Corrigé du partiel

I

On sait que $\frac{OA'}{AA'} = \frac{\text{Aire}(OA'C)}{\text{Aire}(AA'C)} = \frac{\text{Aire}(OA'B)}{\text{Aire}(AA'B)}$. Ceci s'écrit aussi

$$\text{Aire}(OA'C) = \frac{OA'}{AA'}\text{Aire}(AA'C) \text{ et } \text{Aire}(OA'B) = \frac{OA'}{AA'}\text{Aire}(AA'B).$$

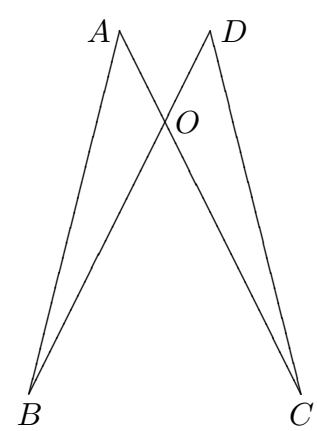
En ajoutant on obtient $\text{Aire}(OBC) = \frac{OA'}{AA'}\text{Aire}(ABC)$. On fait des calculs analogues pour obtenir $\text{Aire}(OAC) = \frac{OB'}{BB'}\text{Aire}(ABC)$ et $\text{Aire}(OAB) = \frac{OC'}{CC'}\text{Aire}(ABC)$. D'où

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{\text{Aire}(OBC) + \text{Aire}(OAC) + \text{Aire}(OAB)}{\text{Aire}(ABC)} = 1.$$

II

1. On a $\text{Aire}(BGF) = 2\text{Aire}(BGA')$ puisque A' est le milieu de $[GF]$. Comme $GA' = \frac{1}{3}AA'$, on a $\text{Aire}(BGA') = \frac{1}{3}\text{Aire}(BAA')$. Comme A' est le milieu de $[BC]$ on a $\text{Aire}(ABC) = 2\text{Aire}(BAA') = 6\text{Aire}(BGA') = 3\text{Aire}(BGF)$.
2. On sait que $BG = \frac{2}{3}BB'$ et $GF = 2GA' = \frac{2}{3}AA'$. D'autre part $BGCF$ est un parallélogramme car les diagonales BC et FG se coupent en leur milieu A'. Donc $BF = GC = \frac{2}{3}CC'$. Un triangle ayant longueurs de côtés les longueurs des médianes de ABC s'obtient donc à partir de BGF par une homothétie de rapport $3/2$, ce qui multiplie l'aire par $(3/2)^2 = 9/4$. L'aire de ce triangle est donc $\frac{9}{4}\text{Aire}(BGF) = \frac{3}{4}\text{Aire}(ABC)$.

III



Les triangles DCA et ABD ont le côté AD en commun, les côtés CA et BD égaux et les côtés CD et AB égaux. Ils sont donc égaux, d'où les égalité d'angles $\widehat{DCA} = \widehat{ABD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$. On en déduit que les triangles OAB et ODC sont égaux car ils ont deux angles égaux et les côtés AB et CD égaux. Donc $OA = OD$ et $OB = OC$.

Le point O est donc sur la médiatrice de $[AD]$ et sur la médiatrice de $[BC]$. Ces deux médiatrices sont donc la même droite, donc AD et BC sont parallèles.