Corrigé partiel de la feuille 3

1. Notons s_D et s_Δ les symétries par rapport à D et Δ respectivement et t_v la transation de vecteur v. On a $f \circ g = s_\Delta \circ (s_D \circ t_v) = (s_\Delta \circ s_D) \circ t_v = s_O \circ t_v$ (on a appliqué le résultats du cours disant que le composé de deux symétries axiales d'axes non parallèles est la rotation de centre l'intersection des deux droites et d'angle double de l'angle des deux droites). On a $s_O \circ t_v = s_{O'}$ où O' est translaté de O de $-v/2$ d'après le résultat du cours qui dit que le composé d'une rotation et d'une translation est une rotation (on voit facilement que O' ne bouge pas par ce composé donc est le centre de la rotation). Le même genre de calcul donne $g \circ f = (t_v \circ s_D) \circ s_\Delta = t_v \circ (s_D \circ s_\Delta) = t_v \circ s_O = s_{O''}$ où O'' est le translaté de O de $v/2$.
2. C est sur le segment $[A, B]$ aux $2/3$ à partir de A. D'après le cours $s_A \circ s_C$ est la translation de $2\overrightarrow{CA}$ et $s_B \circ s_C$ est la translation de $2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$. Donc le composé $(s_A \circ s_C) \circ (s_B \circ s_C) \circ (s_B \circ s_C)$ est la translation de $2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire l'identité.
3. a) Une application affine est une application dont les formules en fonction des coordonnées n'ont que des termes de degré total 0 ou 1. Donc seules la deuxième, la troisième et la dernière application sont affines.
   b) La solution sera donnée ce week-end. Cherchez-la en attendant.
4. La solution sera donnée ce week-end. Cherchez-la en attendant.
5. Comme H est sur la droite AG il est barycentre de (A, α) et (G, β). Comme H n'est pas égal à A, on a $\beta \neq 0$ et on peut choisir $\beta = 2$ quitte à changer α. On peut alors remplacer $(G, 2)$ par $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, -1)$, c'est-à-dire

$$H = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (A, 1), (B, 2), (C, -1)) = \mathrm{Bar}((A, \alpha + 1), (B, 2), (C, -1)).$$

   Or, comme H est sur la droite BC, le coefficient de A est nul, donc $\alpha = -1$ et H est barycentre de $(B, 2)$ et de $(C, -1)$. Comme $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ on a $H = \mathrm{Bar}((A, -1), (G, 2))$, c'est-à-dire $-\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HG} = 0$, donc G est le milieu de $[HA]$.
6. a) L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à f envoie le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f}(2\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 4\overrightarrow{AB}$. Comme $f(A) = A$ on obtient pour $f(C)$ le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$.
   b) La solution sera donnée ce week-end. Cherchez-la en attendant.
7. Le point D est le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) si et seulement si on a $\overrightarrow{AD} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a + b + c}$. Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on voit que D est le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(A, -1)$