Corrigé du partiel

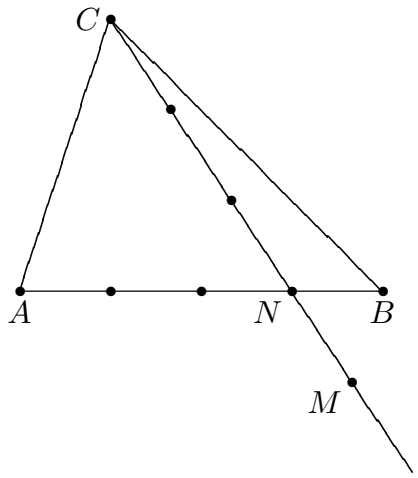
1. Un résultat du cours dit que $s_B \circ s_C$ est la translation t de vecteur $2\overrightarrow{CB}$. Un autre résultat du cours dit que si t_v est une translation de vecteur v, alors $s_A \circ t_v$ est la symétrie par rapport au point A' tel que $2\overrightarrow{A'A} = v$. Donc $s_A \circ s_B \circ s_C = s_A \circ t$ est la symétrie par rapport au point A' tel que $2\overrightarrow{A'A} = 2\overrightarrow{CB}$, ce qui s'écrit $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$.
2. a) On a $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. Donc $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = 0$, ce qui par définition signifie que $D = \mathrm{Bar}((A,1),(B,-1),(C,-1))$.
   b) La relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalente à $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD}$, ce qui est équivalent à la relation cherchée $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$. On a donc encore

$$D = \mathrm{Bar}((A,1),(B,-1),(C,-1)).$$

   Le théorème d'associativité du barycentre dit que

$$D = \mathrm{Bar}((A,1),(B,-1),(C,-1)) = \mathrm{Bar}((A,1),(B,-1),(A,-k),(B,k-1)).$$

   Ceci s'écrit, en rassemblant les coefficients : $D = \mathrm{Bar}((A,1-k),(B,k-2))$.
3. Une symétrie glissée est le composé d'une symétrie r et d'une translation t qui commutent, c'est-à-dire $s = r \circ t = t \circ r$. Donc $s \circ s = t \circ r \circ r \circ t = t \circ t$ car $r \circ r$ est l'identité. On trouve donc une trnslation de vecteur double de celui de t.
4. On peut placer d'abord le barycentre $N = \mathrm{Bar}((A,1),(B,3))$ qui se trouve sur le segment $[AB]$, tel que $\overrightarrow{BN} = (1/4)\overrightarrow{BA}$. On a ensuite $M = \mathrm{Bar}((C,-1),(N,4))$. Donc M est sur la droite NC tel que $\overrightarrow{CM} = (4/3)\overrightarrow{CN}$.



5. D'après le cours, comme les formules n'ont que des termes de degré 1 ou 0 en x et y, on a bien une application affine. On peut aussi le redémontrer : si $M = \text{Bar}((A,k),(B,1-k))$, et si (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont les coordonnées de A et B, les coordonnées de M sont $(kx_A+(1-k)x_B, ky_A+(1-k)y_B)$. Les coordonnées de $f(A)$ et de $f(B)$ sont respectivement (x_A+ay_A, y_A) et (x_B+ay_B, y_B) ; les coordonnées de $\text{Bar}((f(A),k),(f(B),1-k))$ sont donc $(k(x_A+ay_A)+(1-k)(x_B+ay_B), ky_A+(1-k)y_B)$. Or les coordonnées de $f(M)$ sont $(kx_A+(1-k)x_B+a(ky_A+(1-k)y_B), ky_A+(1-k)y_B)$. On a donc bien $f(M) = \text{Bar}((f(A),k),(f(B),1-k))$.

6. a) Un point M est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire s'il existe une constante réelle k telle que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BC}$. Ceci s'écrit $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC} - k\overrightarrow{MB} = 0$ ce qui signifie que $M = \text{Bar}((A,1),(B,-k),(C,k))$.

   b) Comme f est affine, elle conserve les barycentres, donc $M' = f(M)$ est le barycentre de $((f(A),1),(f(B),-k),(f(C),k))$. Or $f(A) = A'$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$, donc $M' = \text{Bar}((A',1),(B,-k),(C,k))$. En aplliquant la question a) avec A' à la place de A, on voit que ceci signifie que M' est sur la parallèle à BC passant par A' (et même que $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$).

   c) L'application f est affine, donc les formules sont de degré 0 ou 1 en x et y. Appelons a, b, c, d, e, f les coefficients, c'est-à-dire que f envoie le point de coordonnées (x,y) sur le point de coordonnées $(ax+by+c, dx+ey+f)$. On sait que le point B de coordonnées $(0,0)$ est fixe par f donc, en remplaçant, on obtient $c = f = 0$. Le point C de coordonnées $(1,0)$ est fixe, ce qui en remplaçant donne $a = 1$ et $d = 0$. Le point A de coordonnées $(0,1)$ est envoyé sur le point A' de coordonnées $(0,h)$, ce qui donne $b = 0$ et $e = h$. Au total on a obtenu que f est $(x,y) \mapsto (x, hy)$.

   d) Le calcul commence de la même façon et donne encore $c = f = 0$, $a = 1$ et $d = 0$. Le point A est envoyé sur A' de coordonnées $(k,1)$, ce qui donne $b = k$ et $e = 1$. Donc f est $(x,y) \mapsto (x+ky, y)$.