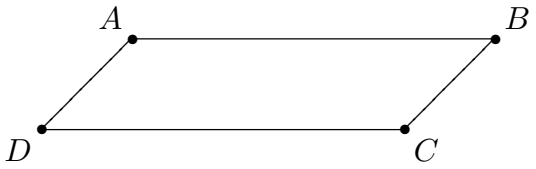
Corrigé des parties II et III de la feuille 2

II

Le composé $s_A \circ s_B$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$. Le composé $s_C \circ s_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{DC}$. Donc $s_A \circ s_B \circ s_C \circ s_D$ estla translation de vecteur $2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})$. C'est l'identité si et seulement si $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si A, B, C, D forment un parallèlogramme.



III

1. Choisissons une figure ayant un centre de symétrie et qui n'est conservée par aucune autre isométrie que cette symétrie centrale et l'identité. Par exemple la lettre **S**. Plaçons un exemplaire de cette figure en A_0 de façon que le point A_0 soit son centre de symétrie et complétons la figure par toutes les translations de vecteur $2n\overrightarrow{v}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors la figure obtenue est invariante par translation multiple de $2\overrightarrow{v}$, et par symétrie par rapport à A_n pour tout n car cette symétrie est le composé $t_{2n\overrightarrow{v}} \circ s_0$ de la translation de vecteur $2n\overrightarrow{v}$ et de la symétrie s_0 par rapport à A_0 (voir cours). Réciproquement, si f est une isométrie conservant la figure, elle doit envoyer le **S** qui est en A_0 sur celui qui est en A_{2n} pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. En composant avec la translation $t_{-2n\overrightarrow{v}}$ de vecteur $-2n\overrightarrow{v}$ on obtient une isométrie $t_{-2n\overrightarrow{v}} \circ f$ qui conserve le **S** qui est en A_0. Comme celui-ci n'est conservé par aucune isométrie autre que la symétrie s_0 par rapport à A_0, on voit que nécessairement $t_{-2n\overrightarrow{v}} \circ f$ est l'identité ou s_0. On en déduit que f est soit la translation $t_{2n\overrightarrow{v}}$, inverse de t soit $t_{2n\overrightarrow{v}} \circ s_0$. Comme $t_{2n\overrightarrow{v}} \circ s_0$ est la symétrie par rapport au point A_n, on a bien une figure invariante seulement par les translations de vecteur multiple de $2\overrightarrow{v}$ et les symétries par rapport aux points A_n.

S · **S** · **S** · **S** · **S** · **S** · **S**

2. On choisit cette fois une figure ayant un axe de symétrie vertical et invariante par aucune autre isométrie, par exemple la lettre **T**, et on applique le même procédé qu'à la question 1. Un raisonnement tout à fait analogue donne le résultat: il suffit de remplacer s_0 dans les calculs de la question 1 par la symétrie s_{Δ_0} d'axe Δ_0.

T · **T** · **T** · **T** · **T** · **T** · **T**

3. Une telle figure n'existe pas. En effet si elle est invariante par la symétrie s_D par rapport à D et par les translations de vecteur $n\overrightarrow{v}$ elle est aussi invariante par les symétries glissées d'axe D et de vecteur $n\overrightarrow{v}$ pour tout n. Par contre on peut trouver une figure invariante par aucune autre isométrie que les translations de vecteur $n\overrightarrow{v}$ et les symétries glissées d'axe D et de vecteur $n\overrightarrow{v}$: on choisit cette fois une figure ayant un axe de symétrie horizontal et invariante par aucune autre isométrie, par exemple la lettre **E**, et on la place en tous les points A_n. Si une isométrie f conserve la figure elle envoie le **E** qui est en A_0 sur un **E** qui est en A_n pour un certain n. En composant avec la translation $t_{-n\overrightarrow{v}}$ on obtient une isométrie qui conserve le **E** qui est en A_0 donc on obtient s_D ou l'identité. Donc f est soit égal à $t_{n\overrightarrow{v}}$ soit égal à $t_{n\overrightarrow{v}} \circ s_D$ qui est une des symétries glissées voulues.

E · **E** · **E** · **E** · **E** · **E** · **E**

4. Le composé de s_D et s_0 est égal à s_{Δ_0}. Le composé de $t_{2n\overrightarrow{v}} \circ s_{\Delta_0}$ est égal à s_{Δ_n}. Donc la figure est invariante par toutes ces isométries. Un exemple d'une telle figure est

H · **H** · **H** · **H** · **H** · **H** · **H**

5. On choisit une figure F invariante par aucune isométrie. On en place une copie, comme précédemment, en tous les points A_{2n}, pour $n \in \mathbb{Z}$. On complète par le glissement de vecteur $\overrightarrow{v}$ et d'axe D. Si une isométrie f conserve la figure, ou bien elle envoie la copie de F qui est en A_0 sur la copie de F qui est en A_{2n} et en composant avec la translation de vecteur $-2n\overrightarrow{v}$ on voit comme aux question précédentes que f est la translation $t_{2n\overrightarrow{v}}$; ou bien f envoie la copie de F qui est en A_0 sur la copie de F retournée qui est en A_{2n+1} pour un certain n. En composant avec $t_{-(2n+1)\overrightarrow{v}}$ on obtient donc s_D donc f est un glissement de vecteur $(2n+1)\overrightarrow{v}$. Donc la figure n'est invariante par aucune symétrie axiale et aucune translation autre que les $t_{2n\overrightarrow{v}}$ (et d'ailleurs par aucune rotation autre que l'identité).