Examen du 19 juin

durée 4 heures

I

On considère un système de Coxeter (W, S) avec S fini et l'espace E de la représentation géométrique de W. On note $(e_s)_{s\in S}$ la base canonique de E. On considère le cône de Tits associé dans E^*. On note C la chambre fondamentale définie par $e_s > 0$ pour tout s. On note B le groupe de tresses associé, identifié à un ensemble de classes de galeries avec signes dans le cône de Tits. On note $\{\,\underline{s} \mid s \in S\,\}$ les générateurs de B.

1. a) Soit J une partie de S et C_J la facette correspondante, définie par $e_s = 0$ pour $s \in J$ et $e_s > 0$ pour $s \in S - J$. Montrer qu'un mur contient C_J si et seulement s'il est défini par une forme linéaire du type $\sum_{s\in J} \lambda_s e_s$ avec $\lambda_s \in \mathbb{R}$.
   b) Que peut-on dire des murs d'une galerie dont toutes les chambres contiennent C_J dans leur adhérence ?
2. Pour toute partie J de S on note B_J le sous-groupe de B engendré par $\{\,\underline{s} \mid s \in J\,\}$. Soient J et K deux parties de S ; montrer que $B_J \cap B_K = B_{J\cap K}$.

II

Soit B un groupe de tresses de type sphérique, soit B^+ le monoïde de tresses correspondant et soit B^{red} l'ensemble des relevés canoniques des éléments du groupe de Coxeter associé. On note Δ l'élément de plus grande longueur de B^{red}. On considère le cône de Tits associé à la situation. Pour deux chambres C_1 et C_2 on note $u(C_1, C_2)$ la classe des galeries réduites d'origine C_1 et de but C_2.

1. Montrer qu'une galerie représente Δ si et seulement si c'est une galerie réduite telle que les deux extrêmités sont des chambres opposées.
2. Soient C et C' deux chambres ; montrer qu'il existe une galerie de type Δ d'origine C et dont une des chambres est C'.
3. Soient C et C' deux chambres. Montrer que

$$u(C, C')u(C', -C') = u(C, -C)u(-C, -C').$$

4. Déduire des questions précédentes que Δ^2 est dans le centre de B.

III

Le but de cet exercice est de montrer que dans un groupe de tresses de type sphérique aucun élément autre que 1 n'est d'ordre fini. On se place plus généralement dans le cadre d'une structure de Garside P telle que les éléments de P aient un ppcm. On note $M(P)$ le monoïde engendré et $G(P)$ le groupe engendré par P. On fixe un élément $x \in G(P)$ qu'on écrit $a_1^{-1}b_1$ avec a_1 et b_1 dans $M(P)$ sans diviseur commun non trivial à gauche. On définit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de $M(P)$ par l'égalité $b_{n-1}a_{n-1}^{-1} = a_n^{-1}b_n$ et la condition que a_n et b_n n'ont pas de diviseur commun non trivial à gauche.

1. Montrer que $x^n = a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_n^{-1}b_nb_{n-1}\dots b_2b_1$.
2. Montrer que pour tout k l'élément $a_kb_{k-1} = b_ka_{k-1}$ est le ppcm à gauche de a_{k-1} et b_{k-1}.
3. On suppose $x^n = 1$. Déduire des questions précédentes que pour tout $k \leq n$ l'élément $a_na_{n-1}\dots a_k$ est multiple à gauche de b_k et conclure.

IV

On considère un monoïde de tresses B^+ dont l'ensemble générateur (fini) est noté S. Étant donnés deux éléments s et t de S tels que m_{st} est fini, on note $\Delta_{st} = \underbrace{st\dots}_{m_{st}}$. On dit qu'un élément de B^+ est une chaîne élémentaire s'il est de la forme $b = \underbrace{sts\dots}_{k}$ avec s et t dans S et $k < m_{st}$. On appelle t la source de la chaîne et on appelle but de la chaîne l'élément s si b se termine par t et inversement. Une chaîne est un produit $b_1\dots b_k$ de chaînes élémentaires telles que le but de b_i soit la source de b_{i+1}. Par exemple dans un monoïde de tresses à trois générateurs r, s, t où la matrice de Coxeter est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ l'élément $(rs)(t)(sr)(tst)$ est un chaîne de source s et de but s.

1. a) Montrer que si $s \in S$, pour tout entier $k > 0$ et tout $t \in S - \{s\}$ l'élément t^k est une chaîne de source et de but s.
   b) Montrer que si b est une chaîne de source s et si b' est un élément de B^+ alors si s divise bb' à gauche, le but de b divise b' à gauche.
2. Soient t et s deux éléments distincts de S et b un élément de B^+. On suppose que t divise s^kb à gauche pour un certain entier $k > 0$. Montrer que m_{st} est fini et que Δ_{st} divise sb à gauche.
3. On veut montrer par récurrence sur la longueur de $b \in B^+$ que si pour un entier $k > 0$ on a $s^kb = bc$ avec $s \in S$ et $c \in B^+$ alors $c = t^k$ avec $t \in S$ tel que $sb = bt$.
   a) Montrer le résultat quand s divise b à gauche.
   b) Si s ne divise pas b à gauche, en écrivant $b = ub'$ avec $u \in S$ montrer que m_{su} est fini et que $sb = \Delta_{su}b_1$ pour un certain $b_1 \in B^+$, puis conclure.

V

On considère un groupe de Coxeter W (avec S fini) tel que l'intérieur du cône de Tits associé dans l'espace vectoriel réel V ($V = E^*$ dans les notations du cours) soit un demi-espace défini par $f > 0$ où f est une certaine forme linéaire non nulle sur V. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des murs de W dans V.

1. On considère l'hyperplan H de V d'équation $f = 1$. Montrer que cet hyperplan est stable par W.
2. Dans $(V \otimes \mathbb{C}) - (\cup_{M\in\mathcal{M}} M \otimes \mathbb{C})$ on considère l'ensemble Y des points dont la partie réelle est dans le cône de Tits. Montrer que la famille d'applications $z \mapsto (1-t)z + t\frac{z}{f(z)}$, pour $t \in [0, 1]$, définit une rétraction de Y sur $Z = (H \otimes \mathbb{C}) - (\cup_{M\in\mathcal{M}}(M \cap H) \otimes \mathbb{C})$. Que peut-on en déduire sur le groupe fondamental de Z ?