RÉSUMÉ DES RÉSULTATS À SAVOIR

1. Géométrie élémentaire

À connaître : inégalité triangulaire, théorème de Thalès, de Pythagore.

Cas d'égalité des triangles : trois critères assurant l'égalité de deux triangles :

(1) Les deux triangles ont une côté égal compris entre deux angles égaux.

(2) Les deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux.

(3) Les deux triangles ont leurs côtés respectifs égaux.

2. polygones

Un polygone à n sommets est une suite de segments $[A_i, A_{i+1}]$ $(i = 1, \ldots, n)$ avec $A_{n+1} = A_1$, tels que deux d'entre eux ne se rencontrent pas sauf s'ils sont consécutifs. Dans ce cas ils ont exactement un point commun : $[A_{i-1}, A_i] \cap [A_i, A_{i+1}] = \{A_i\}$ et les autres intersections sont vides.

Un polygone a un intérieur et un extérieur. La somme des angles intérieurs d'un polygone à n sommets est $(n-2)\pi$.

Un polygone est dit régulier si tous ses côtés sont égaux et tous ses angles sont égaux. Dans ce cas les sommets se trouvent sur un cercle. Si le rayon de ce cercle est R, les côtés du polygone mesurent $2R\sin(\pi/n)$. et les angles mesurent $(n-2)\pi/n$.

Il y a exactement n rotations qui conservent un polygone régulier. Un polygone régulier a n axes de symétrie. Quand n est pair le centre du cercle est un centre de symétrie du polygone.

3. Aires

Les principaux résultats utiles sur les aires sont les suivants :

Si un point M est sur le côté CD d'un parallélogramme $ABCD$ l'aire du triangle AMB est la moitié de l'aire du parallélogramme.

Deux triangles ABC et $A'BC$ tels que AA' est parallèle à BC ont même aire.

La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire. Plus généralement si M est un point du côté $[BC]$ d'un triangle ABC, le rapport des aires des triangles AMB et AMC est égal à $\dfrac{MB}{MC}$.

Théorème de Bolyai : Deux polygones de même aire admettent des découpages en pièces égales. C'est -à-dire qu'on peut découper un des deux polygones en pièces dispointes qui disposées différemment (toujours disjointes) reconstituent l'autre polygone.

L'aire comprise entre les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ (avec $a < b$) et une une courbe donnée par une fonction $y = f(x)$ avec $f(x) > 0$ et f continue est égale à $F(b) - F(a)$ où F est un primitive de f.

4. Droites et plans dans l'espace, intersection et parallélisme

Propriétés élémentaires : deux points définissent une droite, trois points non alignés définissent un plan.

Positions relatives : deux plans distincts sont ou bien parallèles ou bien se coupent suivant une droite. Si une droite non contenue dans un plan, ou bien elle le rencontre en un seul point ou bien on dit qu'elle lui est parallèle.

Deux droites distinctes sont ou bien dans un même plan (parallèle ou non) ou bien sont "en position générale" c'est-à-dire ne se rencontrent pas et ne sont pas parallèles.

Exemple de droites en position générale : deux arêtes sans sommet commun d'un tétraèdre,

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Théorème 1. *Si deux plans ont comme intersection une droite D et si D_1 et D_2 sont parallèles et chacune dans un des plans alors elles sont parallèles à D.*

Théorème 2 (Théorème de Désargues)**.** *On considère six points distincts A, A', B, B', C, C' tels que les droites AA', BB' et CC' passent par un même point O et ne soient pas dans un même plan. On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en un point U, que AC et $A'C'$ se coupent en un point V et que AB et $A'B'$ se coupent en un point W. Alors U, V et W sont alignés.*

(en fait U, V et W sont sur la droite d'intersection des plans (A, B, C) et (A', B', C')).

5. Droites et plans dans l'espace, orthogonalité

Quelques définitions :

On dit que deux droites sont perpendiculaires si elle sont dans un même plan se recontrent en un point et forment un angle droit. On dit que deux droites sont orthogonales si l'une est parallèle à une perpendiculaire à l'autre (deux droites orthogonales peuvent ne pas se rencontrer). On dit qu'une droite et orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites du plan. On dit que deux plans sont orthogonaux si l'un des deux contient une droite orthogonale à l'autre.

Caractérisation : une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle elle est orthogonale à deux droites non parallèles de ce plan.

Remarque : si deux plans sont orthogonaux chacun des deux contient une droite orthogonale à l'autre.

Théorème 3. *Étant données deux droites non parallèles il existe une unique droite qui est perpendiculaire aux deux (on l'appelle la perpendiculaire commune).*

6. Symétries

La symétrie par rapport à un point I envoie un point M sur le point N tel que le milieu de $[M, N]$ soit le point I.

La symétrie par rapport à une droite envoie un point M sur le point N tel que MN est perpendiculaire à la droite et le milieu de $[M, N]$ est sur la droite.

La symétrie par rapport à un plan (appelée aussi réflexion) envoie un point M sur le point N tel que MN est orthogonale au plan et le milieu de $[M, N]$ est dans le plan.

Une symétrie par rapport à un point ou à un plan change l'orientation. Une symétrie par rapport à une droite ne change pas l'orientation (c'est une rotation d'un demi-tour autour de la droite).

Composition de symétries : Si on compose deux symétries par rapport à des plans parallèles on obtient une translation. Le vecteur de la translation est le double du vecteur $\overrightarrow{HK}$ orthogonal aux plans tel que H est dans le premier plan et K dans le deuxième.

Si on compose deux symétries par rapport à des plans qui se coupent suivant une droite D on obtient une rotation autour de cette droite (on dit aussi que D est l'axe de la rotation). L'angle de cette rotation est le double de l'angle de la rotation d'axe D qui envoie le premier plan sur le deuxième.

7. Polyèdres

Les polyèdres considérés ici sont tous convexes. Dans un polyèdre convexe, une arête est dans exactement deux faces, le nombre de côtés (arêtes) d'une face est au moins 3, un sommet est l'extrêmité d'au moins 3 arêtes et est le sommet d'au moins 3 faces. Précisément, si un sommet est l'extrêmité de q arêtes il est sommet du même nombre q de faces. De plus la somme des angles de ces faces est strictement inférieure à 2π (360 degrés).

Théorème 4 (Formule d'Euler, 1756)**.** *Notons s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces d'un polyèdre. Alors pour un polyèdre convexe on a*

$$s - a + f = 2.$$

Au cours de la preuve de ce théorème on a vu le résultat suivant :

Lemme 5. *Dans un triangle sphérique T (un triangle formé par trois grands cercles sur une sphère de rayon R) la somme des angles est égale à $\pi + aire(T)/R^2$.*

En particulier la somme des angles d'un triangle est toujours strictement supérieure à π.

Un polyèdre est appelé régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques et si tous ses sommets sont sur le même nombre d'arêtes. Il y a 5 polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre (4 faces triangulaires), le cube, l'octaèdre (8 faces triangulaires), le dodécaèdre (12 faces pentagonales) et l'icosaèdre (20 faces triangulaires).

8. Volumes

Quelques formules de volume :

(1) Le volume d'un cube de côté a est a^3.

(2) Le volume d'un parallélépipède rectangle de côtés a, b et c est abc.

(3) Le volume d'un prisme droit ou d'un cylindre est égal à l'aire de la base multipliée par la hauteur.

(4) Le volume d'une pyramide ou d'un cône est égal à $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{ hauteur}}{3}$.

(5) Le volume d'une sphère de rayon R est $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

9. Constructibilité

On peut construire à la règle et au compas la somme, le produit, la différence et le quotient de deux longueurs connues (en utilisant Thalès pour le produit et le quotient). On peut aussi construire la racine carrée d'une longueur connue en utilisant un triangle ABC rectangle en A, de hauteur AH et une des formules $AB^2 = HB.BC$ ou $AH^2 = BH.BC$. On peut prouver le résultat suivant :

Théorème 6. *À partir de deux points donnés à distance 1, on peut construire n'importe quelle longueur qui s'exprime à partir de 1 en n'utilisant que des sommes, des produits, des quotients, des différences et des racines carrées et ce sont les seules longueurs qu'on peut construire à la règle et au compas.*

On peut en déduire que les problèmes grecs de la duplication du cube, la quadrature du cercle et la trisection de l'angle sont impossibles. Pour ce qui est de la construction des polygones réguliers, on peut construire les pentagones par exemple. Wantzel (1837) a donné la liste des nombres premiers p pour lesquels ont peut construire un polygone régulier à p côtés : ce sont tous les nombres premiers de la forme $2^a + 1$. Gauss avait donné en 1796 la construction dans le cas de 17 côtés, contredisant ainsi Kepler (1619) qui pensait que ce n'etait pas possible.

Remarque : on ne sait pas combien il y a de tels nombres premiers : on en connait cinq, qui sont 3, 5, 17, 257, 65537, et personne ne sait s'il y en a d'autres !