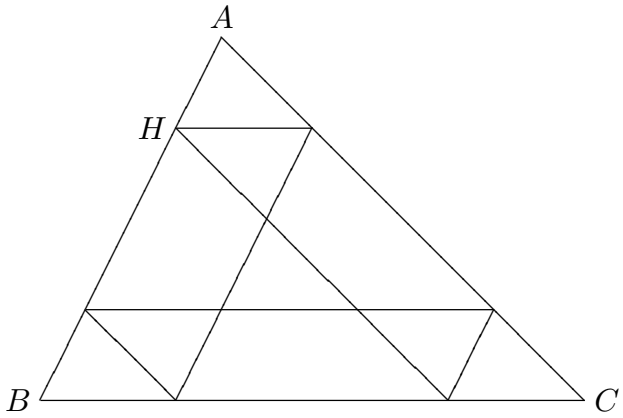
Corrigé de l'examen du 8 juin

I

1. Les seules bijections affines d'une droite sont les translations et les homothéties.
2. Une translation différente de l'identité n'a pas de point fixe; une homothétie différente de l'identité a un seul point fixe. Seule l'identité a plus de deux points fixes.
3. a) On a $p_1(A) = A$, $p_2(A) = B$ et $p_3(B) = B$, donc $p_3 \circ p_2 \circ p_1(A) = B$. D'autre part on a $p_1(B) = C$, $p_2(C) = C$ et $p_3(C) = A$, donc $p_3 \circ p_2 \circ p_1(B) = A$. Comme l'application affine $p_3 \circ p_2 \circ p_1$ conserve les barycentres, elle envoie le milieu de $[A, B]$ sur le milieu de $[B, A]$ c'est-à-dire sur lui-même.
   b) Le carré de l'application $p_3 \circ p_2 \circ p_1$ fixe donc A, B et le milieu de $[A, B]$. D'après la question 2 il est donc égal à l'identité. Sur la figure ci-dessous on part de H sur $[A, B]$ et on lui applique les 6 projections successivement : on revient en H.



II

L'application linéaire associée à une symétrie centrale est $-\mathrm{Id}$. L'application linéaire associée au produit de n symétries centrales est donc $(-1)^n \mathrm{Id}$. C'est une translation si et seulement si l'application linéaire associée est l'identité, c'est-à-dire si et seulement si n est pair.

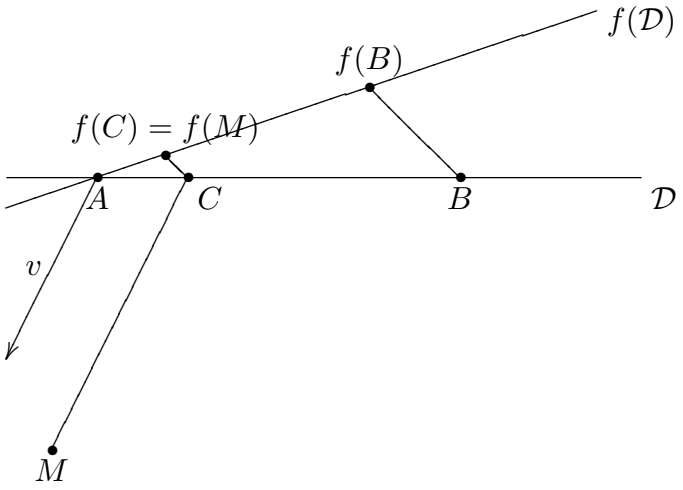
III

1. On a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 0$, donc $f(A) = f(B)$.
2. a) Si v était colinéaire à w on aurait $v = kw$ pour un certain nombre réel k. Par la linéarité de $\overrightarrow{f}$ on obtiendrait $\overrightarrow{f}(v) = k\overrightarrow{f}(w) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) Si A et B sont sur une droite dont la direction contient v alors $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à v, donc $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = 0$ par les mêmes calculs qu'à la question a), donc $f(A) = f(B)$. Donc tous les points de cette droite on même image.

c) Soit A un point de $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points B tels que $\overrightarrow{AB}$ est multiple de w. Son image est l'ensemble des points $f(B)$ tels que $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ est multiple de $\overrightarrow{f}(w)$ c'est-à-dire la droite passant par $f(A)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{f}(w)$. Soit M un point quelconque du plan et soit Δ la droite passant par M de vecteur directeur v. Elle n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$, donc elle coupe $\mathcal{D}$ en un point N. Par la question b) on a $f(M) = f(N)$ donc $f(M) \in f(\mathcal{D})$. Donc l'image de tout point est sur $f(\mathcal{D})$.

d) Comme $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \frac{1}{4}\overrightarrow{f(A)f(B)} = \frac{1}{4}\overrightarrow{Af(B)}$ et comme $\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à v on a $f(M) = f(C)$.



IV

Soient $A(x, y, z)$ et $A'(x', y', z')$ deux points; alors $\overrightarrow{f(A)f(A')}$ a pour coordonnées $(3x' - 3x, 3y' - 3y, 3z' - 3z)$. Donc $\overrightarrow{f} = 3\,\mathrm{Id}$. D'après le cours ceci signifie que f est une homothétie. Son centre est le point de coordonnées (x, y, z) tel que $\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 3y - 2 \\ z = 3z \end{cases}$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(2, 1, 0)$.