

Géométrie affine

0. Objet du cours. L'objet de ce cours est de présenter les principales idées et les résultats importants de la géométrie élémentaire dans le cadre réel affine et dans le cadre réel euclidien, en dimensions 2 et 3.

1. Transformations du plan. On appelle transformation du plan une bijection du plan dans lui-même. On s'intéresse aux transformations qui conservent certaines figures ou propriétés des figures (barycentres, distances, angles, ...). Commençons par donner une liste de transformations connues:

1. Les translations: la translation de vecteur v est l'application $A \mapsto B$ où \overrightarrow{AB} est égal à v . Si on compose la translation de vecteur v et la translation de vecteur w on obtient la translation de vecteur $v + w$.
2. Les rotations: la rotation de centre I et d'angle θ est l'application $A \mapsto B$ où les distances IA et IB sont égales et où l'angle $(\widehat{IA, IB})$ est égal à θ . Si on compose deux rotations de même centre on obtient une rotation de même centre dont l'angle est la somme des angles. Notons que la rotation d'angle π de centre I est aussi la symétrie par rapport à I . Avec des coordonnées dans un repère orthonormé, la rotation d'angle θ de centre l'origine est l'application qui envoie le point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$.
3. Les symétries axiales (ou réflexions): la réflexion par rapport à une droite D (on dit aussi d'axe D) est l'application qui envoie A sur B tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AH}$ avec $H \in D$ et $\overrightarrow{AB} \perp D$.

Toutes les transformations précédentes sont des isométries, c'est-à-dire conservent les distances.

On rappelle les propriétés suivantes: Le composé $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries axiales d'axes D et D' parallèles est la translation de vecteur $2v$ où v est le vecteur orthogonal aux droites tel que la translation de vecteur v envoie D sur D' . Le composé $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries axiales d'axes D et D' qui s'intersectent en un point I est la rotation de centre I d'angle 2θ où θ est l'angle d'une rotation qui envoie D sur D' (attention: il y a deux angles θ possibles modulo 2π , mais ils diffèrent de π donc ont le même double).

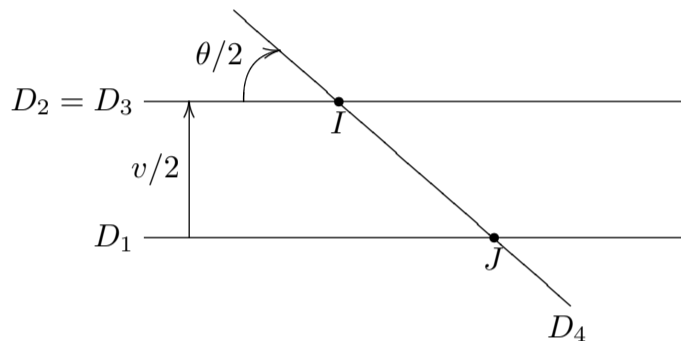
On en déduit les conséquences suivantes:

PROPOSITION 1.1.

- (i) *Le composé d'une rotation et d'une translation (ou d'une translation et d'une rotation) est une rotation de même angle.*

(ii) Le composé de deux rotations est une rotation si la somme des angles n'est pas nulle modulo 2π ; sinon c'est une translation.

DÉMONSTRATION: Prouvons (i). Si t est une translation de vecteur v , on l'écrit comme produit de deux symétries par rapport à deux droites D_1 et D_2 , comme ci-dessus: $t = s_{D_2} \circ s_{D_1}$. On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites, pourvu qu'elle soit orthogonale à v . Si r est une rotation de centre I on l'écrit comme produit de deux symétries par rapport à deux droites comme ci-dessus: $r = s_{D_4} \circ s_{D_3}$. On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites pourvu qu'elle passe par I . On choisit D_2 et D_3 égales à la droite passant par I orthogonale à v . Alors $r \circ t = s_{D_4} \circ s_{D_2} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_4} \circ s_{D_1}$, ce qui est une rotation de même angle que r puisque D_4 et D_1 font le même angle que D_4 et D_3 (D_1 est parallèle à $D_2 = D_3$). Le centre de la rotation est le point J d'intersection de D_4 et D_1 . Le même genre de raisonnement donne la composition dans l'autre sens.



Prouvons (ii). Soient r et r' deux rotations de centres respectifs I et J et d'angles respectifs θ et θ' . Comme précédemment on écrit chacune des deux rotations comme produit de deux symétries par rapport à des droites passant par le centre de la rotation et dont l'angle est la moitié de l'angle de la rotation. On a $r = s_{D_4} \circ s_{D_3}$ et $r' = s_{D_2} \circ s_{D_1}$. On choisit les deux droites D_2 et D_3 égales à la droite II' . On obtient $r \circ r' = s_{D_4} \circ s_{D_2} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_4} \circ s_{D_1}$. Si les droites D_4 et D_1 ne sont pas parallèles c'est une rotation, sinon c'est une translation. Or l'angle de D_1 à D_4 est la somme des angles de D_1 à D_2 et de D_2 à D_4 donc deux fois cet angle vaut $\theta + \theta'$. Les droites sont parallèles si et seulement si $\theta + \theta' = 0$ modulo 2π . D'où le résultat.

FAITES LES FIGURES CI-DESSOUS. QUEL EST LE CENTRE DE LA ROTATION OBTENUE? ■

Enfin composons une translation et une symétrie axiale. Si le vecteur v de la translation est orthogonal à l'axe D de la symétrie on obtient une autre symétrie. En effet on peut décomposer la translation t_v en $s_{D_1} \circ s_D$ comme précédemment et le composé est

$t_v \circ s_D = s_{D_1}$. Si le vecteur de la translation est parallèle à D on obtient ce qu'on appelle une symétrie glissée ou glissement. Si le vecteur de la translation est non nul, une telle transformation n'a aucun point fixe et ne conserve pas le sens des angles: ce n'est donc pas une des isométries déjà étudiées.

Une rotation ou une translation conserve le sens des angles alors qu'une symétrie par rapport à une droite change les angles de sens. Toutes ces transformations conservent les distances. Une isométrie qui conserve le sens des angles est dite isométrie directe ou déplacement. Sinon c'est une isométrie indirecte ou antidéplacement. Nous allons voir que les isométries décrites ci-dessus sont toutes les isométries possibles.

THÉORÈME 1.2. *Tout déplacement du plan est une rotation ou une translation.*

DÉMONSTRATION: Montrons d'abord que toute isométrie directe qui fixe deux points distincts est l'identité. Si f est une isométrie directe qui fixe deux points A et B et si M est un point quelconque distinct de A et B , on a les égalités de distances: $AM = Af(M)$ et $BM = Bf(M)$. Or il existe au plus deux points qui sont à des distances données de deux points distincts A et B . L'un des deux est M . On veut voir que $f(M)$ est aussi M . S'il était différent, il serait le symétrique de M par rapport à la droite AB et les angles $(\widehat{MA}, \widehat{MB})$ et $(\widehat{f(M)A}, \widehat{f(M)B})$ seraient de sens contraire. Or ils sont égaux puisque f est directe. Donc $f(M) = M$ pour tout M est f est l'identité.

Soit maintenant f une isométrie directe et soit A un point du plan. Si on compose la translation t de vecteur $\overrightarrow{f(A)A}$ avec f on obtient une isométrie directe qui fixe A . Soit B un point distinct de A . Posons $B' = t(f(B))$. Comme $t \circ f(A) = A$ et que $t \circ f$ est une isométrie les distances AB et AB' sont égales. Soit r la rotation de centre A d'angle égal à l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})$ (cet angle peut être nul, dans ce cas r est l'identité). Alors $r \circ t \circ f$ fixe A et B . C'est donc l'identité et on en déduit que f est le composé de l'inverse de t et de l'inverse de r . C'est une rotation ou une translation suivant que r est l'identité ou non. ■

Donnons maintenant un résultat analogue pour les antidéplacements.

THÉORÈME 1.3. *Tout antidéplacement du plan est une symétrie axiale ou une symétrie glissée.*

Remarquons qu'une symétrie axiale est en fait un cas particulier de symétrie glissée, le cas où le vecteur de la translation est nul.

DÉMONSTRATION: Soit s une symétrie axiale arbitrairement choisie. Si f est une isométrie indirecte alors $g = s \circ f$ est une isométrie directe. D'après le théorème précédent c'est donc une rotation ou une translation. On a $f = s \circ g$. Donc il suffit de montrer que dans tous les cas le composé d'une symétrie axiale et d'une rotation ou d'une translation est une symétrie glissée (éventuellement de vecteur nul). Pour le composé d'une symétrie axiale et d'une translation, nous l'avons déjà vu. Calculons le composé d'une symétrie axiale

s et d'une rotation g . On décompose la rotation g en produit de deux symétries axiales $g = s_1 \circ s_2$ dont les axes passent par le centre de la rotation g , comme plus haut. On peut choisir arbitrairement un des deux axes. Choisissons l'axe de s_1 parallèle à l'axe de s . On a alors $s \circ g = s \circ s_1 \circ s_2$. On sait que $s \circ s_1$ est une translation. On trouve donc le composé de cette translation avec la symétrie axiale s_2 , ce qui donne bien un glissement, comme nous l'avons vu (ce glissement est une symétrie axiale quand $s = s_1$). ■

Comme nous avons la liste complète des isométries du plan nous pouvons en déduire, par simple inspection de cette liste, certaines conséquences, telles que:

EXERCICES.

- (i) Montrer qu'une isométrie du plan qui a un seul point fixe est une rotation.
- (ii) Montrer qu'une isométrie du plan qui a plus de deux points fixes est une symétrie axiale ou l'identité.
- (iii) Montrer qu'une isométrie directe du plan qui envoie une droite D sur une droite parallèle à D est une translation ou une rotation d'angle π .
- (iv) Montrer qu'une isométrie du plan qui envoie une droite D sur une droite D' non parallèle à D est une symétrie, une symétrie glissée ou une rotation.

2. Barycentres, applications affines. Commençons par quelques rappels sur les barycentres. Étant donnés n points A_1, A_2, \dots, A_n et n coefficients réels a_1, a_2, \dots, a_n tels que la somme $\sum_i a_i$ n'est pas nulle, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\sum_i a_i \overrightarrow{MA_i} = 0$. C'est le barycentre des points A_i affectés des coefficients a_i (on dit aussi des points pondérés (A_i, a_i)). On le note $M = \text{Bar}((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))$. Si I est un point quelconque fixé on a

$$\overrightarrow{IM} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{IA_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}. \quad (*)$$

Si on multiplie tous les coefficients a_i par une même constante non nulle, on ne change pas le barycentre.

PROPOSITION 2.1.

- (i) Si A et B sont deux points distincts et si a et b sont deux coefficients (tels que $a+b \neq 0$) alors $\text{Bar}((A, a), (B, b))$ est un point de la droite AB et tout point de la droite AB s'exprime comme barycentre de (A, a) et (B, b) pour certains coefficients a et b qui sont uniques à multiplication près par une même constante non nulle.
- (ii) Si A, B et C sont trois points non alignés du plan, tout point du plan s'exprime comme barycentre de $(A, a), (B, b)$ et (C, c) pour certains coefficients a, b et c qui sont uniques à multiplication près par une même constante non nulle.

DÉMONSTRATION:

- (i) Soit $M = \text{Bar}((A, a), (B, b))$. Appliquons la formule (*) en prenant $I = A$. On obtient $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$, donc M est sur la droite AB . On en déduit aussi que si M est aussi $\text{Bar}((A, c), (B, d))$, avec d'autres coefficients c et d , alors $\frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$, ce qui s'écrit $bc - ad = 0$, c'est-à-dire que la couples (a, b) et (c, d) sont proportionnels. Réciproquement si M est un point de la droite AB on a $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$ pour un certain coefficient x . Ceci s'écrit $x \overrightarrow{MB} + (1-x) \overrightarrow{MA} = 0$ et M est bien barycentre de A et B .
- (ii) La démonstration est analogue. Comme A, B et C ne sont pas alignés, on peut prendre $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme repère. Donc on peut écrire $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$, ce qui signifie que M est le barycentre de $((A, (1-x-y)), (B, x), (C, y))$. Si M est le barycentre de $((A, a), (B, b), (C, c))$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$, donc $\frac{b}{a+b+c}$ et $\frac{c}{a+b+c}$ sont les coordonnées x et y de M dans le repère choisi. On a $1-x-y = 1 - \frac{b}{a+b+c} - \frac{c}{a+b+c} = \frac{a}{a+b+c}$, donc on peut écrire $a = (a+b+c)(1-x-y)$, $b = (a+b+c)x$ et $c = (a+b+c)y$, ce qui prouve bien que les coefficients a, b et c se déduisent des coefficients $1-x-y, x$ et y par multiplication par une même constante non nulle. ■

REMARQUE. Dans la proposition précédente on a unicité des coefficients a et b dans (i) et a , b et c dans (ii) si on impose en plus que la somme des coefficients vaut 1.

PROPOSITION (ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE) 2.2. Si $a_1 + a_2 + \dots + a_k \neq 0$ on a

$$\text{Bar}((A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)) = \text{Bar}((B, a_1 + a_2 + \dots + a_k), (A_{k+1}, a_{k+1}), \dots, (A_n, a_n))$$

où B est le barycentre de $((A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_k, a_k))$.

DÉMONSTRATION: On a

$$0 = \sum_i a_i \overrightarrow{MA_i} = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \frac{a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_k \overrightarrow{MA_k}}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} + \sum_{i=k+1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MA_i}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{MB} = \frac{a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_k \overrightarrow{MA_k}}{a_1 + a_2 + \dots + a_k}, \text{ d'où le résultat. } \blacksquare$$

Ce résultat dit que dans un calcul de barycentre on peut remplacer une partie des points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients.

Nous nous intéressons maintenant aux applications qui conservent les barycentres, c'est-à-dire aux applications f telles que

$$f(\text{Bar}((A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n))) = \text{Bar}((f(A_1), a_1), \dots, (f(A_n), a_n)).$$

Grâce à la propriété d'associativité, cela revient au même de conserver le barycentre de toute famille (finie) de points ou de conserver le barycentre de tout couple de points. En effet, par la proposition précédente, le barycentre de n points s'obtient de proche en proche en ne considérant que deux points à la fois.

DÉFINITION 2.3. Une similitude est une application du plan dans lui-même qui multiplie les distances par une constante $k > 0$.

Rappelons que l'homothétie de centre I et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est l'application qui envoie le point M sur le point N tel que $\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{IM}$.

REMARQUE. Si on compose une similitude s de rapport k avec une homothétie h de rapport $1/k$ on trouve une isométrie f . De $h \circ s = f$ on déduit $s = h^{-1} \circ f$ et, comme h^{-1} est une homothétie de rapport k , on voit qu'une similitude de rapport k est la composée d'une isométrie avec une homothétie de rapport k .

PROPOSITION 2.4. Les isométries, les homothéties, les similitudes conservent les barycentres.

DÉMONSTRATION: Il suffit de considérer la conservation du barycentre de deux points A et B . Soient a et b deux coefficients tels que $a + b \neq 0$. Si a et b sont de même signe, on a $M = \text{Bar}((A, a), (B, b))$ si et seulement si les distances MA , MB et AB vérifient $aMA = bMB$ et $AB = AM + MB$. Si a et b sont de signes contraires on a $M =$

$\text{Bar}((A, a), (B, b))$ si et seulement si les distances MA , MB et AB vérifient $aMA = bMB$ et $AB = |AM - MB|$. Une application qui conserve les distances conserve ces conditions, de même qu'une application qui multiplie toutes les distances par un même coefficient strictement positif. Ceci montre que les isométries, les homothéties et plus généralement les similitudes conservent les barycentres. ■

Mais il y a d'autres applications qui conservent les barycentres. Considérons par exemple dans le plan une droite D et un vecteur v non colinéaire à D . Soit f la projection sur D parallèlement à v , c'est à dire l'application qui envoie un point M sur le point $f(M)$ de D tel que la droite $Mf(M)$ soit de direction donnée par v .

PROPOSITION. *La projection sur une droite dans une direction donnée conserve les barycentres.*

DÉMONSTRATION: Nous utilisons les notations précédentes. Soit H le barycentre d'un couple de points pondérés (A, a) et (B, b) . Notons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $M' = f(M)$ les projections de A , B et M sur D parallèlement à v . Par définition on a $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. On peut écrire ceci $a(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{A'A}) + b(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B'} + \overrightarrow{B'B}) = \overrightarrow{0}$, ou encore en regroupant $[a(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{A'A}) + b(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{B'B})] + [a\overrightarrow{M'A'} + b\overrightarrow{M'B'}] = \overrightarrow{0}$. Dans le membre de gauche le premier crochet est colinéaire à v et le deuxième à D . Ce sont donc les deux projections du vecteur nul sur deux axes donc les deux crochets sont nuls. On a donc $a\overrightarrow{M'A'} + b\overrightarrow{M'B'} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire que M' est le barycentre de (A', a) et (B', b) . ■

Remarquons qu'une application f qui conserve les barycentres a un effet sur les vecteurs, c'est-à-dire que $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ ne dépend pas des deux points A et B mais seulement du vecteur \overrightarrow{AB} , ou encore que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Démontrons ceci. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. Comme f conserve les barycentres, elle conserve les milieux, d'où le résultat.

Nous noterons \overrightarrow{f} l'application des vecteurs dans les vecteurs définies par $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

PROPOSITION 2.5.

- (i) On a $\overrightarrow{f}(av) = a\overrightarrow{f}(v)$ pour tout vecteur v et toute constante a .
- (ii) On a $\overrightarrow{f}(v + w) = \overrightarrow{f}(v) + \overrightarrow{f}(w)$ pour tous vecteurs v et w .

DÉMONSTRATION: On a $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{BM}$ si et seulement si M est le barycentre du couple $((A, 1), (B, -a))$. Comme f conserve les barycentres, $f(M)$ est le barycentre de $((f(A), 1), (f(B), -a))$, donc $\overrightarrow{f(A)f(M)} = a\overrightarrow{f(B)f(M)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{f}(AM) = a\overrightarrow{f}(BM)$, d'où (i). Le même genre de raisonnement prouve (ii), en utilisant que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ si et seulement si A est le barycentre de $((B, 1), (D, -1))$. ■

DÉFINITION 2.6. *Une application des vecteurs dans les vecteurs qui vérifie les propriétés (i) et (ii) de la proposition précédente s'appelle une application linéaire.*

Remarquons qu'une application linéaire vérifie $\vec{f}(0) = 0$ car $\vec{f}(0) = \vec{f}(0 + 0) = \vec{f}(0) + \vec{f}(0)$.

Donnons maintenant la réciproque de la proposition précédente.

PROPOSITION 2.7. Soit f une application du plan dans lui-même (ou de l'espace dans lui-même) telle qu'il existe une application linéaire \vec{f} sur les vecteurs vérifiant $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$; alors f conserve les barycentres.

DÉMONSTRATION: Si $M = \text{Bar}((A, a), (B, b))$ c'est-à-dire si $\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = 0$, en appliquant \vec{f} à cette égalité et en utilisant la linéarité de \vec{f} on obtient $a\vec{f}(\overrightarrow{MA}) + b\vec{f}(\overrightarrow{MB}) = 0$, donc $a\overrightarrow{f(M)f(A)} + b\overrightarrow{f(M)f(B)} = 0$, c'est-à-dire $f(M) = \text{Bar}((f(A), a), (f(B), b))$, ce qui est la propriété annoncée. ■

DÉFINITION 2.8. Une application f comme dans la proposition précédente s'appelle une application affine.

PROPOSITION 2.9.

- (i) Une application affine envoie des points alignés sur des points alignés.
- (ii) Une bijection affine envoie deux droites parallèles du plan sur deux droites parallèles.

DÉMONSTRATION: Soit A et B deux points. La droite AB est l'ensemble des barycentres de A et B . Donc l'image de cette droite par une application affine f est l'ensemble des barycentres de $f(A)$ et $f(B)$. Si $f(A) = f(B)$ c'est un seul point, sinon c'est la droite $f(A)f(B)$. On a donc prouvé (i).

Supposons l'application f affine bijective. Si D et D' sont deux droites parallèles, on peut choisir deux points distincts A et B sur D et deux points A' et B' sur D' tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. On a donc $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{f}(\overrightarrow{A'B'})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A')f(B')}$. Ce vecteur n'est pas nul car f est bijective donc $f(A) \neq f(B)$. On a donc un vecteur non nul colinéaire à $f(D)$ qui est aussi colinéaire à $f(D')$, donc $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles. ■

PROPOSITION 2.10. Étant donnés trois points A, B et C non alignés du plan et trois points quelconques A', B' et C' , il existe une unique application affine du plan dans lui-même qui envoie A sur A' , B sur B' et C sur C' .

DÉMONSTRATION: Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, tout point du plan est le barycentre de ces trois points avec des coefficients convenables. Une application f comme dans l'énoncé conserve le barycentre, donc envoie nécessairement le point $\text{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$ sur le point $\text{Bar}((A', a), (B', b), (C', c))$. Donc f est bien unique. Montrons l'existence de f . Comme les points ne sont pas alignés on peut choisir un repère ayant comme origine A et comme vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Si $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, prenons pour $f(M)$ le point défini par $\overrightarrow{A'f(M)} = a\overrightarrow{A'B'} + b\overrightarrow{A'C'}$. Si N est un autre point, de coordonnées (c, d) dans le même repère, on aura donc $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{A'f(N)} - \overrightarrow{A'f(M)} =$

$(c - a)\overrightarrow{A'B'} + (d - b)\overrightarrow{A'C'}$. Or $(c - a, d - b)$ sont les composantes du vecteur \overrightarrow{MN} . L'application \vec{f} qui envoie le vecteur de coordonnées (x, y) sur le vecteur $x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$ est bien linéaire (vérifiez-le!), donc l'application f est affine d'après la proposition 2.7. ■

PROPOSITION 2.11. *L'application réciproque d'une application affine bijective est affine.*

DÉMONSTRATION: Soit f une application affine bijective. On considère n points A_1, \dots, A_n et des coefficients a_1, \dots, a_n de somme non nulle. Soit $M = \text{Bar}((A_i, a_i), i = 1 \dots, n)$. On veut montrer $f^{-1}(M) = \text{Bar}((f^{-1}(A_i), a_i), i = 1 \dots, n)$. Soit $N = \text{Bar}((f^{-1}(A_i), a_i), i = 1 \dots, n)$. On a $f(N) = \text{Bar}((f(f^{-1}(A_i)), a_i), i = 1 \dots, n)$ car f est affine. Donc $f(N) = M$, donc $N = f^{-1}(M)$. ■

Nous allons maintenant exprimer les applications affines dans un repère (O, e_1, e_2) . Si f est une application affine et si M est un point de coordonnées (x, y) alors $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$, donc $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = x\vec{f}(e_1) + y\vec{f}(e_2)$. Notons (a, b) les coordonnées de $f(O)$; notons (a_1, b_1) et (a_2, b_2) les coordonnées des vecteurs $\vec{f}(e_1)$ et $\vec{f}(e_2)$ respectivement; alors les coordonnées de $\vec{f}(\overrightarrow{OM})$ sont

$$\begin{cases} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \end{cases} \quad (L)$$

et les coordonnées de $f(M)$ sont

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a \\ b_1x + b_2y + b \end{cases} \quad (A)$$

On voit que des formules de degré 1 en les variables (comme (L)) définissent une application linéaire et des formules comportant des termes de degré 1 et des termes de degré 0 (comme (A)) définissent une application affine.

Donnons un exemple: on fixe un repère (O, e_1, e_2) et un nombre k . On considère l'application f qui envoie le point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées (x, ky) . C'est une application affine. Si k est nul c'est simplement la projection sur la droite D passant par O de direction e_1 (l'axe des abscisses). Si k est non nul elle est bijective. Cette application s'appelle un affinité d'axe D de direction e_2 et de rapport k .