Partiel du 28 mars

I

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et M un point distinct de A, B et C.

1. On écrit M comme barycentre : $M = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b),(C,c))$, où a, b et c sont trois nombres réels. Montrer que si $a+b \neq 0$ la droite MC et la droite AB ont un point commun H.
2. Réciproquement, on suppose que les droites AB et MC ont un point commun H et on écrit $M = \mathrm{Bar}((H,h),(C,x))$ où h et x sont des réels convenables.
   a) Montrer que $h \neq 0$.
   b) On écrit $H = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b))$. En choisissant bien h montrer que
   $$M = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b),(C,c))$$
   pour un certain coefficient c, avec $a+b \neq 0$.
   c) Déduire des questions précédentes que $M = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b),(C,c))$ avec $a+b = 0$ si et seulement si MC est parallèle à AB.

II

Les questions 2 et 3 sont indépendantes; les questions 3b), 3c) et 3d) sont indépendantes.

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan; on pose

$$G = \mathrm{Bar}((A,1),(B,1),(C,1),(D,1)).$$

1. Montrer que si une isométrie f du plan conserve l'ensemble des 4 points $\{A,B,C,D\}$ elle fixe le point G. En déduire que f est une rotation ou une symétrie axiale.
2. On suppose que f est une symétrie axiale qui conserve $\{A,B,C,D\}$ et que $f(A) = B$. Quel est l'axe de la symétrie f ? Que peut-on dire du triangle ABG ? Que peut-on dire de $f(C)$ et de $f(D)$?
3. Dans toute cette question on suppose que f est une rotation, différente de l'identité, qui conserve $\{A,B,C,D\}$.

a) Quel est son centre ?

b) Est-il possible que le point A soit fixe par f ?

c) On suppose que $f(A) = B$ et $f(B) = A$; quel est l'angle de la rotation f ? Montrer que C et D sont échangés par f ; que peut-on dire du quadrilatère A, B, C, D ?

d) On suppose que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = D$. Montrer que $f(D) = A$. Que peut-on dire du quadrilatère A, B, C, D ?