TD 3 de géométrie

1. On fixe un repère du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère.
   a) Parmi les des applications suivantes, lesquelles sont affines ?
   $$\begin{cases} (x,y) \mapsto (x^2, y) \\ (x,y) \mapsto (2x, 3y) \\ (x,y) \mapsto (x+y, 3y+1) \\ (x,y) \mapsto (2x, xy) \\ (x,y) \mapsto (2x+3y-5, 0) \end{cases}$$
   b) Écrire l'application affine du plan dans le plan qui envoie le point de coordonnées $(0,0)$ sur le point de coordonnées $(1,0)$, le point de coordonnées $(1,0)$ sur le point de coordonnées $(2,2)$ et le point de coordonnées $(0,1)$ sur le point de coordonnées $(1/2, -1)$. Cette application est-elle bijective ?
2. Montrer qu'une application affine du plan qui envoie trois points non alignés sur trois points alignés n'est pas bijective (montrer que les images de tous les points sont alignées en utilisant les barycentres).
3. Quelles sont les applications linéaires associées à une translation, une symétrie axiale, une symétrie centrale, une symétrie glissée, une rotation ?
4. Montrer qu'une homothétie est une application affine. Quelle est l'application linéaire associée ? Énoncer et prouver une réciproque.
5. Si l'application linéaire associée à une application affine f est l'identité, que peut-on dire de f ?
6. Montrer qu'une isométrie directe du plan qui envoie une droite D sur une droite parallèle à D est une translation ou une symétrie centrale (utiliser l'application linéaire associée et l'exercice 3).
7. Soient f et g deux symétries glissées d'axes non parallèles. Montrer en utilisant les applications linéaires associées que $f \circ g$ est une rotation. Quel est son angle ?
8. En utilisant les applications linéaires associées et l'exercice 4, étudier le composé de deux homothéties.