Examen du 8 juin

durée 2 heures

I

La question 3a) est indépendante des précédentes.

1. Indiquer sans démonstration quelles sont les bijections affines d'une droite dans elle-même.
2. Quelles sont les bijections affines d'une droite dans elle-même qui ont un point fixe ? Quelles sont celles qui ont deux points fixes ?
3. a) Soient A, B, C trois points du plan non alignés. On note p_1 la projection sur la droite AC dans la direction de la droite BC, on note p_2 la projection sur la droite BC dans la direction de la droite AB et p_3 la projection sur la droite AB dans la direction de la droite AC. Calculer $p_3 \circ p_2 \circ p_1(A)$ et $p_3 \circ p_2 \circ p_1(B)$. En déduire que $p_3 \circ p_2 \circ p_1$ fixe le milieu de $[A, B]$.
   b) Montrer en utilisant la question 2 que $(p_3 \circ p_2 \circ p_1)^2$ fixe tous les points de la droite AB. Faire une figure qui montre cette propriété.

II

Soit $n \geq 1$ un entier et soient $A_1, \ldots, A_n$ des points d'un espace affine. À quelle condition le composé des n symétries centrales de centres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est-il une translation ?

III

Soit $\mathcal{E}$ un plan et E l'espace vectoriel associé. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même et $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée.

1. On suppose que $\overrightarrow{f}(v) = 0$ pour tout vecteur v. Montrer que pour tous points A et B on a $f(A) = f(B)$.
2. On suppose qu'il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $\overrightarrow{f}(v) = 0$ et un vecteur $w \neq 0$ tel que $\overrightarrow{f}(w) \neq 0$.
   a) Montrer que v et w ne sont pas colinéaires.
   b) Montrer que l'image par f de toute droite dont la direction contient v est un point.
   b) Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur w. Montrer que $f(\mathcal{D})$ est une droite.

c) En déduire que l'image de tout le plan est la droite $f(\mathcal{D})$.

d) On suppose de plus que f fixe un point A. Faire une figure illustrant la situation en traçant : le point A, les deux droites passant par A de vecteurs directeurs v et w respectivement, le point B tel que $\overrightarrow{AB} = w$. Placer arbitrairement le point $f(B)$. Soit C un point tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; où se trouve $f(C)$? Placer C et $f(C)$ sur la figure. Placer un point M du plan tel que $\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à v. Placer $f(M)$.

IV

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère. On note O l'origine. On considère l'application f qui envoie le point de coordonnées (x, y, z) sur le point de coordonnées $(3x - 4, 3y - 2, 3z)$. Montrer que f est une homothétie. Quel est son centre ?