

Théorème fondamental de la géométrie affine

Le but de cette suite d'exercices est de démontrer le théorème fondamental de la géométrie affine : soit E un espace affine de dimension finie au moins 2 sur \mathbb{R} et f une application bijective de E dans lui-même telle que les images de trois points alignés soient trois points alignés; alors f est une application affine.

1. Montrer que si A, B, C sont des points non alignés de E et si D est tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ alors $f(D)$ est dans le sous-espace affine engendré par $f(A), f(B)$ et $f(C)$. En déduire que l'image par f du sous-espace affine engendré par k points $A_1 \dots A_k$ est incluse dans le sous-espace affine engendré par les images de ces points. En prenant pour k la dimension de E en déduire que f envoie des points affinement indépendants sur des points affinement indépendants.
2. Montrer que les images par f de deux droites parallèles sont deux droites parallèles et en déduire en utilisant la question précédente que si A, B, C, D sont des points de E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(A)f(C)}$.
3. Montrer que si on a quatre points A, B, C , et D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$.
4. En déduire l'existence d'une application \vec{f} sur les vecteurs associée à f , bijective et additive.
5. Soit v un vecteur non nul fixé; montrer qu'on définit une bijection σ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} en posant $\vec{f}(av) = \sigma(a)\vec{f}(v)$ pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que σ est un automorphisme de \mathbb{R} (on utilisera une construction géométrique faisant apparaître le produit de deux réels donnés).
6. Montrer que le seul automorphisme de \mathbb{R} est l'identité : on montera d'abord qu'un automorphisme σ de \mathbb{R} est l'identité sur \mathbb{Q} puis que σ envoie un réel positif sur un réel positif (utiliser que l'image d'un carré est un carré). Conclure.