

Exercices.

Exercice 1 [Po] Montrer qu'une norme sur un espace vectoriel normé n'est jamais différentiable.

Exercice 2 Considérons l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$. Soit $p > 0$. Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^p$ est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 3 [Po] Montrer que l'application $f : \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est \mathcal{C}^1 et donner sa différentielle.

Exercice 4 [Ni] Soit $f : U \rightarrow V$ une fonction définie sur un ouvert V de \mathbb{R}^p , à valeurs dans un ouvert U de \mathbb{R}^q , différentiable au point $a \in U$. On suppose que f admet une fonction réciproque $g : V \rightarrow U$ différentiable au point $b = f(a)$. Montrer que $p = q$.

Exercice 5 [ADF] Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0, 0) = 0$ et pour tout $(x, y) \neq 0$,

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{|x|^\alpha + |y|^\beta}{x^2 + y^2}\right),$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Pour quels couples (α, β) la fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 6 [ADF] Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la différentiabilité et préciser les plus grands ouverts où elle est de classe \mathcal{C}^1 .

(1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$ et $f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2 + y^2 (\sin x)^2}$ pour tout (x, y) tel que $(\cos x)^2 + y^2 (\sin x)^2 \neq 0$, et sinon $f(x, y) = 0$.

(3) $f :]-1, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{(1+x)^y - 1}{\ln(1+x)}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 [Go] Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$, est dérivable selon tout vecteur au point $(0, 0)$, mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 8 [Go] On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et, si $(x, y) \neq 0$,

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 9 [Go] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en 0 et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul et tout $t > 0$ on ait $f(tx) = tf(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 10 [Po] Montrer que l'application déterminant, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , est de classe \mathcal{C}^∞ et déterminer sa différentielle.

Exercice 11 Calculer le gradient de $x \mapsto \|x\|^2$ et $x \mapsto \|x\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .

Exercice 12 [Go] Etudier les extremums de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Exercice 13 (Principe du maximum) [Go] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On définit le laplacien de f par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On note D la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n et \overline{D} la boule unité fermée de \mathbb{R}^n .

- (1) Si $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in D$, montrer que pour tout $x \in D$ on a $f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y)$.
- (2) Si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ (on dit alors que f est harmonique sur D), montrer que pour tout $x \in D$,

$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y).$$

Exercice 14 [ADF] Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 .

- (1) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a \in U$, la forme bilinéaire $D^2 f(a)$ est positive.
- (2) Montrer que si la forme bilinéaire $D^2 f(a)$ est définie positive alors f est strictement convexe.

REFERENCES

- [ADF] J.-M. Arnaudiès, P. Delezoide, H. Fraysse, *Exercices résolus des compléments d'analyse du cours de mathématiques-3*, Eds Dunod.
- [Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*, Eds Ellipses.
- [Ni] L. Niglio, *Fonctions de plusieurs variables*, Eds Dunod.
- [Po] A. Pommelet, *Agrégation de mathématiques, Cours d'analyse*, Eds Ellipses.