Corrigé des exercices 3 et 4 de la feuille 1

3. Montrons que l'application conserve les barycentres. On considère n points $A_1, \ldots, A_n$ munis de coefficients $a_i, \ldots, a_n$ de somme non nulle. Soit G leur barycentre. Si on appelle (x_i, y_i) les coordonnées de A_i et (x_G, y_G) les coordonnées de G, on a

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum\limits_i a_i x_i}{\sum\limits_i a_i} \\ y_G = \dfrac{\sum\limits_i a_i y_i}{\sum\limits_i a_i}. \end{cases}$$

Si f est l'application qui envoie le point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées (x, ky), les coordonnées de $f(A_i)$ sont (x_i, ky_i). Donc le barycentre $H = \mathrm{Bar}((f(A_i), a_i), i = 1 \ldots, n)$ a pour coordonnées

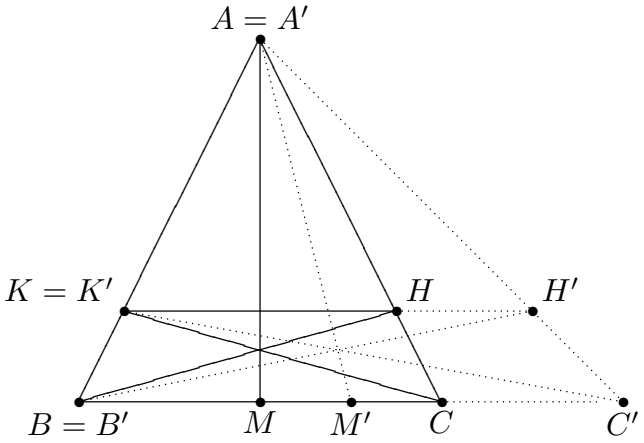
$$\begin{cases} x_H = \dfrac{\sum\limits_i a_i x_i}{\sum\limits_i a_i} \\ y_H = \dfrac{\sum\limits_i a_i k y_i}{\sum\limits_i a_i}. \end{cases}$$

D'autre part les coordonnées de $f(G)$ sont (x_G, ky_G), donc on a bien $H = f(G)$.

4. (a) Soit s la symétrie d'axe AM. Elle fixe tous les poins de la droite AM et envoie B sur C puisque AM est la médiatrice de $[BC]$. Elle envoie donc la droite AB sur la droite AC. Comme HK est parallèle à BC on a $HK \perp AM$, donc la symétrie s envoie cette droite sur elle-même. Donc s envoie le point $H = HK \cap AB$ sur $K = HK \cap AC$. On a donc $s(BH) = s(B)s(H) = CK$. Soit I le point d'intersection $I = BH \cap AM$. On a $s(I) = s(BH) \cap s(AM) = CK \cap AM$; mais $s(I) = I$ puisque I est sur AM donc est fixe par s. Donc I est aussi sur CK.

   (b) Notons f la transformation de la question 3. La figure obtenue est la suivante (on a mis en traits pointillés les images par f de la figure d'origine; on a pris

$k = 1,5$):



On a $A' = A$, $B' = B$ et $K' = K$. Comme $f$conserve le barycentre $M' = f(M)$ est le milieu de $[BC']$. La droite AM devient la droite AM', la droite BH devient la droite BH' et la droite CK devient la droite $C'K$. Le point d'intersection $I = BH \cap CK$ devient donc $f(I) = BH' \cap C'K$; comme I est sur AM, son image $f(I)$ est sur $f(AM) = AM'$.

Réciproquement, partons d'un triangle quelconque $A'B'C'$. Mettons un point K' sur $A'B'$ et appelons H' l'intersection de $A'C'$ avec la parallèle à $B'C'$ passant par K'. La hauteur passant par A coupe $B'C'$ en un point M. Appelons C le symétrique de B par rapport à $A'M$. Posons $A = A'$ et $B = B'$. Alors A, B, C est isocèle. Si on prend $(B', \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'})$ comme repère alors A', B', C' sont les images de A, B, C par la transformation f comme ci-dessus où $k = \dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}$. On se retrouve donc exactement avec la figure précédente. Donc $B'H'$ et $C'K'$ se coupent sur $A'M'$ où M' est le milieu de $[B'C']$. Cette propriété est donc vraie dans un triangle quelconque.