Corrigé de l'examen du 19 juin

I

1. a) Un mur M contient C_J si et seulement s'il contient le sous-espace engendré par C_J qui est le sous-espace défini par les équation $e_s = 0$ pour $s \in J$. La forme linéaire qui définit M est de la forme $\sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ avec $\lambda_s \in \mathbb{R}$ et elle doit s'annuler dès que les e_s pour $s \in J$ sont nuls. Ceci est réalisé si et seulement si les λ_s pour $s \notin J$ sont nuls.

   b) Si deux chambres mitoyennes contiennent C_J dans leur adhérence, le mur qui les sépare contient C_J car l'adhérence de chacune des chambres est dans le deux demi-espace fermé défini par ce mur qui contient le chambre et l'intersection des deux demi-espaces est le mur. Donc tous les murs d'une galerie dont les chambres contiennent C_J dans leur adhérence contiennent C_J, c'est-à-dire sont comme dans la question précédente.

2. On a évidemment $B_{J \cap K} \subset B_J \cap B_K$. D'autre part on sait que les éléments de B_J sont représentés par des classes de galeries avec signes dont toutes les chambres contiennent C_J dans leur adhérence. Si une telle galerie représente aussi un élément de B_K elle est équivalente à l'image réciproque de son image directe dans le cône de Tits du groupe de Coxeter W_K. Or le composé de l'image réciproque et de l'image directe consiste à supprimer les chambres qui sont séparées de la chambre précédente par un mur ne contenant pas C_K. On obtient donc une galerie dont toutes les chambres contiennent C_J et C_K dans leur adhérence. D'après la question précédente les murs de cette galerie sont définis par des formes linéaires du type $\sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ où les λ_s sont nuls pour $s \notin J$ et aussi pour $s \notin K$ donc les formes linéaires en question sont du type $\sum_{s \in J \cap K} \lambda_s e_s$ et les murs de la galerie contiennent tous $C_{J \cap K}$ donc les chambres contiennent $C_{J \cap K}$ dans leur adhérence, c'est-à-dire que la galerie représente un élément de $B_{J \cap K}$.

II

Rappelons que pour toute chambre C, on sait que $-C$ est une chambre puisque le type est sphérique.

1. Une galerie qui représente Δ est réduite puisque $\Delta \in B^{\mathrm{red}}$. L'image de Δ dans W est l'élément w_0 de plus grande longueur. Si C_0 est la chambre fondamentale une galerie réduite de but $w(C)$ représente le remonté dans B^{red} de w, donc une galerie réduite d'origine C_0 représente Δ si et seulement si son but est $w_0(C_0) = -C_0$. Une galerie réduite d'origine $w(C_0)$ représente donc Δ si et seulement si sont but est $w(-C_0) = -w(C_0)$. Pour une galerie d'origine $C = w(C_0)$ quelconque on se ramène par l'action de w au cas précédent.
2. Quitte à appliquer un élément de W, on peut supposer que C est la chambre fondamentale. On considère une galerie réduite G de C à C' et H une galerie réduite de C' à $-C$. Le composé des deux galeries est une galerie de C à $-C$, donc qui traverse tous les murs. Montrons qu'elle est réduite : un mur donné ne peut être traversé par G (resp. par H) qu'au plus une fois. Comme la galerie composée traverse tout les murs chacun d'eux ne peut être traversé qu'une fois, c'est-à-dire que c'est une galerie réduite.

3. Par la question précédente on a $u(C,-C) = u(C,C')u(C',-C)$ et de même $u(C',-C') = u(C',-C)u(-C,-C')$. D'où

$$u(C,C')u(C',-C') = u(C,C')u(C',-C)u(-C,-C') = u(C,-C)u(-C,-C').$$

4. En appliquant deux fois le résultat de la question précédente on obtient

$$u(C,C')u(C',-C')u(-C',C') = u(C,-C)u(-C,C)u(C,C').$$

ce qui, traduit dans le groupe de tresses, montre que Δ^2 commute avec les éléments de B^{red}. Comme ces éléments engendrent B on obtient le résultat.

III

1. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Faisons une récurrence sur n. On a par hypothèse de récurrence $x^{n-1} = a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-1}b_{n-1}b_{n-2}\dots b_2b_1$. Multiplions à droite par $x = a_1^{-1}b_1$. On obtient $x^n = a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-1}b_{n-1}b_{n-2}\dots b_2b_1a_1^{-1}b_1$. Ce qui s'écrit $a_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{n-1}^{-1}b_{n-1}\dots b_2a_2^{-1}b_2b_1$ et en itérant le procédé on obtient le résultat.
2. L'élément $a_kb_{k-1} = b_ka_{k-1}$ est multiple commun à gauche de a_{k-1} et b_{k-1}. Il est donc égal au produit à gauche par un élément z de leur ppcm que nous noterons $ub_{k-1} = va_{k-1}$. Après simplification on obtient $a_k = zu$ et $b_k = zv$, ce qui montre que $z = 1$ puisque a_k et b_k n'ont pas de diviseur commun non trivial à gauche.
3. On a $x^n = 1$ si et seulement si $b_n\dots b_2b_1 = a_n\dots a_2a_1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \le n$ l'élément $a_na_{n-1}\dots a_k$ est multiple à gauche de b_k. C'est vrai pour $k = 1$ d'après l'égalité ci-dessus. Si $a_na_{n-1}\dots a_{k-1}$ est multiple à gauche de b_{k-1} alors il est multiple à la fois de a_{k-1} et de b_{k-1} donc de leur ppcm b_ka_{k-1}. Après simplification par a_{k-1} on obtient que $a_na_{n-1}\dots a_k$ est multiple à gauche de b_k.
   En particulier a_n est mltiple de b_n. Comme l'égalité de départ est symétrique on peut échanger les rôles de a_k et de b_k, donc b_n est multiple de a_n, ce qui donne $a_n = b_n$, ce qui n'est possible que si $n = 1$ et $a_n = b_n = 1$.

IV

1. a) Comme s est distinct de t l'élément t est une chaîne élémentaire de source et but s, donc t^k est une chaîne de source et but s.
   b) Par récurrence sur le nombre de chaînes élémentaires dont b est produit on est ramené à montrer le résultat pour une seule chaîne élémentaire. On a alors $b = \underbrace{tst\dots}_{k}$ où le nombre de facteurs est strictement inférieur à $m_{s,t}$. Si s divise bb', comme t divise aussi bb' on obtient que m_{st} est fini et que $\Delta_{st} = \underbrace{tst\dots}_{m_{st}}$ divise $bb' = \underbrace{tst\dots}_{k}b'$. Par simplification par b on obtient le résultat.
2. On peut appliquer ce qui précède car s^{k-1} est un chaîne de source et but t d'après la question 1. Donc t divise sb. Comme s divise aussi sb on en déduit que m_{st} est fini et que Δ_{st} divise sb à gauche.
3. Le résultat est vrai si $l(b) = 0$. Dans ce cas on a $b = 1$ et $s = t$. On fait une récurrence sur la longueur de $b \in B^+$. Supposons la propriété vraie pour les éléments de longueur strictemebt inférieure à $l(b)$.
   a) Si s divise b à gauche on écrit $b = sb'$, d'où $s^kb' = b'c$ par simplification par s. On applique l'hypothèse de récurrence à b' ce qui donne $c = t^k$ et $sb' = b't$. En multipliant par s on obtient $sb = bt$.

b) Si s ne divise pas b à gauche, on écrit $b = ub'$ avec $u \in S - \{s\}$. Donc u divise $s^k b = ub'c$, et par la question 2 Δ_{su} divise sb à gauche. On écrit $sb = \Delta_{su} b_1$ pour un certain $b_1 \in B^+$ et on a $s^{k+1} b = s^k \Delta_{su} b_1 = sbc$, ce qui s'écrit $s^k \Delta_{su} b_1 = \Delta_{su} b_1 c$. Comme $s\Delta_{su} = \Delta_{su} r$ où r vaut s ou u suivant la parité de m_{su}, on obtient $r^k b_1 = b_1 c$ ce qui par récurrence donne $c = t^k$ avec $t \in S$ et $rb_1 = b_1 t$, donc $s\Delta_{su} b_1 = \Delta_{su} b_1 t$, d'où $sb = bt$ après simplification par s.

V

1. L'image de H par $s \in S$ est un hyperplan inclus dans le cône de Tits puisque H est inclus dans le cône de Tits. Or les seuls hyperplans affines inclus dans un demi-espace sont les hyperplans parallèles à la frontière. D'autre part H rencontre l'hyperplan des points fixes de s car cet hyperplan contient l'origine et n'est pas la frontière du cône de Tits. Donc H est tranformé en un hyperplan parallèle à H qui rencontre H, donc H est stable par s. Comme les éléments s engendrent W on obtient le résultat.
2. Notons φ_t l'application $z \mapsto (1-t)z + t\frac{z}{f(z)}$. On a $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et $f(\varphi_1(z)) = f(\frac{z}{f(z)}) = \frac{f(z)}{f(z)} = 1$, donc $\varphi_1(z) \in H$ pour tout z. De plus si $z \in H$ on a $f(z) = 1$ donc $\varphi_t(z) = z$ pour tout t.

   On a $\mathrm{Re}(\varphi_t(z)) = (1-t)\,\mathrm{Re}(z) + t\frac{zf(\overline{z}) + \overline{z}f(z)}{2|f(z)|^2}$. Donc si $\mathrm{Re}(z)$ est dans l'intérieur du cône de Tits on a $f(\mathrm{Re}(\varphi_t(z))) = (1-t)f(\mathrm{Re}(z)) + t > 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Re}(\varphi_t(z))$ est dans l'intérieur du cône de Tits. D'autre part si g est une forme linéaire définissant un hyperplan $M \in \mathcal{M}$, on a $g(\varphi_t(z)) = [(1-t)f(z) + t]\frac{g(z)}{f(z)}$. Si $\mathrm{Re}(z)$ est dans l'intérieur du cône de Tits on a vu que $(1-t)f(z) + t \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, puisque sa partie réelle est strictement positive, donc si de plus $z \notin M$ on a $[(1-t)f(z) + t]g(z) \neq 0$, donc $\varphi_t(z) \notin M$ pour tout t. On a montré que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z \in Y$ on a $\varphi_t(z) \in Y$ en particulier $\varphi_1(z) \in Z$. Donc Z est un rétracte par déformation de Y, ces deux espaces ont donc des groupes fondamentaux isomorphes, donc le groupe fondamental de Z est isomorphe au groupe de tresses pur.