_i (resp. le produit de cette sous-suite). Avant de démontrer ce théorème nous introduisons une définition qui sera fondamentale dans la suite et le lemme qui la justifie. Si $(s_1, \ldots, s_k)$ est une suite d'éléments de S on note

$$R(s_1, \ldots, s_k) = (s_1, s_1 s_2 s_1, \ldots, s_1 s_2 \ldots s_i \ldots s_2 s_1, \ldots).$$

On note $N(s_1, \ldots, s_k)$ l'ensemble des éléments qui apparaissent un nombre impair de fois dans $R(s_1, \ldots, s_k)$.

Lemme 1.7. *L'ensemble $N(s_1, \ldots, s_k)$ ne dépend que du produit $s_1 \ldots s_k$ et pas de la suite. La suite $(s_1, \ldots, s_k)$ est réduite si et seulement si tous les éléments de $R(s_1, \ldots, s_k)$ sont distincts.*

Définition 1.8. *Si $w = s_1 \ldots s_k$ nous posons $N(w) = N(s_1, \ldots, s_k)$.*

Le lemme implique que ceci a un sens et que $|N(w)| = l(w)$.

Démonstration du lemme. On passe d'une écriture de w comme produit d'éléments de S à une autre en appliquant soit une relation de tresses soit une relation du type $s^2 = 1$. Il suffit donc de vérifier que $N(s_1, \ldots, s_k)$ est invariant par ces deux types de relations. Soit $s \in S$, la suite $R(s_1, \ldots, s_i, s, s, s_{i+1}, \ldots, s_k)$ contient les mêmes éléments que $R(s_1, \ldots, s_k)$ avec même multiplicité, plus deux fois l'élément $s_1 s_2 \ldots s_i s s_i \ldots s_2 s_1$. Le nombre d'éléments intervenant un nombre impair de fois n'a donc pas changé. Regardons le cas d'une relation de tresses. Il faut comparer $R(s_1, \ldots, s_i, \underbrace{s, t, s \ldots}_{m_{s,t}}, s_j \ldots, s_k)$ et $R(s_1, \ldots, s_i, \underbrace{t, s, t \ldots}_{m_{s,t}}, s_j \ldots, s_k)$. Comme les produits $\underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}}$ et $\underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}}$ sont égaux, les i premiers éléments et les

$k-j+1$ derniers éléments des deux suites sont les mêmes. Les autres éléments de $R(s_1,\dots,s_i,\underbrace{s,t,s\dots}_{m_{s,t}},s_j\dots s_k)$ et de $R(s_1,\dots,s_i,\underbrace{t,s,t\dots}_{m_{s,t}},s_j\dots s_k)$ sont les conjugués par $s_1s_2\dots s_i$ de $\underbrace{st\dots s}_{x}$ et de $\underbrace{ts\dots t}_{x}$ respectivement, pour $x=1,3,5,\dots,2m_{s,t}i-1$. Or $\underbrace{st\dots s}_{x}=\underbrace{ts\dots t}_{y}$ si $x+y=2m_{s,t}$, d'où la première assertion du lemme.

Si le i-ème et le j-ème termes de $R(s_1,\dots,s_k)$ sont égaux avec $i<j$ on a $s_is_{i+1}\dots s_j=s_{i+1}s_{i+2}\dots s_{j-1}$, donc $s_1\dots s_k=s_1\dots\hat{s}_i\dots\hat{s}_j\dots s_k$, donc la suite $(s_1\dots,s_k)$ n'est pas réduite. Donc si la suite est réduite tous les éléments de $R(s_1,\dots,s_k)$ sont distincts et figurent dans $N(s_1,\dots,s_k)$. En particulier celui-ci est de cardinal $k=l(s_1\dots s_k)$. Réciproquement si $w=s_1\dots s_k$ et que tous les éléments de $R(s_1,\dots,s_k)$ sont distincts ce sont exactement les éléments de $N(s_1,\dots,s_k)$. Leur nombre est donc $l(w)$ c'est-à-dire que $k=l(w)$ ou encore que la suite est réduite. □

Démonstration de 1.6. Nous démontrons que (i) implique (ii) implique (iii) et que (ii) et (iii) impliquent (i).

Soit $(s_1,\dots,s_k)$ une suite réduite d'éléments de S et w son produit. Si la suite $(s,s_1\dots,s_k)$ n'est pas réduite alors les éléments de $R(s,s_1,\dots,s_k)$ ne sont pas tous distincts. Comme ceux de $R(s_1,\dots,s_k)$ sont distincts, la seule possibilité est $s=ss_1s_2\dots s_{i-1}s_is_{i-1}\dots s_2s_1s$ pour un certain i, c'est-à-dire $ss_1\dots s_k=s_1\dots\hat{s}_i\dots s_k$, ce qui est la propriété (ii).

Montrons que (ii) implique (iii). On montre par récurrence sur la longueur de w qu'on passe d'une écriture réduite de w à une autre uniquement par relations de tresses. Si $l(w)=0$ il n'y a qu'une écriture réduite de $w=1$. En général, soient $(s_1,\dots,s_k)$ et $(t_1,\dots,t_k)$ deux suites réduites d'éléments de S de produit égal à w. Comme on a $t_1s_1s_2\dots s_k=t_2\dots t_k$, la suite $(t_1,s_1,\dots,s_k)$ n'est pas réduite et par la propriété (ii) on en déduit que $t_2\dots t_k=s_1\dots\hat{s}_i\dots s_k$. Les deux membres de cette égalité sont des écritures réduites ; par hypothèse de récurrence on peut donc passer de l'une à l'autre par des applications répétée de relations de tresses. On est ramené à voir qu'on peut passer de $(s_1,\dots,s_k)$ à $(t_1,s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_k)$ par des relations de tresses. Si $i\neq k$ on termine en appliquant encore l'hypothèse de récurrence : les deux suites $(s_1,\dots,s_i)$ et $(t_1,s_1,\dots,s_{i-1})$ ont même produit, sont réduites et de longueur strictement inférieure à k. Il reste donc à traiter le cas où $i=k$, c'est-à-dire qu'on doit considérer les deux suites $(s_1,\dots,s_k)$ et $(t_1,s_1,\dots,s_{k-1})$. On peut répéter l'argument précédent en commençant par remarquer que la suite $(s_1,t_1,s_1,\dots,s_{k-1})$ n'est pas réduite. On se ramène alors à traiter le cas des deux suites $(s_1,t_1,s_1,\dots,s_{k-2})$ et $(t_1,s_1,\dots,s_{k-1})$. On peut itérer cet argument jusqu'à aboutir aux deux suites $(s_1,t_1,s_1,t_1\dots)$ et $(t_1,s_1,t_1,s_1,\dots)$. Il faut voir qu'on passe de l'une à l'autre par une relation de tresses, c'est à dire que k est exactement l'ordre de s_1t_1. Or par construction ces deux suites sont réduites et ont même produit. Ce qui signifie exactement que k est l'ordre de s_1t_1.

Montrons que (ii) et (iii) impliquent (i). La propriété (i) signifie, grâce à la proposition 1.5 que si G est un groupe et si f est une application de S dans G telle que pour tout $s\in S$ on a $f(s)^2=1$ et pour tout s et tout t dans S on a $(f(s)f(t))^{m_{s,t}}=1$, où $m_{s,t}$ est l'ordre de st dans W, alors f se prolonge en un homomorphisme de groupes $W\to G$. On sait par (iii) qu'on peut poser $f(w)=f(s_1)\dots f(s_k)$ si $(s_1,\dots,s_k)$ est une suite réduite de produit w, puisqu'on passe d'une telle suite à une autre par des relations de tresses et que les relations correspondantes sont vérifiées par les images dans G des éléments de S. Il reste à voir que f est un homomorphisme. Il suffit de vérifier que pour tout $s \in S$ et tout $w \in W$ on a $f(sw) = f(s)f(w)$. Soit $(s_1, \ldots, s_k)$ une suite réduite de produit w. Si $(s, s_1, \ldots, s_k)$ est réduite la propriété est vraie par définition de f. Sinon, par (ii) il existe i tel que $(s, s_1, \ldots, \hat{s}_i, \ldots s_k)$ soit une suite réduite de produit w, donc $f(w) = f(s)f(s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_k)$ et, comme $f(s)^2 = 1$ et $s_1 \ldots \hat{s}_i \ldots s_k = ss_1 \ldots s_k = sw$, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.9. *Si (W, S) est un sytème de Coxeter et si v et w sont dans W on a $N(vw) = N(v) \dotplus vN(w)v^{-1}$, où $\dotplus$ désigne l'opérateur de différence symétrique sur les parties de R.*

Démonstration. Comme la différence symétrique est associative, il suffit de vérifier cette égalité pour $v = s \in S$. Dans ce cas c'est une conséquence immédiate de la propriété d'échange et de la définition de $N(w)$. □

Exemple 1.10. Indiquons comment on montre que le groupe symétrique S_n est un groupe de Coxeter si on prend pour S l'ensemble des transpositions d'entiers consécutifs. Un élément de R est une transposition (i, j) quelconque. On montre que $N(w)$ est l'ensemble des (i, j) tels que $i < j$ et $w^{-1}(i) > w^{-1}(j)$ (inversions de w^{-1}). On peut alors montrer la propriété d'échange, ce qui démontre qu'on a bien un système de Coxeter.

Remarque 1.11. De la même façon qu'indiqué après le lemme 1.3, on obtient l'analogue du théorème 1.6 où dans (ii) la multiplication à gauche par s est remplacée par la multiplication à droite par s.

Définition 1.12. *On dit qu'un sous-groupe de W est un sous-groupe parabolique standard s'il est engendré par une partie I de S. On le note W_I.*

Proposition 1.13. *Soit W_I un sous-groupe parabolique standard. Alors (W_I, I) est un système de Coxeter. Sa matrice de Coxeter est la sous-matrice indexée par I de celle de W.*

Démonstration. Si $w = s_1 \ldots s_k \in W_I$ (avec $s_i \in I$), alors $R(s_1, \ldots, s_k)$, donc $N(w)$, ne contient que des éléments conjugués aux éléments de I dans le groupe W_I. Une écriture réduite dans W_I est donc aussi une écriture réduite dans W. On en déduit que la propriété d'échange est vraie dans W_I pour l'ensemble générateur I, ce qui donne le résultat. □

Définition 1.14. *Soit $I \subset S$. On dit qu'un élément $w \in W$ est I-réduit si $l(sw) = l(w) + 1$ pour tout $s \in I$.*

Proposition 1.15. *Soit $I \subset S$; alors $w \in W$ est I-réduit si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vraie :*

(i) *w est de longueur minimum dans la classe à droite $W_I w$.*

(ii) *Pour tout $v \in W_I$ on a $l(vw) = l(v) + l(w)$.*

Démonstration. Il est clair que (ii) implique (i) qui implique que w est I-réduit. Montrons qu'un élément I-réduit vérifie (ii). Si w est I-réduit et s'il existe $v \in W_I$ tel que $l(vw) \neq l(v) + l(w)$, choisissons une suite réduite $(s_h, \ldots, s_2, s_1)$ d'éléments de I de produit v et une suite réduite $(t_1, \ldots, t_k)$ d'éléments de S de produit w. Soit i le premier indice tel que $(s_i, \ldots, s_1, t_1 \ldots, t_k)$ ne soit pas réduite. Par la propriété d'échange on a $s_i \dots s_1 w = s_{i-1} \dots s_1 \hat{w}$ où $\hat{w} = t_1 \dots \hat{t}_j \dots t_k$ pour un certain j car $(s_i \dots s_1)$ est réduite, donc la réflexion simple à supprimer dans la propriété d'échange n'est pas un des s_l. On en déduit que $w = s_1 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_1 \hat{w}$. Or $s_i s_{i-1} \dots s_1 \hat{w} = s_{i-1} \dots s_1 w$ est de longueur $l(w) - 1 + i$ par hypothèse. On peut donc appliquer la propriété d'échange exactement $i-1$ fois dans le produit de cet élément par $s_1 \dots s_{i-1}$ et aboutir à une écriture réduite de w. Celle-ci commencera nécessairement par s_l pour un certain l, ce qui est contraire au fait que w est I-réduit. □

Remarque 1.16. La propriété (ii) de la proposition précédente montre que w est l'unique élément de longueur minimum dans sa classe à droite modulo W_I.

Nous énonçons maintenant sans démonstration une réciproque à l'existence de la représentation géométrique d'un groupe de Coxeter (nous renvoyons à la littérature pour la preuve, par exemple à [Bbk] ou [GP]). Soit E est un espace vectoriel réel et $(e_s)_{s\in S}$ une base de E indexée par un ensemble S. Une réflexion de vecteur v dans $\mathrm{GL}(E)$ est un élément d'ordre 2 dont l'ensemble des points fixes est un hyperplan et qui envoie v sur $-v$. On montre que si W est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ engendré par des réflexions $(r_s)_{s\in S}$, où r_s est une réflexion de vecteur e_s, alors $(W, \{r_s | s \in S\})$ est un système de Coxeter. Si r est une réflexion de W alors $r = w r_s w^{-1}$ avec $s \in S$ et $w \in W$ et dans la représentation géométrique r est une réflexion de vecteur $w(e_s)$. On note Φ l'ensemble des images par les éléments de W des vecteurs de la base (e_s). Si on note Φ^+ (resp. Φ^-) les éléments de Φ dont les coefficients dans la base (e_s) sont tous positifs (resp. tous négatifs). Pour $\alpha \in \Phi$ il existe une unique réflexion de W de vecteur α d'après la fidélité de la représentation géométrique de W. On note cette réflexion r_α. On démontre (voir par exemple [GP, 1.1.10 et 1.3.5]) :

Théorème 1.17. (i) *On a* $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

(ii) *Pour* $s \in S$ *on a* $l(ws) = l(w) - 1$ *si et seulement si* $w(e_s) \in \Phi^-$.

(iii) *Si* $w \in W$ *on a* $l(w) = |\Phi^+ \cap w(\Phi^-)|$.

(iv) *Si* $w \in W$ *on a* $N(w) = \{r_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \cap w(\Phi^-)\}$.

Remarquons que d'après 1.17(iii) tout w ne change le signe que d'un nombre fini d'éléments de Φ^+. Notons aussi que comme $l(w) = l(w^{-1})$ on a $l(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}|$. On déduit du théorème précédent une caractérisation des groupes de Coxeter finis :

Proposition 1.18. *Le groupe de Coxeter W est fini si et seulement s'il existe un élément w_0 de plus grande longueur dans W. Cet élément est alors unique, caractérisé par la propriété $l(w_0 s) = l(w_0) - 1$ pour tout $s \in S$, et pour tout $w \in W$ on a $l(ww_0) = l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$. On a $w_0^2 = 1$. La longueur de w_0 est le nombre de réflexions de W.*

Démonstration. Si W est fini il existe au moins un élément de longueur maximale.

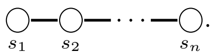
Réciproquement, si w_0 est un élément de longueur maximale, alors pour tout $s \in S$ on a $l(w_0 s) = l(w_0) - 1$. D'après 1.17(ii) ceci signifie que $w_0(e_s) \in \Phi^-$ pour tout s ; en particulier S est fini et donc W est fini puisque les longueurs des éléments sont bornées.

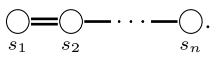
Par linéarité on a aussi $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$. On en déduit, par 1.17(iii), d'une part que $l(w_0) = |\Phi^+| = |R|$ et d'autre part que pour $w \in W$ et $\alpha \in \Phi^+$, on a $w(\alpha) \in \Phi^-$ si et seulement si $w_0 w(\alpha) \in \Phi^+$, ce qui donne $l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$. Appliquons ceci à un élément w_0' de même longueur que w_0. On obtient $l(w_0 w_0') = 0$, donc $w_0 = w_0'^{-1}$, ce qui montre à la fois l'unicité de w_0 et le fait que w_0 est de carré 1. $\square$

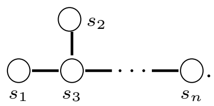
Définition 1.19. *On dit qu'un groupe de Coxeter W est irréductible s'il n'existe pas deux parties disjointes S_1 et S_2 de S telles que $S = S_1 \cup S_2$ et que tout $s_1 \in S_1$ commute avec tout $s_2 \in S_2$.*

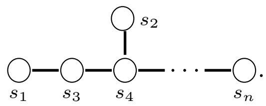
Si W n'est pas irréductible, avec les notations précédentes on a $W = W_{S_1} \times W_{S_2}$.

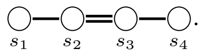
Nous allons maintenant donner la classification complète des groupes de Coxeter finis irréductibles. À toute matrice de Coxeter on associe un graphe dont les sommets sont les éléments de S et où les arêtes correspondent aux couples (s,t) tels que $st \neq ts$, c'est-à-dire $m_{s,t} \geq 3$. On étiquette l'arête avec $m_{s,t}$ si $m_{s,t} > 4$. Une convention souvent utilisée est de mettre une arête double (resp. triple) au lieu d'une étiquette si $m_{s,t} = 4$ (resp. $m_{s,t} = 6$). Remarquons que W est irréductible si et seulement si son graphe est connexe. On prouve (voir [Bbk, chapitre VI]) que W est fini irréductible si et seulement si son graphe de Coxeter est l'un des suivants (les groupes correspondants sont deux à deux non isomorphes) :

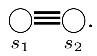
A_n $(n \geq 1)$: 

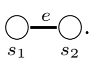
B_n $(n \geq 2)$: 

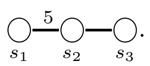
D_n $(n \geq 3)$: 

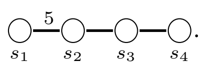
E_n $(n = 6,7,8)$: 

F_4 : 

G_2 : 

$I_2(e) (e = 5$ ou $e \geq 7)$: 

H_3 : 

H_4 : 

1.2. **Algèbres de Hecke.** Soit A un anneau commutatif. Les algèbres de Hecke sont des déformations de l'algèbre de groupe $A[W]$ où W est un groupe de Coxeter. Ces algèbres interviennent en théorie des représentations des algèbres et groupes de Lie ainsi qu'en théorie des nœuds entre autres. Le cadre est le suivant : on fixe un système de Coxeter (W,S), un anneau commutatif unitaire A et un élément $q_s \in A$ pour chaque $s \in S$ tel que $q_s = q_{s'}$ si s et s' sont conjugués dans W.

Lemme 1.20. *Soit (W,S) un système de Coxeter, alors s et s' sont conjugués si et seulement s'il existe un chemin fini de s à s' dans le graphe de Coxeter ne contenant que des arêtes d'étiquettes impaires.*

Démonstration. Si $m_{s,t}$ est impair on a $s = \underbrace{tst\dots s}_{m_{s,t}-1} t \underbrace{s\dots tst}_{m_{s,t}-1}$, donc s et t sont conjugués. D'autre part considérons la relation d'équivalence sur S définie par s est équivalent à s' si et seulement si s et s' sont reliés dans le graphe de Coxeter par un chemin fini (éventuellement de longueur 0) dont les étiquettes sont toutes impaires. Soit X l'ensemble des classes d'équivalence et soit f l'application de S dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$ qui envoie s sur l'élément qui a toutes ses composantes nulles sauf celle correspondant à la classe d'équivalence de s. Les éléments $f(s)$ vérifient les relations de tresses car si $m_{s,t}$ est impair s et t ont même image et si $m_{s,t}$ est pair comme $f(s)$ et $f(t)$ commutent et que $f(s)$ est d'ordre 2 pour tout s, la relation $(f(s)f(t))^{m_{s,t}} = 1$ est vérifiée. Donc f définit un homomorphisme de W dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$. Or si $m_{s,t}$ est pair les images de s et t dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$ ne sont pas conjuguées, donc s et t non plus. □

Définition 1.21. *La A-algèbre unitaire engendrée par des éléments T_s indexés par S, avec comme relations $\underbrace{T_sT_t\dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{T_tT_s\dots}_{m_{s,t}}$, pour s et t distincts dans S tels que $m_{s,t} \neq \infty$, et $T_s^2 = (q_s-1)T_s + q_s$ pour tout $s \in S$ s'appelle l'algèbre de Hecke de (W,S) sur l'anneau A de paramètres q_s. Elle sera notée $\mathcal{H}(W,S,(q_s))$ ou plus simplement $\mathcal{H}(W)$ si le contexte le permet.*

Notons que si on prend $q_s = 1$ pour tout s, l'algèbre obtenue est simplement l'algèbre $A[W]$ du groupe W. Nous allons montrer que $\mathcal{H}(W)$ est libre sur A de rang $|W|$. Commençons par définir des éléments T_w pour tout $w \in W$.

Lemme 1.22.
(i) *Soit $w = s_1\dots s_k$ une décomposition réduite d'un élément $w \in W$. Alors le produit $T_{s_1}\dots T_{s_k}$ ne dépend que de w et pas de la décomposition réduite.*
(ii) *Pour $w \in W$, si $w = s_1s_2\dots s_k$ est une décomposition réduite, le produit $q_{s_1}\dots q_{s_k}$ ne dépend que de w.*

Démonstration. On sait par 1.6(iii) qu'on passe d'une décomposition réduite à une autre en n'utilisant que des relations de tresses. Or les T_s vérifient les relations de tresses, donc le produit ne change pas quand on change de décomposition réduite. De même, comme $q_s = q_t$ si s et t vérifient une relation de tresse de longueur impaire, le produit du (ii) ne change pas quand on applique une relation de tresses. □

Nous noterons T_w l'élément défini dans le (i) du lemme et nous noterons q_w le produit $q_{s_1}\dots q_{s_k}$ considéré dans le (ii).

Proposition 1.23. *Les éléments T_w engendrent linéairement $\mathcal{H}(W)$ et vérifient les relations*

$$\begin{cases} T_wT_{w'} = T_{ww'} & \text{si } l(ww') = l(w) + l(w') \\ T_wT_s = (q_s-1)T_w + q_sT_{ws} & \text{si } l(ws) = l(w) - 1 \end{cases}$$

Démonstration. La première relation est une conséquence immédiate de la définition des T_w. La deuxième relation s'obtient en appliquant le lemme d'échange : si $l(ws) = l(w) - 1$ alors $w = w's$ avec $l(w) = l(w') + 1$, donc $T_w = T_{w'}T_s$ et on peut ensuite appliquer la relation $T_s^2 = (q_s-1)T_s + q_s$ et regrouper les termes, ce qui donne le résultat.

On déduit de ces deux relations que tout produit de générateurs T_s s'exprime comme combinaison linéaire d'éléments de la forme T_w, ce qui donne la première assertion de la proposition. $\square$

Théorème 1.24. *La famille $(T_w)_{w\in W}$ est une base de $\mathcal{H}(W)$ sur A, en particulier $\mathcal{H}(W)$ est libre de rang $|W|$.*

Démonstration. Nous introduisons un A-module libre E de base $(e_w)_{w\in W}$ sur lequel nous allons faire opérer $\mathcal{H}(W)$. On pose

$$T_s(e_w) = \begin{cases} e_{sw} & \text{si } l(sw) = l(w) + 1, \\ (q_s - 1)e_w + q_s e_{sw} & \text{si } l(sw) = l(w) - 1. \end{cases}$$

Pour voir que ces formules définissent une action de $\mathcal{H}(W)$ nous devons vérifier leur compatibilité avec les relations de définition de $\mathcal{H}(W)$. Soit $s \in S$; calculons $T_s(T_s e_w)$. Il y a deux cas. Si $l(sw) = l(w) + 1$ on obtient $T_s(e_{sw}) = (q_s - 1)e_{sw} + q_s e_w$, ce qui est bien égal à $(q_s - 1)T_s e_w + q_s e_w$. Si $l(sw) = l(w) - 1$ on trouve $T_s((q_s - 1)e_w + q_s e_{sw}) = (q_s - 1)^2 e_w + (q_s - 1)q_s e_{sw} + q_s e_w$, ce qui est bien égal à $(q_s - 1)T_s e_w + q_s e_w$. Soient maintenant s et t distincts tels que $m_{s,t} \neq \infty$. On doit comparer les images de e_w par les composés $A = \underbrace{T_s T_t \ldots}_{m_{s,t}}$ et $B = \underbrace{T_t T_s \ldots}_{m_{s,t}}$. Si $w = 1$ les deux images valent e_{w_I} où $I = \{s, t\}$ et $w_I = \underbrace{st\ldots}_{m_{s,t}}$ est le plus long élément du groupe W_I. Pour prouver l'égalité en général nous introduisons des applications linéaires p_s pour $s \in S$ définies par

$$p_s(e_w) = \begin{cases} e_{ws} & \text{si } l(ws) = l(w) + 1, \\ (q_s - 1)e_w + q_s e_{ws} & \text{si } l(ws) = l(w) - 1. \end{cases}$$

Nous allons prouver que pour tout t et s dans S l'opérateur linéaire p_t commute avec l'action de T_s sur E. On en déduira le résultat car si $w = s_1 s_2 \ldots s_k$ est une écriture réduite, on a $e_w = p_{s_k} p_{s_{k-1}} \ldots p_{s_1} e_1$, donc $Ae_w = Ap_{s_k} p_{s_{k-1}} \ldots p_{s_1}(e_1) = p_{s_k} p_{s_{k-1}} \ldots p_{s_1} Ae_1 = p_{s_k} p_{s_{k-1}} \ldots p_{s_1} Be_1 = Bp_{s_k} p_{s_{k-1}} \ldots p_{s_1}(e_1) = Be_w$.

Pour prouver la commutation nous distinguons plusieurs cas.

Cas 1) : si $l(swt) = l(w) + 2$. Dans ce cas $l(sw) = l(wt) = l(w) + 1$, donc $p_t T_s e_w = T_s p_t e_w = e_{swt}$.

Cas 2) : si $l(swt) = l(w) - 2$. Dans ce cas $l(sw) = l(wt) = l(w) - 1$, donc $p_t T_s e_w = p_t((q_s - 1)e_w + q_s e_{sw}) = (q_s - 1)(q_t - 1)e_w + (q_s - 1)q_t e_{tw} + q_s(q_t - 1)e_{sw} + q_s q_t e_{swt}$ et on vérifie que ceci est bien égal à $T_s p_t(e_w)$.

Cas 3) : si $l(sw) = l(w) + 1$, $l(wt) = l(w) + 1$ et $l(swt) = l(w)$. Dans ce cas le lemme d'échange montre que $sw = wt$ (exercice laissé au lecteur). On a alors $p_t T_s e_w = p_t e_{sw} = p_t e_{wt} = (q_t - 1)e_{wt} + q_t e_w$ et $T_s p_t e_w = T_s e_{wt} = T_s e_{sw} = (q_s - 1)e_{sw} + q_s e_w$. Comme s et t sont conjugués on a $q_s = q_t$ et comme $sw = wt$, les deux expressions sont bien égales.

Cas 4) : si $l(sw) = l(w) - 1$, $l(wt) = l(w) - 1$ et $l(swt) = l(w)$. On a comme dans le cas précédent $sw = wt$ et le reste du calcul est analogue.

Cas 5) : si $l(sw) = l(w) + 1$ et $l(wt) = l(w) - 1$. Dans ce cas on a $l(swt) = l(w)$, donc $p_t T_s e_w = p_t e_{sw} = (q_t - 1)e_{sw} + q_t e_{swt}$ et $T_s p_t(e_w) = (q_t - 1)T_s e_w + q_t T_s e_{wt} = (q_t - 1)e_{sw} + q_t e_{swt}$. On a bien égalité.

Cas 6) : si $l(sw) = l(w) - 1$ et $l(wt) = l(w) + 1$. Dans ce cas on a $l(swt) = l(w)$ et le calcul est analogue à celui du cas précédent.

On a donc prouvé que la structure de $\mathcal{H}(W)$-module sur E est bien définie. Nous allons l'utiliser pour prouver que les T_w sont indépendants. Supposons qu'on a une combinaison linéaire nulle $\sum_w \lambda_w T_w = 0$. Alors l'image de e_1 par cette somme est $\sum_w \lambda_w e_w$. Si cette somme est nulle, comme (e_w) est une base on a donc $\lambda_w = 0$ pour tout w. $\square$

Une conséquence de ce théorème est que si on considère le sous-A-module de $\mathcal{H}(W)$ de base $(T_w)_{w \in W_I}$ pour un certain $I \subset S$, ce sous-module est en fait une sous-algèbre isomorphe à $\mathcal{H}(W_I)$ puisqu'elle vérifie les relations de définition de $\mathcal{H}(W_I)$ et qu'elle a une base indexée par W_I.

2. Les algèbres de Hecke comme algèbres symétriques

2.1. **Algèbres et modules semi-simples.** Commençons par quelques rappels sur les algèbres semi-simples. Les algèbres considérées ici sont unitaires et non nulles. Nous nous restreignons au cas des algèbres de dimension finie sur un corps commutatif bien que beaucoup des notions et propriétés ci-dessous puissent être énoncées dans le cadre général des anneaux, en particulier des anneaux artiniens. Pour les propriétés non démontrées ici on peut se reporter à [L] ou [CR]. Nous ne rappellerons ici que ce qui nous est nécessaire pour l'étude des algèbres de Hecke et d'autres algèbres associées aux groupes de Coxeter. Rappelons qu'une algèbre non nulle est simple si elle n'admet pas d'idéal bilatère propre non nul. Une algèbre est semi-simple si elle est somme directe d'algèbres simples. Un module sur une algèbre est simple s'il est non nul et n'admet pas de sous-module propre non nul. Un module est semi-simple s'il est somme directe de modules simples. Tout sous-module et tout quotient d'un module semi-simple est semi-simple. Tout sous-module d'un module semi-simple admet un supplémentaire.

Proposition 2.1. *Une algèbre H de dimension finie sur un corps commutatif est semi-simple si et seulement si elle est semi-simple comme module sur elle même (par multiplication à gauche). Si une algèbre est semi-simple tout H-module de dimension finie est semi-simple. Dans ce cas $H = \oplus H_V$ est somme directe finie d'algèbres simples (unitaires) H_V indexées par les classes d'isomorphismes des H-modules simples. L'algèbre H_V est la somme directe de tous les sous-modules de H isomorphes à V. On a $H_{V'}V = 0$ si V' est un H-module non isomorphe à V et l'élément unité de H_V agit par l'identité sur V.*

Pour cette proposition nous renvoyons à la littérature, par exemple [CR] ou [L]. Notons qu'une conséquence de cet énoncé est qu'une algèbre semi-simple est simple si et seulement si tous les modules sur cette algèbre sont isomorphes.

Définition 2.2. *Soit H une algèbre de dimension finie sur un corps commutatif K. On appelle radical de H le plus grand idéal bilatère nilpotent de H, noté* $\mathrm{Rad}(H)$.

Cette définition a un sens car la somme de deux idéaux nilpotents est un idéal nilpotent. Rappelons qu'un idéal I est nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$, c'est-à-dire que tout produit de n éléments de I est nul.

Théorème 2.3. *Soit H une algèbre de dimension finie sur un corps.*

(i) *Le radical de H est l'ensemble des éléments qui agissent par 0 sur tout H-module simple.*
(ii) *Le radical est l'intersection des idéaux à gauche maximaux.*
(iii) *H est semi-simple si et seulement si* $\mathrm{Rad}(H) = \{0\}$.

Démonstration. Soit S un H-module simple et $J = \mathrm{Rad}(H)$. Si $JS \neq 0$ alors, comme S est simple et que JS est un sous-module de S, on a $JS = S$, donc $J^nS = S$ pour tout n, ce qui est impossible car J est nilpotent. Réciproquement, si x annule tous les H-modules simples, considérons l'idéal bilatère I engendré par x. Cet idéal annule tous les H-modules simples. Considérons la suite décroissante d'idéaux I^n. Si $I^n \neq 0$, il existe un sous-idéal à gauche $I'_n \subsetneqq I^n$ tel que le quotient I^n/I'_n soit simple. Alors I annule I^n/I'_n, donc $I^{n+1} \subset I'_n$ et donc $I^{n+1} \subsetneqq I^n$. Comme on est en dimension finie, cette suite strictement décroissante aboutit nécessairement à 0, donc I est nilpotent, c'est-à-dire $I \subset \mathrm{Rad}(H)$. D'où la partie (i) du théorème.

Soit M un idéal à gauche maximal ; alors H/M est simple donc $\operatorname{Rad} H$ annule H/M, ce qui implique que $\operatorname{Rad} H \subset M$ (le produit de $\operatorname{Rad} H$ par l'image de 1 dans H/M est nul). Donc le radical est inclus dans tous les idéaux à gauche maximaux. Réciproquement soit J l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux. S'il existe un module simple S tel que J n'annule pas S, il existe $s \in S$ tel que J n'annule pas s et donc $Js = S$. Donc il existe $j \in J$ tel que $js = -s$ ce qui implique que $j + 1$ est dans l'annulateur de s qui est un idéal à gauche, donc inclus dans un idéal à gauche maximal M. Comme j est dans M on obtient $1 \in M$, ce qui est impossible.

Prouvons maintenant la troisième partie du théorème. Si l'algèbre est semi-simple, et si I est un idéal bilatère nilpotent, sa projection sur chaque composante simple est un idéal bilatère nilpotent qui ne peut donc pas être égal à toute la composante, donc est égal à 0. Réciproquement, on peut trouver une suite finie $M_1, \ldots, M_k$ d'idéaux à gauche maximaux dont l'intersection est égale à l'intersection de tous les idéaux à gauche maximaux car on est en dimension finie. Le morphisme de H-modules $H \to \oplus_i H/M_i$ a donc pour noyau le radical de H. Si le radical est nul ce morphisme est injectif et H, sous-module d'un module semi-simple, est semi-simple comme module, donc comme algèbre. □

Exercice 2.4. Montrer que si H est une algèbre, le quotient $H/\operatorname{Rad}(H)$ est semi-simple.

Un exemple d'algèbre simple et l'algèbre $\mathcal{M}(n,k)$ des matrices carrées de taille n sur un corps k. En effet cette algèbre est, comme module sur elle-même, la somme directe des sous-modules $\mathcal{M}_i$ formés des matrices dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i-ième. De plus tous ces modules sont isomorphes. Par 2.1 l'algèbre est donc simple : elle est somme de modules simples tous isomorphes c'est-à-dire semi-simple avec une seule classe d'isomorphisme de modules simples. Nous allons donner une réciproque à cette propriété.

Théorème 2.5. *Une algèbre H de dimension finie sur un corps commutatif k algébriquement clos est semi-simple si et seulement si elle est isomorphe à une somme directe d'algèbres de matrices.*

Démonstration. On a vu qu'une algèbre de matrices est simple, donc une somme directe de telles algèbres est semi-simple. Réciproquement, soit H une algèbre semi-simple de dimension finie sur k. On a $H = \oplus_i H_i$ où les H_i sont des algèbres simples. Il suffit de voir qu'une algèbre simple sur un corps algébriquement clos est un algèbre de matrices. On est ramené à H simple. Soit I un idéal à gauche minimal de H. C'est un H-module simple et c'est un espace vectoriel de dimension finie sur k car H est de dimension finie. Nous allons montrer que $H \simeq \operatorname{End}_k(I)$.

L'action d'un élément $h \in H$ sur I est une application linéaire, donc on obtient ainsi un morphisme d'algèbres $H \to \operatorname{End}_k(I)$. Le noyau est réduit à 0 puisque si un élément annule I, il annule tous les H-modules simples puisqu'ils sont isomorphes à I (*cf.*, proposition 2.1), donc il est dans le radical qui est réduit à 0. On a donc une injection de H dans $\operatorname{End}_k(I)$. Montrons que ce morphisme est aussi surjectif. Pour $x \in I$ la multiplication à droite par x est un endomorphisme de I comme H-module. Par le lemme de Schur, le corps étant algébriquement clos, cet endomorphisme est un scalaire λ_x, donc pour tout $y \in I$ on a $yx = \lambda_x y$. Soit $f \in \operatorname{End}_k(I)$, on a donc $f(yx) = f(y)x$ pour tout x et tout y dans I. D'autre part IH est un idéal bilatère de H non nul donc égal à H. Donc $1 \in IH$, c'est-à-dire qu'on peut écrire $1 = \sum_i x_i h_i$ avec $h_i \in H$ et $x_i \in I$. Pour tout $f \in \mathrm{End}_k(I)$ et tout $y \in I$ on a alors $f(y) = f(\sum_i x_i h_i y) = \sum_i f(x_i)h_i y$ puisque $h_i y \in I$. Donc f est la multiplication à gauche par l'élément $\sum_i f(x_i)h_i \in H$, ce qui montre la surjectivité de $H \to \mathrm{End}_k(I)$. □

On a vu dans la preuve qu'une algèbre simple sur un corps algébriquement clos est une algèbre de matrices de taille la dimension de l'unique module simple sur cette algèbre. Une algèbre H semi-simple sur un corps algébriquement clos est donc somme d'algèbres de matrices dont les tailles sont les dimensions des H-modules simples.

Définition 2.6. (i) *On dit qu'une algèbre semi-simple sur un corps k est déployée si elle est isomorphe à une somme finie d'algèbres de matrices sur k.*

(ii) *On dit qu'une algèbre H sur un corps k est absolument semi-simple si l'algèbre $\overline{k} \otimes_k H$ sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k est semi-simple (on dit aussi que H est séparable).*

(iii) *Si H est une algèbre absolument semi-simple, les entiers n_i tels que $\overline{k} \otimes_k H = \oplus_i \mathcal{M}(n_i, \overline{k})$ s'appellent les invariants numériques de H. Ce sont les dimensions des $\overline{k} \otimes_k H$-modules simples.*

En particulier une algèbre absolument semi-simple est semi-simple (exercice). Si H est une algèbre absolument semi-simple on dit qu'elle se déploie sur une extension k' de k si $k' \otimes_k H$ est isomorphe à une algèbre de matrices sur k'.

Remarquons que si H est une k-algèbre absolument semi-simple, elle est déployée sur une extension de degré fini de k. En effet, fixons une base (h_i) de H sur k ; les matrices de l'action des h_i sur un $H_{\overline{k}}$-module V sont toutes à coefficients dans une certaine extension k' de degré fini sur k, car il y a un nombre fini de matrices et un nombre fini de coefficients dans chaque matrice. Ceci signifie que l'on a un module sur $H_{k'}$ où les éléments de H ont les mêmes matrices. En appliquant ceci à tous les $H_{\overline{k}}$-modules simples on obtient un isomorphisme entre $H_{k'}$ et un somme directe d'algèbre de matrices sur k'. Donc H_k' est une algèbre semi-simple déployée.

Notation 2.7. Dans la suite si H est une algèbre sur un anneau commutatif A et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs) nous noterons H_B la B-algèbre $B \otimes_A H$, où B agit sur le facteur gauche dans ce produit tensoriel et $b \otimes ah = bf(a) \otimes h$ pour tous $a \in A$, $b \in B$ et $h \in H$.

Remarquons que sur une algèbre de matrices on a une forme linéaire τ donnée par la trace qui vérifie $\tau(ab) = \tau(ba)$. De plus la forme bilinéaire symétrique $(a, b) \mapsto \tau(ab)$ est non dégénérée. Donc une algèbre semi-simple déployée est munie d'une telle forme linéaire obtenue en prenant la somme des traces des diverses composantes simples (ou toute combinaison linéaire dont les coefficients sont tous non nuls). Des réciproques partielles en seront données plus bas (2.9 et 2.11).

Définition 2.8. *On appelle trace sur une k-algèbre H une application $\tau : H \to k$ qui vérifie $\tau(ab) = \tau(ba)$. On dit qu'une trace est symétrisante si la forme bilinéaire symétrique $(a, b) \mapsto \tau(ab)$ est non dégénérée. Si H a une trace symétrisante, on dit que H est une algèbre symétrique.*

Si V est un H-module de dimension finie sur k, on peut associer à tout élément $h \in H$ la trace de son action sur V. La fonction obtenue est une trace sur H

appelée le caractère du module V. Une partie de la théorie des représentations des algèbres semi-simples consiste en le calcul des caractères des H-modules simples. Le caractère d'un module simple sera appelé caractère irréductible. Si H est une algèbre de matrices, elle n'a qu'un module simple et le caractère de ce module est donnée par la trace des matrices. Si H est semi-simple déployée on peut décomposer $H = \oplus_V H_V$ où H_V est une algèbre de matrices et V parcourt des représentants des classes d'isomorphismes de modules simples. Le caractère du H-module V est donné par la trace de la projection sur la composante H_V.

Théorème 2.9. *Une algèbre de dimension finie sur un corps est absolument semi-simple si et seulement si elle admet une trace symétrisante qui est combinaison linéaire de caractères.*

Démonstration. Si une algèbre H de dimension finie sur un corps k est absolument semi-simple, on a $H_{\overline{k}} \simeq \oplus_V H_V$ où les H_V sont des algèbres de matrices. Pour chacune de ces algèbres de matrices, la trace des matrices fournit une trace symétrisante. La somme directe de ces traces fournit donc une trace τ symétrisante pour $H_{\overline{k}}$ appelée trace réduite. Il reste à montrer que sur les éléments de H cette trace est à valeurs dans k et on aura une trace symétrisante sur H. Nous ne donnons pas ici la preuve qu'on pourra trouver par exemple dans le livre de I. Reiner (Maximal Orders), §9 ; voir aussi [CR, §7D].

Réciproquement, remarquons d'abord que tout caractère s'annule sur un élément nilpotent puisque la trace d'une matrice nilpotente est nulle. Donc si on a une trace symétrisante τ sur une algèbre H qui est combinaison de caractères, cette trace s'annule sur les éléments du radical de H, et comme le radical est un idéal on a $\tau(xy) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Rad}(H)$ et tout $y \in H$. Comme la trace est non dégénérée on en déduit que $x = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Rad}\, H$ donc l'algèbre est semi-simple. Cet argument peut-être répété sur toute extension du corps car la trace reste non dégénérée et un caractère s'étend en un caractère par extension du corps de base. Donc H est absolument semi-simple. □

Exemple 2.10. Soit G un groupe fini et k un corps ; alors $k[G]$ a une trace symétrisante donnée par $\tau(\sum_g \lambda_g g) = \lambda_1$. En effet on a $\tau(gh) = \delta_{gh^{-1}}$, donc la base $(g)_{g\in G}$ est duale de la base $(g^{-1})_{g\in G}$.

Remarquons que pour toute algèbre H libre de rang fini sur un anneau A il existe une trace qui vaut sur un élément $h \in H$ la trace notée $\mathrm{trace}_{H/A}(h)$ de la multiplication à gauche par h, vue comme endomorphisme du A-module libre H.

Corollaire 2.11. *Soit H une algèbre de dimension finie sur un corps k ; si la trace $\mathrm{trace}_{H/k}$ est symétrisante, l'algèbre H est absolument semi-simple.*

Démonstration. La trace $\mathrm{trace}_{H/k}$ est le caractère de H vue comme module sur elle-même par multiplication à gauche, d'où le résultat par 2.9. □

Appliquons ceci à l'exemple 2.10 dans le cas où la caractéristique de k ne divise pas $|G|$. Comme $|G|\tau$ est égal au caractère de la représentation régulière de G, c'est-à-dire de $k[G]$ vu comme $k[G]$-module pour la multiplication à gauche, et comme $|G| \neq 0$, on obtient que τ est combinaison linéaire de caractères et on en déduit que dans ce cas $k[G]$ est absolument semi-simple.

Remarque 2.12. La réciproque de 2.11 est vraie en caractéristique 0 mais fausse en caractéristique non nulle. En effet la trace de la multiplication à gauche par une matrice A dans une algèbre de matrices de taille m vaut m fois la trace de A, donc si m est multiple de la caractéristique cette trace est nulle. Sinon on voit facilement que cette trace est non dégénérée.

La proposition suivante, jointe au théorème 2.9 ou au corollaire 2.11 nous permettra de montrer que dans certains cas les algèbres de Hecke sont absolument semi-simples. Pour énoncer cette proposition nous avons besoin d'une définition.

Définition 2.13. *Considérons un anneau A commutatif intègre et un morphisme f de A dans un corps k. Si H est une A-algèbre libre de rang fini et τ une forme linéaire $H \to A$ on obtient une forme linéaire $\overline{\tau}$ sur H_k en posant $\overline{\tau}(1 \otimes e_i) = f(\tau(e_i))$ pour une base e_i de H sur A. On vérifie (exercice) que $\overline{\tau}$ ne dépend pas de la base. On dit que c'est la forme linéaire induite par τ sur H_k. On dit aussi que c'est la spécialisée de τ par f.*

Proposition 2.14. *Soit A un anneau commutatif intègre de corps des fractions K et soit $A \to k$ un morphisme de A dans un corps commutatif k. Soit H une A-algèbre libre de rang fini. Si $\tau : H \to A$ est une trace qui induit une trace symétrisante sur H_k alors τ définit une trace symétrisante sur H_K.*

Démonstration. Une forme bilinéaire sur un espace vectoriel est non dégénérée si et seulement si sa matrice est inversible. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de H sur A, alors (e_i) est une base de H_K sur K et $(1 \otimes e_i)$ est une base de H_k sur k. La forme linéaire $\overline{\tau}$ induite sur H_k est donnée par $\overline{\tau}(1 \otimes e_i) = f(\tau(e_i))$. Donc la matrice de la forme bilinéaire sur H_k est l'image par f de la matrice de la forme bilinéaire sur $H\cdot$ Son déterminant est l'image du déterminant. Si l'image du déterminant est non nul, le déterminant de départ l'est aussi, d'où le résultat. □

Théorème 2.15. *Soit H une algèbre libre de rang fini sur un anneau A intègre de corps des fractions K, et soit $f : A \to k$ un morphisme d'anneaux de A dans un corps k.*

(i) *Si H_k et H_K sont absolument semi-simples elles ont les mêmes invariants numériques.*

(ii) *Si A est intégralement clos dans K, si H_k et H_K sont semi-simples déployées, et si χ est un caractère irréductible de H_K alors $\chi(h) \in A$ pour tout $h \in H$ et $\overline{\chi} : h \mapsto f \circ \chi(1 \otimes h)$ est un caractère irréductible de H_k. De plus $\chi \mapsto \overline{\chi}$ est une bijection des caractères irréductibles de H_K sur ceux de H_k.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base de H sur A et soient $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ des indéterminées. On considère les algèbres $H_{K[X_1,\dots,X_m]}$ et $H_{k[X_1,\dots,X_m]}$. Soit $P(t)$ le polynôme caractéristique de la multiplication par $\sum_i X_i e_i$ dans $H_{A[X_1,\dots,X_m]}$. Soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K. Nous allons montrer que le polynôme $P(t)$ se décompose sur $\overline{K}(X_1, \dots, X_m)$ en facteurs irréductibles sous la forme $\prod_j P_j^{n_j}$ où P_j est irréductible de degré n_j et les n_j sont les invariants numériques de H. Pour faire ce calcul on peut changer de base car remplacer les e_i par des combinaisons linéaires $\sum_j \lambda_{ij} e_j$ avec $\lambda_{ij} \in \overline{K}$ revient à remplacer les X_i par les $Y_i = \sum_j \lambda_{ji} X_j$ (faites ce calcul !). Comme l'algèbre $H_{\overline{K}}$ est semi-simple déployée c'est une somme d'algèbres de matrices sur $\overline{K}$ et on peut prendre comme base de chacune de ces algèbres de matrices les matrices E_{ij} qui ont un seul coefficient non nul, d'indice (i, j) et valant 1. Le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques sur chacune des algèbres de matrices. Sur une algèbre de matrices de taille n, on doit donc calculer le polynôme caractéristique de la multiplication par $\sum_{ij} X_{ij}E_{ij}$ où les X_{ij} sont des indéterminées. Comme $E_{ij}E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$, on a $(\sum_{ij} X_{ij}E_{ij})E_{rs} = \sum_i X_{ir}E_{is}$. La matrice de la multiplication par $\sum_{ij} X_{ij}E_{ij}$ est donc une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont égaux à la matrice (X_{ij}). Son polynôme caractéristique est donc le polynôme $\det(t\,\mathrm{Id}_n - (X_{ij}))^n$. Le polynôme $\det(t\,\mathrm{Id}_n - (X_{ij}))$ étant irréductible sur le corps $\overline{K}(X_{ij})$ (exercice ; indication : spécialiser les X_{ij} tous à 0 sauf les $X_{i+1,i}$ qu'on prend égaux à 1 et X_{1n} ; on obtient le polynôme $t^n - X_{1n}$ qui est irréductible), on obtient bien les degrés et les multiplicités annoncées pour la décomposition en facteurs irréductibles.

Montrons alors (i). Le polynôme $P(t)$ est à coefficients dans $A[(X_i)]$ et son image par f est le polynôme analogue pour H_k. Soit $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans $\overline{K}$. Montrons que les facteurs irréductibles de $P(t)$ sont à coefficients dans $\overline{A}[(X_i)]$. Les racines des P_i sont entières sur $A[(X_i)]$ puisque ce sont des racines de P ; donc les coefficients des P_i sont entiers sur $A[(X_i)]$ et sont dans $\overline{K}[(X_i)]$; or $\overline{A}[(X_i)]$ est intégralement clos car $\overline{A}$ est intégralement clos, d'où l'assertion.

On peut étendre f à $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{k}$ où $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k (exercice ; indication : montrer qu'on peut étendre f à $A[\alpha]$ pour tout $\alpha \in \overline{A} - A$ et prendre un sous-anneau maximal de $\overline{A}$ auquel f s'étend ; montrer que c'est nécessairement $\overline{A}$ tout entier). On a donc $f(P) = \prod_j \overline{f}(P_j^{n_j})$, où $f(P)$ et $\overline{f}(P_j)$ sont les images de P et P_j respectivement dans $\overline{k}[(X_i)][t]$ par f. Un calcul analogue dans $H_{\overline{k}[(X_i)]}$ donne une décomposition de $f(P)$ sous la forme $\prod_r Q_r^{m_r}$ où Q_r est irréductible de degré m_r et les m_r sont les invariants numériques de H_k. Les Q_r sont donc des facteurs irréductibles des $\overline{f}(P_j)$. Comme la dimension de H_K est égale à la dimension de H_k, on a $\sum_j n_j^2 = \sum_r m_r^2$ et les m_r se répartissent en paquets, chacun d'eux ayant pour somme un n_j. Ceci est impossible sauf si il y a exactement un m_r pour chaque n_j, c'est-à-dire que les invariants numériques sont les mêmes pour H_K et H_k.

Montrons (ii). Remarquons que dans la preuve précédente, si H_K et H_k sont semi-simples déployées on peut faire le raisonnement directement sans passer aux clôtures algébriques. L'algèbre H est somme d'algèbres de matrices qui correspondent chacune à un H-module simple et la valeur du caractère irréductible correspondant sur l'élément $\sum_i X_i e_i$ est la trace de la matrice, donc le coefficient de t^{n-1} d'un facteur irréductible du polynôme P. Comme la même propriété est vraie pour H_k on obtient le résultat. $\square$

2.2. **Traces sur les algèbre de Hecke.** Notre intérêt pour les algèbres symétriques dans le cadre de ce cours provient du résultat suivant qui nous permettra de donner des conditions pour qu'une algèbre de Hecke soit semi-simple.

Théorème 2.16. *Soit $H = \mathcal{H}(W)$ l'algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter fini W sur un corps k. Supposons que les paramètres q_s pour $s \in S$ sont tous non nuls. Alors $\tau(\sum_{w\in W} \lambda_w T_w) = \lambda_1$ est une trace symétrisante sur H.*

Démonstration. Nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.17. $\tau(T_vT_w) = \begin{cases} q_w & \textit{si } w = v^{-1}, \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$

Preuve du lemme. Montrons le lemme par récurrence sur $l(w)$. Si $l(w) = 0$ on a $T_vT_w = T_v$ et le résultat est clair. En général écrivons $w = su$ avec $s \in S$ et $l(u) = l(w) - 1$. On a $T_vT_w = T_vT_sT_u$. Si $w = v^{-1}$ on a $T_vT_w = T_{u^{-1}}T_s^2T_u =$

$(q_s-1)T_{u^{-1}}T_sT_u + q_sT_{u^{-1}}T_u = (q_s-1)T_vT_u + q_sT_{u^{-1}}T_u$. Comme $u \neq v^{-1}$, on obtient le résultat par récurrence. Si $w \neq v^{-1}$, si $l(vs) = l(v)+1$ le produit T_vT_w vaut $T_{vs}T_u$ et on a $u \neq (vs)^{-1}$ car $l(su) = l(u)+1$ et $l((vs)s) = l(vs)-1$. Par récurrence on obtient donc $\tau(T_vT_w) = 0$. Si $l(vs) = l(v)-1$, on pose $v = xs$ et on a $x \neq u^{-1}$. On a $T_vT_w = T_xT_s^2T_u = (q_s-1)T_xT_sT_u + q_sT_xT_u = (q_s-1)T_vT_u + q_sT_xT_u$. On a $u \neq v^{-1}$ puisque $l(vs) = l(v)-1$ et $l(su) = l(u)+1$. Par récurrence on obtient bien aussi 0 dans ce cas. □

Le lemme montre immédiatement que τ est une trace. Il montre même que T_w et $q_w^{-1}T_{w^{-1}}$ sont des bases duales pour la forme bilinéaire définie par τ, donc que cette forme est bien non dégénérée. □

Corollaire 2.18. *Supposons que la caractéristique du corps k ne divise pas $|W|$; considérons des indéterminées X_s pour $s \in S$ avec $X_s = X_t$ si s et t sont conjugués Alors $H_{k((X_s)_{s\in S})}$ est absolument semi-simple et a mêmes invariants numériques que $k[W]$.*

Démonstration. Notons $H = H_{k[(X_s)]}$. Considérons l'anneau $A = k[(X_s)]$ et le morphisme $f : A \to k$ donné par $X_s \mapsto 1$. L'algèbre spécialisée H_k est $k[W]$ et la trace $\mathrm{trace}_{H/A}$ de l'algèbre de Hecke se spécialise en la trace $\mathrm{trace}_{k[W]/k}$ de $k[W]$. Cette trace est égale à $|W|\tau$ où τ est la trace standard de $k[W]$ (voir 2.10) donc est non dégénérée si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe. On applique alors 2.14 et 2.11 qui montrent que $H_{k((X_s)_{s\in S})}$ est aussi absolument semi-simple. Par 2.15 on obtient le résultat sur les invariants numériques. □

L'algèbre de Hecke $H = H_{k((X_s)_{s\in S})}$ s'appelle l'algèbre de Hecke générique de W sur k.

Corollaire 2.19. *Soit k un corps dont la caractéristique ne divise pas $|W|$ et soient $(q_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de k tels que $q_s = q_t$ si s et t sont conjugués. Supposons que l'algèbre de Hecke $H(W,(q_s))$ est absolument semi-simple. Alors elle a les mêmes invariants numériques que $k[W]$. En particulier si de plus k est algébriquement clos ces deux algèbres sont isomorphes.*

Démonstration. Considérons l'algèbre $H_{k[(X_s)]}$ du corollaire précédent. Elle se spécialise en $H(W,(q_s))$ par $X_s \mapsto q_s$. On peut appliquer 2.15 et on obtient le résultat en utilisant le corollaire précédent. □

2.3. **Un exemple.** Considérons un groupe fini G et un sous-groupe B de G. Soit k un corps. Alors G opère sur le k-espace vectoriel V de base indexée par G/B par multiplication à gauche. C'est la représentation induite de la représentation identité de B. Notons (e_{gB}) la base de V, où gB décrit G/B. On cherche les opérateurs linéaires sur V qui commutent à l'action de G ; l'application $f : V \to V$ commute à l'action de G si et seulement si $f(e_{gB}) = gf(e_B)$ pour tout $g \in G$, donc f est déterminé par $f(e_B)$. Il suffit donc de connaître les coefficients λ_{gB} de l'expression $f(e_B) = \sum_{gB\in G/B} \lambda_{gB}e_{gB}$ et on a $f(e_{xB}) = \sum_{gB\in G/B} \lambda_{gB}e_{xgB} = \sum_{gB\in G/B} \lambda_{x^{-1}gB}e_{gB}$ pour tout $x \in G$. Réciproquement cette dernière formule a un sens si et seulement si le deuxième membre ne dépend pas du représentant x de la classe xB, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_{bx^{-1}gB} = \lambda_{x^{-1}gB}$ pour tout $b \in B$ et tout x et tout g dans G, ce qui revient à dire que λ_{gB} ne dépend que de la double-classe BgB. Notons W un ensemble de représentants des doubles-classes $B\backslash G/B$.

Notons t_w l'application f comme ci-dessus pour laquelle $\lambda_{gB} = 1$ si $g \in Bw^{-1}B$ et 0 sinon. On a donc $t_w(e_{gB}) = \sum_{\{hB|h^{-1}g\in BwB\}} e_{hB}$. On vient de voir que toute application linéaire f qui commute avec l'action de G sur V est combinaison linéaire des applications t_w.

D'autre part les t_w sont linéairement indépendants car si $\sum_w \lambda_w t_w = 0$ alors $\sum_w \lambda_w t_w(e_B) = 0$, ce qui s'écrit $\sum_w \lambda_w \sum_{\{hB|h^{-1}\in BwB\}} e_{hB} = 0$. Or les e_{hB} forment une base et un hB donné n'apparaît que dans un terme de la somme, donc tous les coefficients sont nuls.

On a donc montré que les opérateurs qui commutent avec G forment une algèbre de base $(t_w)_{w\in W}$. Calculons le produit dans cette algèbre.

Lemme 2.20. *On a* $t_w t_{w'} = \sum_{w''} |(BwB \cap w''Bw'^{-1}B)/B| t_{w''}$.

Démonstration. L'image par $t_w t_{w'}$ de e_{gB} est par définition

$$\sum_{\{xB|x^{-1}g\in Bw'B\}} \sum_{\{yB|y^{-1}x\in BwB\}} e_{yB}.$$

Le coefficient de e_{yB} est donc le nombre de $xB \in G/B$ tels que $x \in yBwB \cap gBw'^{-1}B$, c'est-à-dire $|(yBwB \cap gBw'^{-1}B)/B|$ ou encore $|(BwB \cap y^{-1}gBw'^{-1}B)/B|$. Cette valeur ne dépend que de la double-classe $By^{-1}gB$, et en regroupant les termes e_{yB} tels que $y^{-1}g$ soit dans une double-classe $Bw''B$ fixée on obtient le résultat. □

Nous allons appliquer ce qui précède au cas particulier où G est le groupe $\mathrm{GL}_n(q)$ des matrices inversibles de rang n sur un corps à q éléments. On prend pour B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On admet qu'un ensemble de représentants des double-classes $B\backslash G/B$ est donné par les matrices de permutations, c'est-à-dire qui n'ont que des coefficients 0 ou 1 et un seul coefficient non nul dans chaque ligne et chaque colonne. ces matrices forment un groupe isomorphe au groupe symétrique S_n. Rappelons aussi que S_n est un groupe de Coxeter dont l'ensemble S de générateurs est formé par les transpositions de la forme $(i, i+1)$. Nous admettrons que $BwBw'B = Bww'B$ si $l(w) + l(w') = l(ww')$ et que $BsBsB = BsB \cup B$ pour $s \in S$. On a $t_w t_{w'} = t_{ww'}$ si $l(w) + l(w') = l(ww')$, par la propriété des double-classes (faites ce calcul !). Calculons t_s^2. D'après le lemme précédent t_s^2 a un coefficient non nul sur $t_{w''}$ si et seulement si $BsB \cap w''BsB \neq \emptyset$ ce qui est équivalent à $w'' \in BsBsB$, donc $w'' = 1$ ou $w'' = s$. Le coefficient de t_s^2 sur t_1 est $|BsB/B| = |B/(B \cap sBs)|$. Un calcul de matrices montre que ceci vaut q. Le coefficient de t_s^2 sur t_s vaut $|(BsB \cap sBsB)/B|$. Un élément de $sBsB$ est soit dans B soit dans BsB. Donc modulo B on a un seul élément de $sBsB$ qui est dans B (B est une seule classe modulo B), et tous les autres sont dans BsB. Comme $|sBsB/B| = |BsB/B| = q$ on a donc $|(BsB \cap sBsB)/B| = q - 1$. On trouve donc que les t_w vérifient exactement les relations de l'algèbre de Hecke de S_n avec comme paramètre q, autrement dit on a prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.21. (i) *L'algèbre engendrée par les* t_w *est l'algèbre* $\mathrm{End}_G(V)$ *de tous les endomorphismes qui commutent à l'action de* G·

(ii) *L'application qui envoie* t_w *sur* T_w *est un isomorphisme d'algèbre de* $\mathrm{End}_G(V)$ *sur l'algèbre de Hecke* $H(S_n, q)$.

Supposons de plus que la caratéristique du corps k ne divise pas $|G|$. On a alors :

Théorème 2.22. *Si la caractéristique du corps ne divise pas* $|\mathrm{GL}_n(q)|$, *l'algèbre de Hecke* $H(S_n, q)$ *est absolument semi-simple.*

Démonstration. Nous allons montrer que la trace donnée par le caractère χ de la représentation de l'algèbre de Hecke sur V comme ci-dessus est une trace symétrisante. La trace de t_w vaut $\sum_{g\in G/B}$(coefficient de $t_w e_{gB}$ sur e_{gB}). Or le coefficient de $t_w(e_{gB})$ sur e_{gB} est nul sauf si $w = 1$, et vaut 1 si $w = 1$. On trouve donc que $\chi(t_w) = 0$ sauf si $w = 1$ et $\chi(t_1) = |G/B|$. Donc χ est égal à $|G/B|\tau$ où τ est la trace symétrisante définie en 2.16 (elle est bien symétrisante car q divise $|G|$, donc n'est pas nul dans k). On en déduit le résultat puisque par hypothèse $|G/B|$ n'est pas nul dans k. □

Remarque 2.23. L'analogue de ce théorème est vrai si l'on prend pour G les points sur $\mathbb{F}_q$ d'un groupe algébrique réductif défini sur $\mathbb{F}_q$ et pour B les points d'un sous-groupe de Borel défini sur $\mathbb{F}_q$. Dans ce cas W est l'ensemble des points sur $\mathbb{F}_q$ du groupe de Weyl de G. Plus généralement ce théorème est encore vrai si G est muni d'un système de Tits (B, N) et si W est le groupe de Coxeter associé.

3. Groupe de tresses, trace de Markov

3.1. Groupes d'Artin-Tits.

Définition 3.1. *Si (W, S) est un système de Coxeter on appelle groupe d'Artin-Tits associé, noté $B(W)$ le groupe ayant une présentation donnée par un ensemble générateur* $\mathbf{S}$ *en bijection* $s \mapsto \mathbf{s}$ *avec S et les relations de tresses* $\underbrace{\mathbf{sts}\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{\mathbf{tst}\ldots}_{m_{s,t}}$, *pour tous s et t dans S.*

On voit que le groupe W est le quotient de $B(W)$ par le sous-groupe distingué engendré par les $\mathbf{s}^2$ pour $s \in S$. Le noyau de ce morphisme est appelé groupe d'Artin-Tits pur noté $P(W)$. D'autre part, comme les relations de tresses sont vérifiées dans $B(W)$, si $w = s_1 \ldots s_k$ est une décomposition réduite dans W, l'élément $\mathbf{s}_1 \ldots \mathbf{s}_k$ ne dépend que de w et pas de la décomposition (d'après 1.6(iii)). Ceci permet de définir une application (ce n'est pas un homomorphisme de groupes) $w \mapsto \mathbf{w}$ de W dans $B(W)$.

Considérons un corps k et des éléments $(q_s)_{s\in S}$ de k tels que $q_s = q_t$ si s et t sont conjugués. Alors l'application $\mathbf{s} \to T_s$ définit un morphisme d'algèbres de l'algèbre $k[B(W)]$ du groupe $B(W)$ sur l'algèbre de Hecke $H(W, (q_s))$ de W sur k qui envoie $\mathbf{w}$ sur T_w. Dans le cas où $q_s = 1$ pour tout s on retrouve le morphisme de $k[B(W)]$ dans $k[W]$.

3.2. Groupe de tresses d'un groupe de réflexions. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire et soit W un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions (c'est-à-dire des applications linéaires qui ont un hyperplan de points fixes et qui conservent le produit scalaire, ce qui implique que leur dernière valeur propre est une racine de l'unité). On note $\mathcal{M}$ le complémentaire dans $V_{\mathbb{C}}$ de l'union des hyperplans des réflexions de W. Alors le groupe W opère sur $\mathcal{M}$. On peut démontrer que cette représentation est sans point fixe. Un cas particulier est celui d'un groupe de Coxeter fini agissant sur le complexifié de sa représentation géométrique.

Définition 3.2. *Sous les hypothèses précédentes on appelle groupe de tresses de W le groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{M}/W)$.*

Notons que le groupe fondamental est indépendant du point de base car $\mathcal{M}$, donc aussi $\mathcal{M}/W$, est un espace topologique connexe puisqu'un hyperplan est de codimension réelle 2 dans V. On peut démontrer que pour un groupe de Coxeter fini W, le groupe de tresses de W est isomorphe au groupe d'Artin-Tits $B(W)$. On a donc une définition algébrique et une définition topologique de ce groupe.

3.3. Les tresses à n brins. Nous nous intéressons au cas particulier de la construction précédente où on prend pour W le groupe symétrique S_n agissant sur $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées, c'est-à-dire que $\sigma \in S_n$ opère par $\sigma : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Les réflexions de S_n dans cette représentation sont les transpositions. l'hyperplan de la réflexion (i, j) est l'hyperplan d'équation $x_i = x_j$. Le groupe S_n agit sur le complémentaire $\mathcal{M}$ des hyperplans c'est-à-dire sur les n-uplets ayant toutes leurs coordonnées différentes. Le quotient $\mathcal{M}/S_n$ est l'ensemble des parties à n éléments de $\mathbb{C}$. On le munit de la topologie quotient et on considère son groupe fondamental. Un lacet d'origine $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans $\mathcal{M}/S_n$ se relève par continuité en un chemin dans $\mathcal{M}$ d'origine $(x_1, \ldots, x_n)$ et d'extrémité $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ pour une certaine permutation σ. Un tel chemin est une application qui associe à $t \in [0,1]$ n points distincts de $\mathbb{C}$, qu'on peut voir aussi comme n applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que les images de $t \in [0,1]$ soient deux à deux distinctes. Si on représente ces applications par leur graphe on obtient la représentation habituelle des tresses.

Le groupe fondamental de $\mathcal{M}/S_n$ est donné par les lacets d'origine fixée à homotopie près. De la même façon qu'on a pu relever un lacet on peut relever une homotopie en homotopie de $\mathbb{C}^n$, et identifier un élément de $\Pi_1(\mathcal{M}/S_n)$ aux classes modulo homotopie des ensembles de n chemins comme ci-dessus. Nous admettrons le théorème suivant (prouvé par Artin en 1925).

Théorème 3.3. *Le groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{M}/S_n)$ est isomorphe au groupe d'Artin-Tits $B(S_n)$.*

3.4. **Invariants des entrelacs.** Dans ce chapitre nous considérons le groupe des tresses à n brins B_n dont les générateurs sont notés $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}$. Leurs images dans S_n sont notées $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Un entrelacs orienté est un plongement de l'union disjointe de n cercles dans $\mathbb{R}^3$, à isotopie près, c'est-à-dire, à isotopie près (déformation continue de $\mathbb{R}^3$), une famille de n applications continues $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ telle que $f_i(0) = f_i(1)$ et que $f_i(t) \neq f_j(t')$ pour tous $(i,j,t,t') \in \{1,\ldots,n\}^2 \times [0,1[^2 - \{(i,i,t,t)\}$. Nous ne considérerons que des entrelacs "PL", c'est-à-dire isotopes à des entrelacs dont l'image est linéaire par morceaux. À partir d'une tresse de B_n, on obtient un entrelacs en "fermant la tresse". Nous admettrons les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 3.4. *Tout entrelacs orienté est la fermeture d'une tresse de B_n pour un certain n.*

Ce théorème a été prouvé par Alexander en 1923. La question est alors de savoir si deux tresses différentes peuvent donner le même entrelacs orienté. La réponse est donnée par le théorème suivant dû à Markov (1935) :

Théorème 3.5. *Les fermetures de deux tresses sont des entrelacs orientés isotopes si et seulement si on passe d'une tresse à l'autre par une suite de transformations élémentaires du type $ab \leftrightarrow ba$, avec a et b dans B_n ou $a \leftrightarrow a\mathbf{s}_n^{\pm 1}$ avec $a \in B_n$.*

Pour obtenir des invariants des entrelacs orientés on est donc amené à chercher une suite de fonctions τ_n sur B_n telles que $\tau_n(ab) = \tau_n(ba)$ pour tous a et b dans B_n et $\tau_{n+1}(a\mathbf{s}_n^{\pm 1}) = \tau_n(a)$ pour tout $a \in B_n$. Nous allons chercher de telles fonctions sur l'algèbre de Hecke, ce qui en fournira sur les tresses par composition. Notons H_n l'algèbre de Hecke du groupe symétrique S_n avec paramètre q sur un corps $k(q',q'')$ où q' et q'' sont des variables. Nous allons modifier la base pour que les générateurs aient q' et q'' comme valeurs propres. Si T_s a comme valeurs propres q et -1 alors $-q''T_s$ a comme valeurs propres $-q''q$ et q''. Donc si $q = -q'/q''$ on obtient les valeurs propres voulues. On pose $\tilde{T}_{s_i} = -q''T_{s_i}$. Les $\tilde{T}_{s_i}$ vérifient les mêmes relations de tresses que les T_{s_i}. Si on note $S = q' + q''$ et $P = q'q''$ on a $\tilde{T}_{s_i}^2 = S\tilde{T}_{s_i} - P$. Multiplier chaque T_{s_i} par $-q''$ revient aussi à multiplier chaque T_w par $(-q'')^{l(w)}$. Nous poserons $\tilde{T}_w = (-q'')^{l(w)}T_w$. On considère le morphisme d'algèbres de l'algèbre du groupe de tresses B_n dans H_n qui envoie $\mathbf{s}_i$ sur $\tilde{T}_{s_i}$. Il s'agit alors de trouver une trace τ_n sur H_n pour chaque n de façon que $\tau_{n+1}(h\tilde{T}_{s_n}^{\pm 1}) = \tau_n(h)$ pour tout $h \in H_n$. Une telle collection de traces sera appelée une trace de Markov.

Théorème 3.6. *Il existe une unique trace de Markov sur $\coprod_n H_n$ telle que $\tau_1(1) = 1$. Les valeurs $\tau_n(\tilde{T}_w)$ sont des polynômes de Laurent en S et P.*

Démonstration. Commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 3.7. *L'application linéaire $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \to H_{n+1}$ qui envoie $a+b\otimes c$ sur $a + b\tilde{T}_{s_n}c$ est bien définie et bijective.*

Preuve du lemme. L'application est bien définie car H_{n-1} commute avec $\tilde{T}_{s_n}$. Tout élément $w \in S_{n+1}$ peut s'écrire bxc avec b et c dans S_n et où x vérifie $l(xs) = l(sx) = l(x) + 1$ pour tout $s \in \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. On obtient un tel x en prenant un élément de longueur minimale dans la double classe $S_n w S_n$ (exercice : démontrer en général que si W_I et W_J sont deux sous-groupes paraboliques d'un groupe de Coxeter il existe un unique élément de longueur minimum dans chaque double-classe $W_I w W_J$ et que w peut s'écrire bxc avec $l(w) = l(b) + l(x) + l(c)$, $b \in W_I$ et $c \in W_J$). Ou bien $x = 1$ ou bien toute écriture réduite de x doit commencer par s_n. Le terme suivant dans l'écriture réduite, s'il existe, est nécessairement s_{n-1}, le terme suivant s'il existe est nécessairement s_{n-2}, ... Le même raisonnement peut être fait sur la fin de l'écriture réduite de x, ce qui prouve que $x = s_n$. Ceci montre que tout élément de base $\tilde{T}_w$ est ou bien dans H_n ou bien de la forme $\tilde{T}_b\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_c$. On a donc prouvé la surjectivité de l'application.

Montrons maintenant que les dimensions sont égales. La dimension de $H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ est $n!n!/(n-1)! = n.n!$. La dimension du membre de gauche est donc $n!+n.n! = (n+1)!$, ce qui est bien égal à la dimension de H_{n+1}. □

Nous prouvons maintenant l'existence et l'unicité des τ_n par récurrence sur n. On doit avoir (1) $\tau_{n+1}(b\tilde{T}_{s_n}c) = \tau_n(bc)$ si b et c sont dans H_n. On doit avoir aussi $\tau_{n+1}(a\tilde{T}_{s_n}) = \tau_n(a)$ pour tout $a \in H_n$, ce qui est une conséquence de la formule précédente, et $\tau_{n+1}(a\tilde{T}_{s_n}^{-1}) = \tau_n(a)$ ce qui s'écrit $\tau_{n+1}(a\frac{S-\tilde{T}_{s_n}}{P}) = \tau_n(a)$. Par l'égalité (1) ceci est équivalent à $\tau_{n+1}(a) = \frac{P+1}{S}\tau_n(a)$. On a donc nécessairement $\tau_{n+1}(a + b\tilde{T}_{s_n}c) = \frac{P+1}{S}\tau_n(a) + \tau_n(bc)$ pour tous $a, b, c \in H_n$. Connaissant par récurrence l'unicité de τ_n, ceci montre l'unicité de τ_{n+1}. Réciproquement la formule ci-dessus a un sens car bc est bien défini, indépendant de l'écriture de l'élément sous la forme $b\tilde{T}_{s_n}c$. D'autre part on a bien $\tau_{n+1}(h\tilde{T}_{s_n}^{\pm 1}) = \tau_n(h)$ pour tout $h \in H_n$. Il reste à voir que $\tau_{n+1}(hh') = \tau_{n+1}(h'h)$ pour tout h et tout h' dans H_{n+1}. C'est immédiat si h et h' sont dansH_n. C'est un calcul facile si l'un des deux est dans H_n. Il reste à voir le cas $h = a\tilde{T}_{s_n}b$ et $h' = a'\tilde{T}_{s_n}b'$ avec $a, b, a', b' \in H_n$. On doit voir $\tau_{n+1}(a\tilde{T}_{s_n}ba'\tilde{T}_{s_n}b') = \tau_{n+1}(a'\tilde{T}_{s_n}b'a\tilde{T}_{s_n}b)$. Par les cas précédents, cela revient à $\tau_{n+1}(\tilde{T}_{s_n}ba'\tilde{T}_{s_n}b'a) = \tau_{n+1}(ba'\tilde{T}_{s_n}b'a\tilde{T}_{s_n})$, donc on est ramené à prouver $\tau_{n+1}(\tilde{T}_{s_n}b\tilde{T}_{s_n}a) = \tau_{n+1}(b\tilde{T}_{s_n}a\tilde{T}_{s_n})$ avec a et b dans H_n. On applique le lemme 3.7 à H_n pour décomposer a et b. Donc on est ramené à $a \in H_{n-1}$ ou bien $a = x\tilde{T}_{s_{n-1}}y$ avec $x, y \in H_{n-1}$ et de même pour b. Il y a donc 4 cas à étudier.

1er cas : si a et b sont dans H_{n-1} alors ils commutent à $\tilde{T}_{s_n}$ et le résultat est clair.

2ième cas : si $a = x\tilde{T}_{s_{n-1}}y$ et $b \in H_{n-1}$. Alors $\tilde{T}_{s_n}b\tilde{T}_{s_n}a = \tilde{T}^2_{s_n}bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y = (S\tilde{T}_{s_n} - P)bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y$. Donc

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(\tilde{T}_{s_n}b\tilde{T}_{s_n}a) &= S\tau_{n+1}(\tilde{T}_{s_n}bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y) - P\tau_{n+1}(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y)\\
&= S\tau_n(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y) - \frac{P(P+1)}{S}\tau_n(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y)\\
&= S\tau_n(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y) - \frac{P(P+1)}{S}\tau_{n-1}(bxy)\\
&= S\tau_n(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}y) - P\tau_n(bxy) = \tau_n(bx(S\tilde{T}_{s_{n-1}} - P)y)\\
&= \tau_n(bx\tilde{T}^2_{s_{n-1}}y) = \tau_{n+1}(bx\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}y)\\
&= \tau_{n+1}(bx\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}y) = \tau_{n+1}(b\tilde{T}_{s_n}x\tilde{T}_{s_{n-1}}y\tilde{T}_{s_n})\\
&= \tau_{n+1}(b\tilde{T}_{s_n}a\tilde{T}_{s_n}).
\end{aligned}$$

Le cas $b = x\tilde{T}_{s_{n-1}}y$ et $a \in H_{n-1}$ est analogue.
4ième cas : si $a = x\tilde{T}_{s_{n-1}}y$ et $b = z\tilde{T}_{s_{n-1}}u$ avec $x, y, z, u \in H_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(\tilde{T}_{s_n}x\tilde{T}_{s_{n-1}}y\tilde{T}_{s_n}z\tilde{T}_{s_{n-1}}u) &= \tau_{n+1}(x\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u)\\
&= \tau_{n+1}(x\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u)\\
&= \tau_n(x\tilde{T}^2_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u)\\
&= S\tau_n(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u) - P\tau_n(xyz\tilde{T}_{s_{n-1}}u)\\
&= S\tau_n(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u) - P\tau_{n-1}(xyzu)\\
&= S\tau_n(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}u) - P\tau_n(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yzu)\\
&= \tau_n(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}^2_{s_{n-1}}u)\\
&= \tau_{n+1}(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}u)\\
&= \tau_{n+1}(x\tilde{T}_{s_{n-1}}yz\tilde{T}_{s_n}\tilde{T}_{s_{n-1}}\tilde{T}_{s_n}u)\\
&= \tau_{n+1}(x\tilde{T}_{s_{n-1}}y\tilde{T}_{s_n}z\tilde{T}_{s_{n-1}}u\tilde{T}_{s_n}).
\end{aligned}$$

□

On obtient donc un invariant des entrelacs orientés pour toute spécialisation de q' et q'' telles que S et P soient inversibles. Le polynôme appelé “HOMFLY” dans la littérature est obtenu avec $S = tx$ et $P = -t^2$. C'est un polynôme de Laurent en deux variables t et x. Le polynôme d'Alexander (1923) est un polynôme de Laurent en une variable $t^{1/2}$ obtenu pour $q' = t^{1/2}$ et $q'' = -t^{-1/2}$. Le polynôme de Jones (1984) est obtenu pour $q' = t^{3/2}$ et $q'' = -t^{1/2}$.

Remarque 3.8. L'invariant obtenu ne change pas si on change l'orientation de l'entrelacs en son opposée (par contre il peut changer si on change l'orientation de certaines composantes de l'entrelacs seulement). En effet changer l'orientation d'un entrelacs revient pour les tresses à retourner les mots, c'est-à-dire que les fermetures des tresses $\mathbf{s}_{i_1}\ldots\mathbf{s}_{i_k}$ et $\mathbf{s}_{i_k}\ldots\mathbf{s}_{i_1}$ sont des entrelacs dont les composantes sont identiques et les orientations opposées. Le retournement des mots est un antiautomorphisme de B_n et aussi de l'algèbre de Hecke H_n. L'unicité de la trace de Markov montre que τ_n composé avec cet antiautomorphisme redonne τ_n.

Exemple 3.9. Calculons $\tau_2(T_1^3)$. On a $T_1^3 = T_1(ST_1 - P) = (S^2 - P)T_1 - PS$. Donc $\tau_2(T_1^3) = (S^2 - P)\tau_1(1) - PS\tau_2(1) = S^2 - P - PS\frac{P+1}{S}\tau_1(1) = S^2 - 2P - P^2$. La fermeture de la tresse $\mathbf{s}_1^3$ est le nœud de trèfle. On a ainsi obtenu le polynôme HOMFLY de ce nœud qui vaut donc $t^2x^2 + 2t^2 - t^4$.

Notons h l'invariant des entrelacs obtenu à partir de la trace de Markov. Il vérifie une relation dite "d'écheveau" (en anglais "skein relation") : Si L_+ est un entrelacs ayant un certain croisement positif et L_- l'entrelacs obtenu à partir de L_+ en inversant le sens de ce croisement, notons L_0 l'entrelacs obtenu en supprimant ce croisement ; alors

Proposition 3.10. *On a $h(L_+) + Ph(L_-) = Sh(L_0)$, ou avec les notations HOMFLY $t^{-1}h(L_+) - th(L_-) = xh(L_0)$.*

Démonstration. Les entrelacs L_+, L_- et L_0 sont les fermetures de tresses de B_n respectivement de la forme $a\mathbf{s}_ib$, $a\mathbf{s}_i^{-1}b$ et ab. On a $\tau_n(a\mathbf{s}_i^{-1}b) = -\frac{1}{P}\tau_n(a\mathbf{s}_ib) + \frac{S}{P}\tau_n(ab)$, d'où le résultat. □

Cette relation permet de calculer facilement l'invariant d'un entrelacs. La relation d'écheveau pour le polynôme d'Alexander Δ s'écrit $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0)$ et pour le polynôme de Jones V elle s'écrit $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$.

4. Le polynôme de Jones et l'algèbre de Temperley-Lieb

Nous allons nous intéresser plus en détail au polynôme de Jones. Nous considérons l'algèbre de Hecke H_n du groupe symétrique S_n, sur un corps $k(q',q'')$ où q' et q'' sont ou bien des indéterminées ou bien des spécialisations telles que $S = q' + q''$ et $P = q'q''$ soient non nuls. L'algèbre H_n est engendrée par les éléments T_{s_i}, avec $i = 1, \dots, n-1$, vérifiant $(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0$, où $q' = -qq''$. L'algèbre H_n a une base $(T_w)_{w\in S_n}$ et on pose $\tilde{T}_w = (-q'')^{l(w)} T_w$. Le polynôme HOMFLY est un polynôme de Laurent en S et P donné sur la fermeture d'une tresse $b \in B_n$ par la valeur de la trace τ_n sur l'image de b dans l'algèbre de Hecke H_n, l'image de la tresse élémentaire $\mathbf{s}_i$ étant $\tilde{T}_{s_i}$.

Lemme 4.1. *Notons s et t les deux générateurs de Coxeter de S_3 et T_s et T_t les générateurs correspondants de H_3. Posons $e = 1 + T_s + T_t + T_{st} + T_{ts} + T_{tst}$; alors $\tau_3(e) = 0$ si et seulement si $q'' = \pm 1$ ou $q' = -q''^3$.*

Démonstration. Par définition on a

$$e = 1 - (1/q'')(\tilde{T}_s + \tilde{T}_t) + (1/q'')^2(\tilde{T}_{st} + \tilde{T}_{ts}) - (1/q'')^3 \tilde{T}_{tst},$$

donc

$$\begin{aligned}
\tau_3(e) &= (\frac{P+1}{S})^2 - \frac{2}{q''}\frac{P+1}{S} + \frac{2}{q''^2} - \frac{1}{q''^3}\tau_2(\tilde{T}_s^2) \\
&= (\frac{P+1}{S})^2 - \frac{2}{q''}\frac{P+1}{S} + \frac{2}{q''^2} - \frac{1}{q''^3}\tau_2(S\tilde{T}_s - P) \\
&= (\frac{P+1}{S})^2 - \frac{2}{q''}\frac{P+1}{S} + \frac{2}{q''^2} - \frac{1}{q''^3}(S - \frac{P+1}{S}P) \\
&= \frac{(P+1)^2 q''^3 - 2(P+1)Sq''^2 + 2q''S^2 - S^3 + P(P+1)S}{q''^3 S^2}.
\end{aligned}$$

Le numérateur de cette expression vaut $q'^2(q''^2 - 1)(q' + q''^3)$, d'où le résultat. □

On voit donc que, à un changement de variable près, le seul cas où τ_3 est nul sur e et où q'' est une indéterminée est le polynôme de Jones. Dans la suite nous reprenons les notations du polynôme de Jones, c'est-à-dire que nous considérons une indéterminée q sur un corps k et posons $q'' = -q^{1/2}$ et $q' = q^{3/2}$ (q est appelé t dans la littérature).

Notons pour référence future que, avec les notations du lemme précédent, pour tout $w \in S_3$ on a $T_w e = q^{l(w)} e$ (prouvez-le !).

Proposition 4.2. (i) *Pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, si $e_i = 1 + T_{s_i} + T_{s_{i+1}} + T_{s_i s_{i+1}} + T_{s_{i+1} s_i} + T_{s_i s_{i+1} s_i}$, on a $\tau_n(e_i) = 0$.*

(ii) *La trace τ_n s'annule sur l'idéal bilatère de H_n engendré par $e = e_1$.*

Démonstration. Prouvons (i). Dans le groupe B_4 où les générateurs sont notés $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}$, la conjugaison par **stsuts** échange **s** et **u** et fixe **t** (faites le calcul). Donc dans H_4, avec les mêmes notations pour les générateurs, la conjugaison par T_{stsut} échange T_s et T_u et fixe T_t. En considérant les diverses sous-algèbres paraboliques de H_n isomorphes à H_4 on voit que dans H_n les e_i sont tous conjugués à $e = e_1$. Donc $\tau_n(e_i) = \tau_n(e) = 0$, cette dernière égalité par le lemme 4.1.

Prouvons (ii). En utilisant que τ_n est une trace, on est ramené à voir que $\tau_n(\tilde{T}_w e) = 0$ pour tout $w \in S_n$. Nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Un élément w de S_n a une écriture réduite qui comporte au plus un fois s_{n-1}.*

Preuve du lemme. Faisons une récurrence sur n. Si $w \in S_n$ a une écriture réduite comportant au moins deux occurences de s_{n-1} on peut l'écrire $w = w_1 s_{n-1} w' s_{n-1} w''$ où $l(w) = l(w_1) + l(w') + l(w'') + 2$ et où $w' \in S_{n-1}$. Par récurrence w' a une décomposition réduite comportant exactement une fois s_{n-2} (sinon les longueurs ne s'ajouteraient pas). Par commutation on peut supposer que $w' = s_{n-2}$ et par relation de tresses on peut remplacer $s_{n-1}s_{n-2}s_{n-1}$ par $s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}$. On a donc une écriture réduite avec une occurence de moins de s_{n-1}. On termine par récurrence sur le nombre d'occurences de s_{n-1} dans une écriture réduite de w. $\square$

Prouvons alors par récurrence sur $k \leq n$ que si $w \in S_k$ on a $\tau_n(\tilde{T}_w e) = 0$. Si $k = 1$ on a $w = 1$ et le résultat est vrai. En général, par le lemme précédent on a ou bien $w \in S_{n-1}$ et on a fini par récurrence, ou bien $w = w_1 s_{n-1} w_2$ avec w_1 et w_2 dans S_{n-1}. Dans ce cas, en utilisant que τ_n est une trace et la propriété de Markov, on obtient $\tau_n(\tilde{T}_w e) = \tau_{n-1}(\tilde{T}_{w_2}\tilde{T}_{w_1} e)$; on exprime $\tilde{T}_{w_2}\tilde{T}_{w_1}$ comme combinaison linéaire des $\tilde{T}_v$ avec $v \in S_{n-1}$, ce qui donne le résultat par récurrence. $\square$

On voit donc que τ_n se factorise par l'algèbre quotient $H_n/(H_n e H_n)$. Nous allons étudier ce quotient.

Définition 4.4. *Pour $n \geq 3$, on appelle algèbre de Temperley-Lieb le quotient $\mathrm{TL}_n = H_n/(H_n e H_n)$. Pour $n \leq 2$ on convient que l'algèbre de Temperley-Lieb est l'algèbre de Hecke elle-même.*

Notons f_i l'image dans TL_n de $\frac{T_{s_i}+1}{q+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Les f_i engendrent TL_n. Un calcul facile (faites-le) montre que $f_i^2 = f_i$, $f_i f_j = f_j f_i$, si $|i-j| \geq 2$. D'autre part pour $i = 1, \ldots, n-2$, l'élément $(q+1)^3 f_i f_{i+1} f_i$ est l'image dans TL_n de

$$\begin{aligned}(1+T_{s_i})(1+T_{s_{i+1}})(1+T_{s_i}) &= 1 + 2T_{s_i} + T_{s_{i+1}} + T_{s_i s_{i+1}} + T_{s_{i+1} s_i} + T_{s_i}^2 + T_{s_i s_{i+1} s_i} \\ &= e_i + q(T_{s_i}+1),\end{aligned}$$

où e_i est comme dans 4.2. Or comme les e_i sont tous conjugués à e, on obtient $f_i f_{i+1} f_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} f_i$. Un calcul analogue donne $f_i f_{i-1} f_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} f_i$ pour $i = 2, \ldots, n-1$. En fait on a

Théorème 4.5. *L'algèbre TL_n admet une présentation avec comme générateurs $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ et comme relations*

$$\begin{cases} f_i^2 = f_i & \textit{pour } i = 1, \ldots, n-1 \\ f_i f_{i+1} f_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} f_i & \textit{pour } i = 1, \ldots, n-2 \\ f_i f_{i-1} f_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} f_i & \textit{pour } i = 2, \ldots, n-1 \\ f_i f_j = f_j f_i & \textit{si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

Démonstration. Ces relations sont vraies dans TL_n, donc si une algèbre A admet une telle présentation : elle est engendrée par des éléments $g_1, \ldots, g_{n-1}$ qui vérifient les relations

$$\begin{cases} g_i^2 = g_i & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \\ g_i g_{i+1} g_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} g_i & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2 \\ g_i g_{i-1} g_i = \frac{1}{2+q+q^{-1}} g_i & \text{pour } i = 2, \ldots, n-1 \\ g_i g_j = g_j g_i & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

alors TL_n est un quotient de A, obtenu en envoyant g_i sur f_i. Réciproquement, si l'on pose $h_i = (q+1)g_i - 1 \in A$, alors les h_i vérifient les relations de tresse : en effet h_i et h_j commutent si $|i-j| \geq 2$ et $h_i h_{i+1} h_i = (q+1)^3 g_i g_{i+1} g_i - (q+1)^2 (g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i^2) + (q+1)(2g_i + g_{i+1}) - 1 = (q+1)(g_i + g_{i+1}) - (q+1)^2 (g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i) - 1$. Comme les relations sont symétriques en g_i et g_{i+1} on obtient le même résultat si on échange i et $i+1$. D'autre part $h_i^2 = (q-1)h_i + q$ (faites le calcul). On a donc un morphisme d'algèbre surjectif de H_n dans A qui envoie T_{s_i} sur h_i. D'autre part e est dans le noyau car le calcul précédent a montré que $h_i h_{i+1} h_i = (h_i + h_{i+1} + 2) - ((h_i+1)(h_{i+1}+1) + (h_{i+1}+1)(h_i+1)) - 1 = -h_i h_{i+1} - h_{i+1} h_i - h_i - h_{i+1} - 1$. Donc on a un morphisme surjectif de TL_n dans A qui envoie f_i sur g_i, donc est l'inverse du précédent. □

Notre prochain objectif est de calculer la dimension de TL_n. Notons t_w l'image de T_w par la surjection $H_n \to \mathrm{TL}_n$. Comme pour tout i, l'image de $e_i = 1 + T_{s_i} + T_{s_{i+1}} + T_{s_i s_{i+1}} + T_{s_{i+1} s_i} + T_{s_i s_{i+1} s_i}$ est nulle, on a $t_{s_i s_{i+1} s_i} = -(1 + t_{s_i} + t_{s_{i+1}} + t_{s_i s_{i+1}} + t_{s_{i+1} s_i})$. Donc si un élément $t_w \in \mathrm{TL}_n$ où $w \in S_n$ a une écriture réduite contenant une sous-expression de la forme $s_i s_{i+1} s_i$ on peut l'écrire comme combinaison linéaire d'éléments strictement plus courts.

Définition 4.6. *On dit qu'un élément w d'un groupe de Coxeter W est pleinement commutatif si toutes les écritures réduites de w s'obtiennent à partir de l'une d'elles uniquement par des relations de commutation. L'ensemble des éléments pleinement commutatifs est noté W_c.*

Dans la suite nous noterons W_c l'ensemble des éléments pleinements commutatifs de $W = S_n$. D'après ce qui précède on a

Lemme 4.7. *L'algèbre TL_n est linéairement engendrée par $\{t_w \mid w \in W_c\}$.*

D'autre part, puisque les T_{s_i} engendrent H_n, les f_i qui sont les images des $\frac{T_{s_i}+1}{q+1}$ engendrent TL_n. Donc tout élément de TL_n est un polynôme en les f_i. À cause des relations vérifiées par les f_i, tout élément de TL_n est combinaison de monômes en les f_i où n'apparaissent ni f_i^2 ni $f_i f_{i\pm1} f_i$ (exercice : écrire la preuve détaillée de cette assertion). Un tel monôme est de la forme $f_{i_1} \ldots f_{i_k}$ où $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ est une décomposition réduite d'un élément de W_c. On a

Lemme 4.8. *Si $w \in W_c$, et si $s_{i_1} \ldots s_{i_k}$ est une décomposition réduite de w, l'élément $f_{i_1} \ldots f_{i_k}$ ne dépend que de w et pas de la décomposition réduite.*

Démonstration. Exercice □

On note f_w l'élément ainsi défini pour $w \in W_c$. Ce qui précède prouve que

Lemme 4.9. *L'algèbre TL_n est linéairement engendrée par $\{f_w \mid w \in W_c\}$.*

Notre but maintenant est de montrer que les deux lemmes 4.7 et 4.9 fournissent en fait des bases de TL_n. Nous commençons par majorer le cardinal de $|W_c|$

Lemme 4.10. *Tout élément de W_c a une décomposition réduite de la forme*

$$s_{i_1} s_{i_1-1} \ldots s_{j_1} s_{i_2} s_{i_2-1} \ldots s_{j_2} \ldots s_{i_p} s_{i_p-1} \ldots s_{j_p}, \tag{4.11}$$

où $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n-1$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n-1$ et $i_k \geq j_k$ pour tout $k = 1, \ldots, p$.

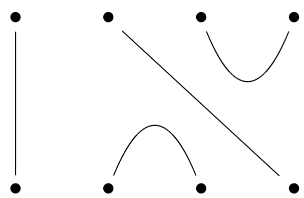
Démonstration. Faisons une récurrence sur la longueur de l'élément $w \in W_c$. Soit l le plus grand indice tel que s_l intervient dans une décomposition réduite de w. Si $l = 1$ on a fini. En général : on sait (voir 4.3) qu'il existe une décomposition réduite de w ne faisant intervenir qu'une seule fois s_l. Comme $w \in W_c$, toutes les décompositions réduites de w ne font intervenir s_l qu'une seule fois. Considérons une décomposition réduite de w telle que s_l soit le plus à droite possible, c'est-à-dire $w = xs_ly$ avec $l(w) = l(x) + 1 + l(y)$ et y de longueur minimale. Donc toute décomposition réduite de s_ly commence par s_l, c'est-à-dire que s_ly est de longueur minimale dans sa classe à droite modulo le sous-groupe engendré par $\{s_1, \ldots, s_{l-1}\}$. Comme on l'a vu dans la preuve de 3.7, on a nécessairement $s_ly = s_ls_{l-1}s_{l-2} \ldots s_h$ pour un certain $h \leq l$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à x qui s'écrit donc $x = s_{i_1}s_{i_1-1} \ldots s_{j_1}s_{i_2}s_{i_2-1} \ldots s_{j_2} \ldots s_{i_{p-1}} \ldots s_{j_{p-1}}$, pour un certain p. Posons $i_p = l$ et $j_p = h$. On obtient une écriture de w comme dans 4.11. On a bien $i_p \geq j_p$; on a $i_{p-1} < i_p$ par définition de i_p et on a toutes les autres inégalités par récurrence sauf $j_{p-1} < j_p$ qui reste à démontrer. Si $j_{p-1} \geq j_p$, alors $j_{p-1} \in [j_p, i_p - 1]$ et par des relations de commutation on peut faire apparaître $s_{j_{p-1}}s_{j_{p-1}+1}s_{j_{p-1}}$ dans une décomposition réduite de w ce qui est contraire à l'hypothèse $w \in W_c$. □

Proposition 4.12. *Le cardinal des suites de couples* $(i_1, j_1), \ldots, (i_p, j_p)$ *comme dans 4.11 est le n-ième nombre de Catalan* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

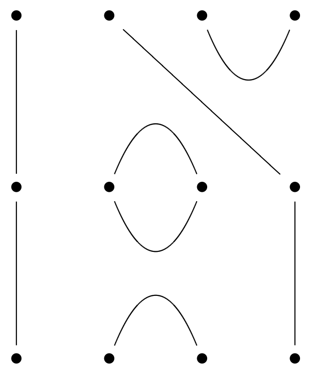
Nous renvoyons à la littérature pour ce résultat. Voici des indications pour une méthode possible : on constate que ces suites sont en bijection avec les "escaliers" qui restent sous la diagonale dans le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$, c'est-à-dire les chemins connexes d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité (n, n), formés d'une suite de segments de la forme $[(h, k), (h + 1, k)]$ ou $[(h, k), (h, k + 1)]$, avec $h \geq k$. Le nombre total d'escaliers inclus dans le carré est $\binom{2n}{n}$. Pour compter le nombre d'escaliers qui ne restent pas sous la diagonale, on considère la parallèle D à la diagonale passant par le point $(0, 1)$ et on associe à un tel escalier le chemin obtenu en remplaçant la partie du chemin comprise entre le dernier point qui se trouve sur D et (n, n) par son symétrique par rapport à D. On obtient ainsi une bijection avec les escaliers dans le rectangle $0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq n+1$ dont le nombre est $\binom{2n}{n-1}$. Le nombre cherché est donc $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Remarque 4.13. On peut aussi calculer les nombres de Catalan par une série génératrice en démontrant que $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} C_kC_{n-k}$ d'où une série génératrice $\sum_n C_nX^{\,n+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4X})$.

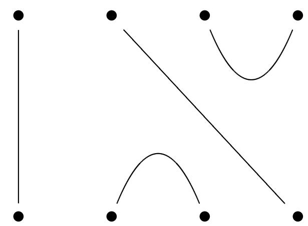
Nous allons maintenant considérer une algèbre de diagrammes dont nous verrons qu'elle est isomorphe à TL_n. On considère une bande limitée par deux droites parallèles du plan et n points distincts fixés sur chacune des droites. Un diagramme est un ensemble de n chemins disjoints dans la bande dont les extrémités sont les points fixés, à homotopie près fixant les bords de la bande. Voici un exemple avec 8 points.



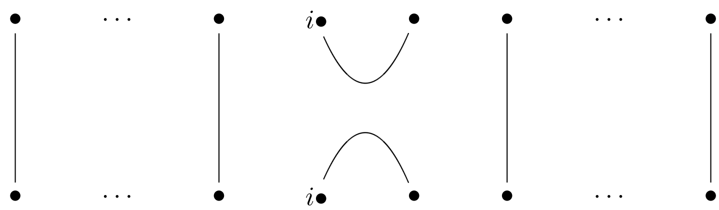
On construit une $k(q)$ algèbre T_n de la façon suivante : elle a pour base l'ensemble des diagrammes. Pour multiplier deux diagrammes on met les deux bandes l'une en dessous de l'autre, on divise par 2 la largeur de la bande obtenue et on remplace chaque courbe fermée par la constante $(2+q+q^{-1})^{1/2}$. Par exemple on a l'égalité suivante :



$= (2+q+q^{-1})^{1/2}$



Pour $i = 1, \ldots, n-1$ notons c_i le diagramme



On a $c_i^2 = (2+q+q^{-1})^{1/2} c_i$ et $c_i c_{i\pm1} c_i = c_i$. On en déduit qu'il existe un morphisme d'algèbres $\mathrm{TL}_n \to T_n$ qui envoie f_i sur $(2+q+q^{-1})^{-1/2} c_i$.

Proposition 4.14. *L'algèbre T_n est engendrée par $c_1, \ldots, c_{n-1}$.*

Démonstration. Nous donnons un aperçu d'une preuve qui serait assez délicate à rédiger complètement. Remarquons d'abord que dans un diagramme, si un chemin joint deux points i et j tous deux sur la droite du haut ou du bas alors $j-i$ est impair et que si un chemin joint le point i sur la droite du haut au point j sur la droite du bas, alors $i-j$ est pair. On en déduit qu'on peut par déformation remplacer chaque chemin par une suite de segments verticaux et de demi-cercles centrés sur des parallèles aux bords de la bande. Chaque demi-cercle orienté vers le bas est alors couplé à un demi-cercle orienté vers le haut. On peut isoler ces demi-cercles dans des bandes plus petites et chacun est alors un élément c_i. □

On peut alors prouver

Théorème 4.15. (i) *Le morphisme $\mathrm{TL}_n \to T_n$ qui envoie f_i sur $(2+q+q^{-1})^{-1/2} c_i$ est un isomorphisme d'algèbres.*

(ii) *La dimension de TL_n est C_n.*

(iii) *Les ensembles $\{t_w \mid w \in W_c\}$ et $\{f_w \mid w \in W_c\}$ sont des bases de TL_n.*

Démonstration. On sait déjà que les deux ensembles de (iii) engendrent linéairement TL_n et que le cardinal de chacun d'eux est C_n. La proposition précédente montre que le morphisme de (i) est surjectif. Nous allons montrer que T_n est de dimension C_n ce qui permet de conclure. Les diagrammes forment une base de T_n par définition. On peut décrire un diagramme de la façon suivante : ordonnons les points marqués, de gauche à droite sur le bord du haut de la bande puis de droite à gauche sur le bord du bas. Pour chaque chemin du diagramme, si A et B sont ses extrémités et si A est avant B dans l'ordre choisi, on étiquette A par $+$ et B par $-$. Alors les diagrammes sont en bijection avec les suites de $+$ et de $-$ telles que dans toute sous-suite initiale il y ait plus de $+$ que de $-$. Cette ensemble de suites est en bijection avec les escaliers de 4.12 de la façon suivante : le k-ième segment de l'escalier est horizontal si le k-ième signe est $+$ et vertical sinon. On en déduit le résultat. $\square$

5. Représentations des algèbres de Temperley-Lieb

Dans cette section comme précédemment q est une indéterminée sur un corps k et on considère l'algèbre de Hecke H_n de S_n avec paramètre q et l'algèbre de de Temperley-Lieb TL_n sur $k(q)$. Nous allons montrer que TL_n est semi-simple déployée quand le corps est de caractéristique 0 et décrire ses modules simples. Nous commençons par compléter la théorie des algèbres symétriques. On considère une algèbre H de dimension finie sur un corps K, munie d'une trace symétrisante τ.

Proposition 5.1. *Soient (b_i) et (b_i^*) deux bases duales de H. Alors l'élément $I = \sum_i b_i \otimes b_i^* \in H \otimes H^{op}$ vérifie $(h \otimes 1)I = (1 \otimes h)I$ et $I(h \otimes 1) = I(1 \otimes h)$ pour tout $h \in H$ et est indépendant des bases choisies.*

Démonstration. Soit τ la trace symétrisante. Soient x, x', y, y' des éléments quelconques de H. On a $(\tau\otimes\tau)((x\otimes x')I(y\otimes y')) = \sum_i \tau(xb_iy)\tau(y'b_i^*x') = \sum_i \tau(yxb_i)\tau(x'y'b_i^*)$ car τ est une trace. Notons $(h \mid b_i)$ le coefficient sur b_i d'un élément $h \in H$. On a $\tau(x'y'b_i^*) = (x'y' \mid b_i)$ puisque les bases sont duales. On obtient donc $(\tau \otimes \tau)((x \otimes x')I(y \otimes y')) = \sum_i \tau(yxb_i)(x'y' \mid b_i) = \tau(yx \sum_i(x'y' \mid b_i)b_i) = \tau(yxx'y')$.

On en déduit en prenant $x = h$ et $x' = 1$ puis $x = 1$ et $x' = h$ que $(\tau \otimes \tau)((h \otimes 1)I(y \otimes y')) = (\tau \otimes \tau)((1 \otimes h)I(y \otimes y'))$ pour tout y et tout y' ce qui donne, comme $\tau \otimes \tau$ est non dégénérée, l'égalité $(h \otimes 1)I = (1 \otimes h)I$. De même en remplaçant cette fois $y \otimes y'$ par $1 \otimes h$ et $h \otimes 1$ on obtient $I(h \otimes 1) = I(1 \otimes h)$.

On peut aussi remplacer y et y' par 1, ce qui donne $(\tau\otimes\tau)((x\otimes x')I) = \tau(x\otimes x')$, donc cette valeur est indépendante de la base pour tout x et tout x', ce qui donne la deuxième partie de l'énoncé par non dégénérescence de $\tau \otimes \tau$. □

Corollaire 5.2. *Si χ est un trace sur l'algèbre H et (b_i), (b_i^*) des bases duales, l'élément $\sum_i \chi(b_i^*)b_i$ est dans le centre de H et est indépendant des bases choisies.*

Démonstration. Cet élément est $(\mathrm{Id} \otimes\chi)(I)$, donc indépendant des bases. D'autre part $h \sum_i \chi(b_i^*)b_i = (\mathrm{Id} \otimes\chi)((h \otimes 1)I) = (\mathrm{Id} \otimes\chi)((1 \otimes h)I)$ par la proposition précédente , et comme χ est une trace c'est égal à $(\mathrm{Id} \otimes\chi)(I(1 \otimes h))$, donc par la proposition précédente, à nouveau, à $(\mathrm{Id} \otimes\chi)(I(h \otimes 1)) = \sum_i \chi(b_i^*)b_ih$. □

Si M et N sont deux H-modules, on peut faire agir $H \otimes H^{\mathrm{op}}$ sur $Hom_K(M, N)$, l'image de $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(M, N)$ par $h \otimes h' \in H \otimes H^{\mathrm{op}}$ étant l'homomorphisme de M dans N donné par $m \mapsto= h\varphi(h'm)$.

Corollaire 5.3. *Si M et N sont deux H-modules et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, N)$ alors $I(\varphi) \in \mathrm{Hom}_H(M, N)$.*

Démonstration. Il faut voir que pour tout $h \in H$ on a $I(\varphi) \circ h = h \circ I(\varphi)$ dans $Hom_K(M, N)$. Or $I(\varphi) \circ h = \sum_i b_i \circ \varphi \circ b_i^* \circ h = ((1 \otimes h)I)(\varphi) = ((h \otimes 1)I)(\varphi)$ par la proposition 5.1 et $((h \otimes 1)I)(\varphi) = \sum_i hb_i \circ \varphi \circ b_i^* = h \circ I(\varphi)$. □

Corollaire 5.4. *Si M et N sont deux H-modules simples non isomorphes et si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, N)$ alors $I(\varphi) = 0$.*

Démonstration. Comme $I(\varphi)$ commute avec H son noyau et son image sont des sous-modules de M et N respectivement. Or M et N sont simples, donc si $I(\varphi)$ n'est pas nul son noyau doit être réduit à 0 et son image doit être égale à N. C'est alors un isomorphisme, contrairement à l'hypothèse. □

Définition 5.5. *On définit une forme bilinéaire symétrique sur les traces sur H en posant $< \chi, \psi >= (\chi \otimes \psi)(I) = \sum_i \chi(b_i)\psi(b_i^*) = \sum_i \psi(b_i)\chi(b_i^*)$, si χ et ψ sont des traces sur H.*

Proposition 5.6. *Si χ et ψ sont les caractères de deux modules simples M et N de dimensions finies non isomorphes on a $< \chi, \psi >= 0$.*

Démonstration. Soient $(v_1, \dots, v_p)$ une base de M et $(v'_1, \dots, v'_r)$ une base de N. Pour $1 \le k \le p$ et $1 \le k' \le r$, soit $E_{k,k'}$ le morphisme élémentaire de M dans N qui envoie $v_{k'}$ sur v'_k et les autres éléments de base sur 0. D'après le corollaire précédent on a $I(E_{k,k'}) = 0$. Le coefficient d'indice (k, k') de la matrice de $I(E_{k,k'}) = 0$ est $0 = \sum_i (B_i)_{kk}(B_i^*)_{k'k'}$ où B_i est la matrice de l'action de b_i sur N et B_i^* celle de l'action de b_i^* sur M. Or on a $\psi(b_i) = \sum_{k'} (B_i)_{k'k'}$ et $\chi(b_i^*) = \sum_k (B_i^*)_{kk}$. On obtient donc bien $\sum_i \psi(b_i)\chi(b_i^*) = 0$. □

Corollaire 5.7. *Supposons K de caractéristique 0 et H semi-simple déployée. Alors si χ est le caractère d'un H-module simple M, il existe un scalaire non nul λ_χ tel que l'action de l'élément $e_\chi = \lambda_\chi \sum_i \chi(b_i^*)b_i$ sur tout H-module (de dimension finie) V, soit le projecteur sur la somme des sous-modules simples de V isomorphes à M. En particulier, la multiplication par e_χ dans H est le projecteur sur la composante simple de H correspondant à M.*

Démonstration. L'élément $f_\chi = \sum_i \chi(b_i^*)b_i$ est central donc son action sur un module simple de caractère ψ est dans le centre de l'algèbre de matrices correspondante (H est déployée), donc est un scalaire. Ce scalaire est un multiple de la trace de f_χ sur le module simple qui vaut $\psi(f_\chi) =< \chi, \psi >$, donc est nulle par 5.6. Donc f_χ agit par 0 sur les H-modules simples non isomorphes à M. D'autre part $\tau(f_\chi) = \sum_i \chi(b_i)\tau(b_i^*) = \sum_i \chi(b_i)(1 \mid b_i) = \chi(1)$, donc est non nul car K est de caractéristique 0. Donc f_χ est non nul et agit par un scalaire non nul sur la composante simple de H correspondant à M, donc par un scalaire non nul sur M ; si on note λ_χ^{-1} ce scalaire, on obtient le résultat. □

On peut voir (exercice) que les e_χ sont des idempotents centraux minimaux, c'est-à-dire que tout idempotent contenu dans le centre de H est somme de certains e_χ. De plus ils sont orthogonaux au sens que $e_\chi e_\psi = 0$ si χ et ψ sont les caractères de modules simples non isomorphes. On a $1 = \sum_\chi e_\chi$ où χ parcourt les caractères des H-modules simples.

Nous appliquons maintenant ces résultats à l'algèbre de Hecke H_n du groupe symétrique sur le corps $K = k(q)$.

Proposition 5.8. *L'algèbre H_n a exactement deux modules simples de dimension 1. Les caractères correspondant sont donnés respectivement par $T_w \mapsto q^{l(w)}$ et $T_w \mapsto (-1)^{l(w)}$.*

Démonstration. L'image de T_s doit être un élément du corps $k(q)$ qui vérifie le même polynôme que T_s, c'est-à-dire $(X - q)(X + 1) = 0$, donc les seules possibilités sont $T_s \mapsto q$ et $T_s \mapsto -1$. Comme tous les T_s sont conjugués dans H_n ils ont même image dans le corps $k(q)$, donc tous q ou tous -1, d'où le résultat. □

Exercice 5.9. Combien de modules simples de dimension 1 a l'algèbre de Hecke générique d'un groupe de Coxeter quelconque ?

Lemme 5.10. *Soit χ le caractère du H_n-module simple de dimension 1 donné par $T_w \mapsto q^{l(w)}$; alors $e_\chi = (\sum_w q^{l(w)})^{-1} \sum_{w \in S_n} T_w$.*

Démonstration. On applique la formule de définition de e_χ en utilisant les bases duales (T_w) et $(q^{-l(w)}T_{w^{-1}})$ et on utilise $\lambda_\chi = \chi(\sum_w T_w)^{-1} = (\sum_w q^{l(w)})^{-1}$ (la première égalité car il s'agit d'un module de dimension 1). □

Remarque 5.11. Si χ est le caractère d'un module de dimension 1, pour $w \in S_n$ on a $T_w e_\chi = \lambda_\chi \sum_i \chi(b_i^*)T_w b_i$. Prenons comme bases duales $T_w^{-1}b_i$ et $b_i^*T_w$, on a alors $T_w e_\chi = \lambda_\chi \sum_i \chi(b_i^* T_w)b_i = \chi(T_w)e_\chi$. On retrouve la remarque qui suit le lemme 4.1.

Supposons que k est un corps de caractéristique 0 tel que H_n soit déployée sur $k(q)$ (nous verrons plus tard que $k = \mathbb{Q}$ convient).

Théorème 5.12. *Pour $n \geq 3$ L'algèbre TL_n est semi-simple déployée sur $k(q)$. Elle est la somme des composantes simples de H_n correspondant aux H_n-modules simples dont le caractère s'annule sur e, où e est comme dans 4.1.*

Rappelons que pour $n = 1$ ou 2 l'algèbre TL_n est égale à H_n.

Démonstration. L'algèbre H_n est semi-simple déployée. Par le corollaire 5.7 on a $H_n = \oplus_\psi H_n e_\psi$, où ψ parcourt l'ensemble des caractères des H_n-modules simples. Soit $\mathcal{I} = H_n e H_n$ l'idéal bilatère engendré par e. Comme e_ψ est central, l'idéal $\mathcal{I}e_\psi$ est un idéal bilatère, contenu dans $H_n e_\psi$ qui est une algèbre simple donc sans autres idéaux bilatères que $\{0\}$ et toute l'algèbre. Donc $\mathcal{I}e_\psi$ est ou bien nul ou bien égal à $H_n e_\psi$. Plus précisément $\mathcal{I}e_\psi$ est nul si et seulement si $ee_\psi = 0$ et $\mathcal{I}e_\psi = H_n e_\psi$ sinon. Donc $\mathcal{I} = \oplus_{\{\psi | ee_\psi \neq 0\}} H_n e_\psi$ et $H/\mathcal{I} = \oplus_{\{\psi | ee_\psi = 0\}} He_\psi$. Nous utilisons maintenant la proposition suivante

Proposition 5.13. *Soit H une algèbre de dimension finie, munie d'une trace symétrisante, semi-simple déployée sur un corps K. Soit V un H-module de de dimension finie et soit χ le caractère de V. Alors pour tout caractère ψ d'un H-module simple V_ψ, on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) $< \chi, \psi >= 0$

(ii) $\chi(e_\psi) = 0$

(iii) $e_\psi V = 0$

(iv) *Il n'y a aucun sous-module isomorphe à V_ψ dans une décomposition de V en somme directe de modules simples.*

Démonstration. Soient (b_i) et (b_i^*) des bases duales de H. Par définition $< \chi, \psi >= \sum_i \chi(b_i^*)\psi(b_i) = \chi(\sum_i \psi(b_i^*)b_i) = \lambda_\psi^{-1}\chi(e_\psi)$, d'où l'équivalence de (i) et (ii). Comme e_ψ est un idempotent, sa trace sur V est nulle si et seulement si son action est nulle, d'où l'équivalence de (ii) et (iii). D'autre part par 5.7 l'action de e_ψ est la projection sur la somme des sous-modules de V isomorphes à V_ψ, d'où l'équivalence de (iii) et (iv). □

Corollaire 5.14. *Soit H et ψ comme dans la proposition précédente et soit e un idempotent de H ; on considère le H-module $V = He$. Les propriétés de la proposition sont aussi équivalentes à*

(i) $ee_\psi = 0$

(ii) $\psi(e) = 0$.

Démonstration. Comme e_ψ est un élément central, son action est nulle sur He si et seulement si $e_\psi e = 0$, d'où l'équivalence des propriétés de la proposition avec (i). De même e est un idempotent à un scalaire près donc sa trace est nulle sur V_ψ si et seulement si son action est nulle. Or He_ψ est somme de modules simples tous isomorphes à V_ψ. Donc $\psi(e) = 0$ si et seulement si $eHe_\psi = 0$. Comme e_ψ est central, on a $eHe_\psi = 0$ si et seulement si $ee_\psi = 0$, d'où l'équivalence de (i) et (ii). □

L'application du corollaire donne directement le théorème. □

Nous allons maintenant préciser quels sont les H_n-modules simples qui vérifient les condition du théorème. Remarquons que le module H_ne est l'induit de H_3 à H_n du module H_3e. En effet cet induit est par définition $H_n \otimes_{H_3} H_3e$ et tout élément de ce produit tensoriel s'écrit de façon unique $h \otimes e$ avec $h \in H_n$, la bijection obtenue est compatible avec l'action de H_n qui est par multiplication à gauche. On a donc

Proposition 5.15. *Pour $n \geq 3$, l'algèbre de Temperley-Lieb TL_n est isomorphe à la somme des composantes simples de H_n correspondant au modules simples qui n'interviennent pas dans l'induit de H_3 à H_n du caractère $T_w \mapsto q^{l(w)}$.*

Nous devons donc étudier l'induction des modules entre algèbres de Hecke. Pour ceci nous allons préciser le théorème 2.15. Si $w \in S_n$ et si χ est le caractère d'un H_n-module, alors la valeur $\chi(T_w)$ est un polynôme en q pour tout $w \in S_n$ puisque l'algèbre est supposée déployée sur $k(q)$. Le théorème 2.15 affirme que si $f : k[q] \to k$ est l'application qui envoie q sur 1, alors $w \mapsto \overline{\chi}(w) = f \circ \chi(T_w)$ est un caractère de S_n et qu'on obtient ainsi une bijection entre caractères des H_n-modules simples et caractères des $k[S_n]$-modules simples.

Lemme 5.16. *Pour $m \leq n$, la bijection ci-dessus commute avec la restriction de H_n à H_m et avec l'induction de H_m à H_n c'est-à-dire que si χ est un caractère de H_n on a $\overline{\mathrm{Res}^{H_n}_{H_m}(\chi)} = \mathrm{Res}^{S_n}_{S_m}(\overline{\chi})$ comme caractères de S_m et si χ est un caractère de H_m on a $\overline{\mathrm{Ind}^{H_n}_{H_m}(\chi)} = \mathrm{Ind}^{S_n}_{S_m}(\overline{\chi})$ comme caractères de S_n.*

Démonstration. La commutation avec la restriction est claire. La commutation avec l'induction s'en déduit alors par les propriété générale d'adjonction de la restriction et de l'induction. □

Remarque 5.17. L'analogue du lemme précédent est vrai pour les algèbres de Hecke d'un groupe de Coxeter fini W et d'un sous-groupe parabolique standard W_I.

D'après 5.13 un caractère ψ de H_n s'annule sur e si et seulement si dans la décomposition du module induit en somme directe de modules simples, aucune composante n'est isomorphe au module simple de caractère ψ. Par le lemme 5.16, ceci est équivalent à la même propriété pour les groupes symétriques. Nous allons rappeler la théorie des représentations des groupes symétriques en caractéristique 0.

Théorème 5.18. *Pour tout n, l'algèbre $\mathbb{Q}[S_n]$ est semi-simple déployée. Ses modules simples sont paramétrés par les partitions de n. La restriction de S_n à S_{n-1} du module simple paramétré par une partition $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k)$ de n est la somme directe des modules simples (deux à deux non isomorphes) paramétrés par les partitions de $n-1$ qu'on peut écrire $(\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{i-1} \geq \lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1} \geq \ldots \geq \lambda_k)$. Dans* *ce paramétrage le $\mathbb{Q}[S_n]$-module trivial correspond à la partition (n) et la signature à la partition $(1, 1, 1, \ldots, 1)$.*

Ce théorème permet de paramétrer les caractères des H_n-modules simples par les partitions de n et on sait que la restriction d'un tel module de H_n à H_{n-1} est donnée par la même règle sur les partitions que dans le groupe symétrique.

En utilisant ce théorème et le lemme 5.16 on peut démontrer que H_n est déployée sur $\mathbb{Q}(q)$. Nous admettrons ce résultat.

Théorème 5.19. *Les caractères ψ tels que $\psi(e) = 0$ sont exactement les caractères des H_n-modules simples paramétrés par les partitions de n dont toutes les parties ont au plus 2 éléments.*

Démonstration. Le H_n-module de dimension 1 donné par $T_w \mapsto q^{l(w)}$ se spécialise en le $\mathbb{Q}[S_n]$-module trivial. Donc la condition que la restriction de ψ à H_3 ne contienne pas ce module se spécialise en la condition que la restriction du module simple de caractère $f \circ \psi$ de S_n à S_3 ne contienne pas le module trivial. Vue la règle donnée dans 5.18 pour la restriction ceci est exactement la condition de l'énoncé du théorème. $\square$