Corrigé du partiel

I

1. Si $a+b \neq 0$ on peut considérer le point $H = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b))$. Ce point est sur la droite AB et, par associativité du barycentre, on a $M := \mathrm{Bar}((H,a+b),(C,c))$, donc M est sur la droite HC, donc H est sur la droite MC.
2. a) Si $h = 0$ alors $M = C$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
   b) Comme h est non nul on peut multiplier les coefficients par $(a+b)/h$ et on obtient $M = \mathrm{Bar}((H,a+b),(C,x(a+b)/h))$. Par associativité du barycentre ceci donne $M = \mathrm{Bar}((A,a),(B,b),(C,x(a+b)/h))$, ce qui donne le résultat, si on prend $c = x(a+b)/h$.
   c) MC est parallèle à AB si et seulement si il n'existe pas de point H commun aux droites MC et AB. On a vu que ces deux droites ont un point commun si et seulement si $a+b \neq 0$. Donc elle n'ont pas de point commun si et seulement si $a+b = 0$.

II

1. Une isométrie conserve les barycentres. Donc le point G est envoyé sur le barycentre des 4 points avec les mêmes coefficients donc sur lui-même. Une isométrie qui a un point fixe ne peut être qu'une rotation ou un symétrie axiale, d'où le résultat.
2. Si f est une symétrie axiale et envoie A sur B alors elle envoie B sur A et son axe est la médiatrice de $[A,B]$. Comme G est fixe, il est sur l'axe de la symétrie, donc G est sur la médiatrice et le triangle GAB est isocèle. Les images des 4 points sont distinctes donc $f(C)$ vaut C ou D. On peut avoir $f(C) = C$, dans ce cas $f(D) = D$. Cela se produit si et seulement si C et D sont sur l'axe de la symétrie. Sinon on a $f(C) = D$ et $f(D) = C$. Cela se produit si et seulement si $[A,B]$ et $[C,D]$ ont la même médiatrice.
3. a) Le point G est fixe donc c'est le centre de la rotation.
   b) Le point A est fixe si et seulement si $A = G$. Dans ce cas

$$A = \mathrm{Bar}((A,1),(B,1),(C,1),(D,1)),$$

   ce qui s'écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 0$, c'est-à-dire $A = \mathrm{Bar}((B,1),(C,1),(D,1))$. C'est possible si le triangle B,C,D est équilatéral et que A est le centre de ce triangle. Une rotation de centre A d'un tiers de tour conserve les quatre points.

c) Si f échange A et B alors f fixe le milieu de $[A, B]$. Donc le centre G de la rotation est le milieu de $[A, B]$ et l'angle de la rotation $(\widehat{GA, GB})$ vaut π. On ne peut pas avoir $f(C) = C$ car alors $f(D) = D$ et $C = G = D$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc $fC) = D$ et $f(D) = C$. Donc le centre de la rotation est aussi le milieu de $[C, D]$ et les quatre points forment un parallèlogramme.

d) La seule possibilité qui reste pour $f(D)$ est A puisque ce doit être un des 4 points et B, C, D sont les images de points autres que D. Dans ce cas, comme f est une isométrie, on a égalité des distances $AB = BC = CD = DA$ et aussi $AC = BD$. La première égalité montre que A, B, C, D est un losange et la deuxième montre que ce losange est en fait un carré.