Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation interne

Exercices sur les polynômes

1. Le polynôme X^4+1 est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Soient m et n deux entiers strictment positifs. Quel est le PGCD des polynôme X^n-1 et X^m-1 dans $\mathbb{Q}[X]$?
3. Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels tel que $P(a)>0$ pour tout a réel. Montrer que les racines réelles de P ont une multiplicité paire. En déduire qu'on peut regrouper les racines de P dans $\mathbb{C}$ en deux ensembles E et E' de même taille tels que si $a \in E$ alors $\bar{a} \in E'$. On note F le polynôme unitaire qui a comme racines les éléments de E et G le polynôme unitaire qui a comme racines les éléments de E'. Montrer que $P=FG$ et que F et G sont conjugués. En déduire que si Q est la partie réelle de F et R la partie imaginaire de F on a $P=Q^2+R^2$.
4. Soit $P=X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$ un polynôme à coefficients entiers. Montrer que toutes racine de P dans $\mathbb{Q}$ est en fait dans $\mathbb{Z}$ et divise le coefficient a_n.