Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Soit F définie par $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(tx)}{1+t^2}dt$.
   a) Montrer que F est définie sur IR de deux façons différentes.
   b) Montrer que F est continue sur IR^*.
   c) On rappelle que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. Montrer que F n'est pas continue en 0.

2. Soit $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1+x^2-2x\cos t\right)dt$.
   a) Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$ et que $F'(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2(x-\cos t)}{1+x^2-2x\cos t}dt$.
   b) Calculer F' et en déduire F.

3. Soit $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{t\left(1+t^2\right)}dt$
   a) Montrer que F est continue et dérivable sur IR et calculer F' .
   b) En déduire F.

4. Soit $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)e^{-t}}{t}dt$
   c) Montrer que F est continue et dérivable sur IR et calculer F' .
   d) En déduire F.

5. Soit $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$ et , pour $x>0$, $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}f(t)dt$.
   a) Montrer que F est définie sur $]0,+\infty[$.
   Calculer F (on pourra écrire f comme la partie réelle d'une fonction g plus facile à manipuler).

6. Soit $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$.
   a) Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   c) Montrer que f est équivalente à $\frac{\ln 3}{2x}$ au voisinage de $+\infty$ et à $\frac{\ln 2}{x}$ au voisinage de 0.
   (On pourra faire le changement de variables $u=t^x$ et montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u\left(u+1+u^{-\frac{1}{x}}\right)}$
   admet des limites en 0 et en $+\infty$)