Mathématiques Financières

3ème partie – Marchés financiers en temps discret & instruments financiers dérivés

Université de Picardie Jules Verne – Amiens

Par Jean-Paul FELIX

Cours du vendredi 19 février 2010

Proposition :
Les « **actifs dérivés** » sont, de façon générale, des contrats de vente ou d'achat d'actifs financiers de base sous des contraintes particulières. L'actif de base est appelé « **actif sous-jacent** »

- Contrairement à la partie précédente, il ne sera pas proposé une description des différents actifs dérivés que l'on peut trouver sur les marchés financiers
- Nous concentrerons l'étude sur les méthodes d'évaluation de ces produits

Modèles à 2 dates et 2 états du monde *(1/9)*

- Nous allons étudier le cas d'un marché financier à deux dates, la date 0 et la date 1, dans le cas où il n'y a que deux états du monde possibles à la date 1

- Le marché financier étudié comporte une action et un placement sans risque
  - A la date 0, l'action vaut S euros
  - A la date 1, l'action vaudra S_h ou S_b euros avec $S_b < S_h$ suivant que son prix montera ou descendra, ce qui n'est pas connu à la date 0
  - On a coutume de dire que l'action vaut S_h ou S_b euros selon « l'état du monde ». On notera S_1 la valeur du prix à la date 1

- Le placement sans risque a un taux de rendement égal à r (avec $r > 0$)
  - un euro placé aujourd'hui rapportera 1+r euros à la date 1 (quel que soit l'état du monde).

- On considère un actif financier C dont la valeur à la date 1 est C_h dans l'état haut, et C_b dans l'état bas
- Le problème de l'évaluation du produit (on dira souvent actif contingent) est de déterminer son prix « q »
  - c'est à dire le prix que l'on doit payer (resp. recevoir) en 0 pour acheter (resp. vendre) le droit de recevoir (resp. l'obligation de délivrer) C à la date 1
- Les exemples les plus connus sont les **options européennes**
  - qui confèrent à leur détenteur (après un paiement à la date 0) le droit d'acheter à la date 1, une action à un prix K fixé à la date 0, ce qui correspond au droit de recevoir « $(S_h - K)^+ = \text{Max}(S_h - K)$ » à la date 1, dans l'état haut et $(S_b - K)^+$ dans l'état bas

- Nous rappelons qu'une opportunité d'arbitrage se produit si, avec un capital initial négatif ou nul, l'agent peut réaliser une richesse positive à la date 1 et strictement positive dans un état du monde
- Autrement dit, une **OA**, défini par l'actif sans risque et l'action, est un triplet (x,α,β) tel que :

$$\boxed{\alpha+\beta S=x\leq 0}$$

Capital initial négatif ou nul

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha(1+r)+\beta S_1\geq 0\\ \alpha(1+r)+\beta S_1\neq 0\end{array}}$$

Richesse positive, voir strictement dans un état du monde

Où α est la somme placée (ou empruntée) sur l'actif sans risque et β est le nombre d'actions que l'investisseur détient (α et β sont de signe quelconque : nous pouvons vendre à découvert (*) l'action et/ou emprunter de l'argent ; α et β varient dans R, c'est à dire que l'on ne leur impose pas d'être des nombres entiers).

(*) Vendre à découvert : vendre une action que nous n'avons pas en portefeuille

Modèles à 2 dates et 2 états du monde (4/9)

- Nous faisons généralement l'hypothèse que de telles opportunités n'existent pas
- Nous pouvons remarquer que l'hypothèse $S_b \leq (1+r)S \leq S_h$ correspond à une absence d'opportunité d'arbitrage
- Si $S_b - (1+r)S > 0$, l'agent peut, à la date 0, emprunter S au taux r et acheter l'action au prix S. A la date 1, il revend l'action au prix S_b et rembourse son emprunt, soit (1+r)S
- Il a donc gagné $S_b - (1+r)S$
- Il est facile de faire un raisonnement analogue dans le cas $S_h < (1+r)S$

- Un portefeuille est formé d'un couple (α,β). Si (α,β) est le portefeuille détenu à la date 0, sa valeur en euros est « $\alpha + \beta S$ »

  A la date 1, la valeur du portefeuille est :

$$\begin{cases} \alpha(1+r)+\beta S_b & \text{, si l'on est dans l'état du monde bas,} \\ \alpha(1+r)+\beta S_h & \text{, si l'on est dans l'état du monde haut.} \end{cases}$$

- Le portefeuille **duplique** C si sa valeur à l'instant 1 est égale à la valeur de C, ceci quel que soit l'état du monde, i.e. si l'on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha(1+r)+\beta S_h = C_h \\ \alpha(1+r)+\beta S_b = C_b \end{cases}$$

Modèles à 2 dates et 2 états du monde *(6/9)*

- Nous obtenons sans peine, en résolvant ce système linéaire un couple (α^*,β^*) tel que :

$$\alpha^* = \frac{1}{1+r} * \frac{C_b S_h - C_h S_b}{S_h - S_b}$$

$$\beta^* = \frac{C_h - C_b}{S_h - S_b}$$

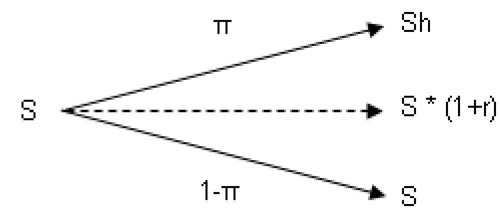
- Et le prix de C est donnée par, où $\pi = \frac{1}{S_h - S_b}\left((1+r)S - S_b\right)$:

$$q = \alpha^* + \beta^* S = \frac{1}{1+r}\left(\pi C_h + (1+\pi) C_b\right)$$

Modèles à 2 dates et 2 états du monde (7/9)

- Si $S_b \leq (1+r)S \leq S_h$, il est facile de vérifier que $\pi \in [0,1]$, et ce nombre va s'interpréter en terme de probabilité. La formule précédente s'écrit alors :

$$\boxed{(1+r)S = \pi S_h + (1-\pi) S_b}$$



- Le premier membre de l'équation ci-dessus est le gain réalisé en investissant S euros dans un placement sans risque
- Le second membre est l'espérance du gain réalisé en achetant une action au prix de S euros, si l'état du monde « à la hausse » est affecté de la probabilité π, et l'état « bas » de la probabilité $(1-\pi)$

Proposition 1 :

Cette équation traduit que nous sommes dans un modèle « **neutre par rapport au risque** » : l'investisseur sera indifférent entre les deux possibilités de placement (sans risque ou risqué) puisque son gain sera (en espérance) le même.

Proposition 2 :

Le prix de l'actif contingent C est l'espérance de sa valeur actualisée par rapport à la probabilité « risque neutre », soit $E_\pi\left(C/(1+r)\right)$

Voir exemple simplifié

La notion de changement de probabilité

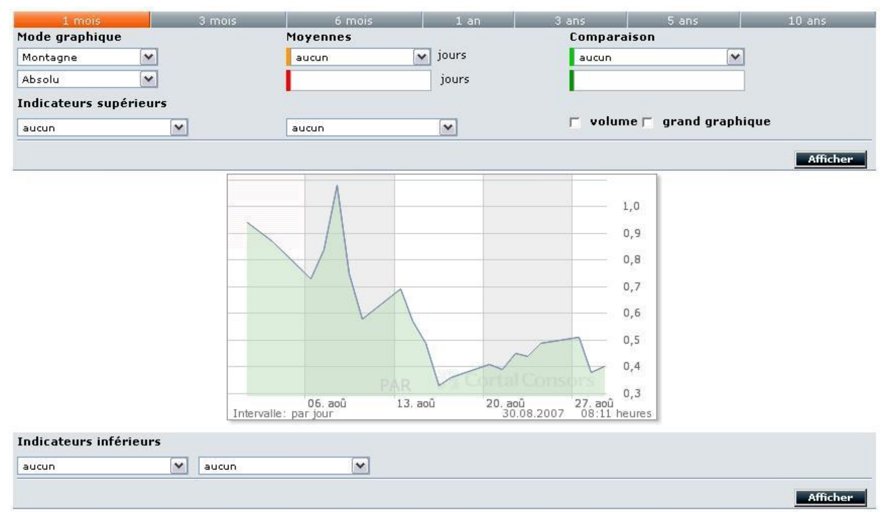
- Soit S_1 la variable aléatoire représentant le prix de l'action à la date 1 (prenant les valeurs S_h et S_b) et p la probabilité que le « prix monte », soit « $p = P(S_1 = S_h)$ ».
- Sous la probabilité historique : $E_p(S_1) = pS_h + (1-p)S_b$
- Nous remarquons que $E_\pi(X) = E_p(LX)$,
- où L est une variable aléatoire qui vaut π / p dans l'état haut,
- et $(1-\pi)/(1-p)$ dans l'état bas. Cette variable aléatoire est d'espérance 1 sous la probabilité historique.
- La formule $E_\pi(X) = E_p(LX)$ s'interprète comme un **changement de probabilité**

Définition :

Une option d'achat (**call**) est un instrument financier (un contrat) par lequel, l'acheteur de l'option paye à la date 0, une somme C (la prime ou le premium) qui lui donne le droit, mais non l'obligation, d'acheter à une date T (que l'on appelle maturité, fixée lors de la signature du contrat à la date 0), une action (on parle de sous-jacent) à un prix K (prix d'exercice ou « strike ») fixé lors de la signature du contrat.

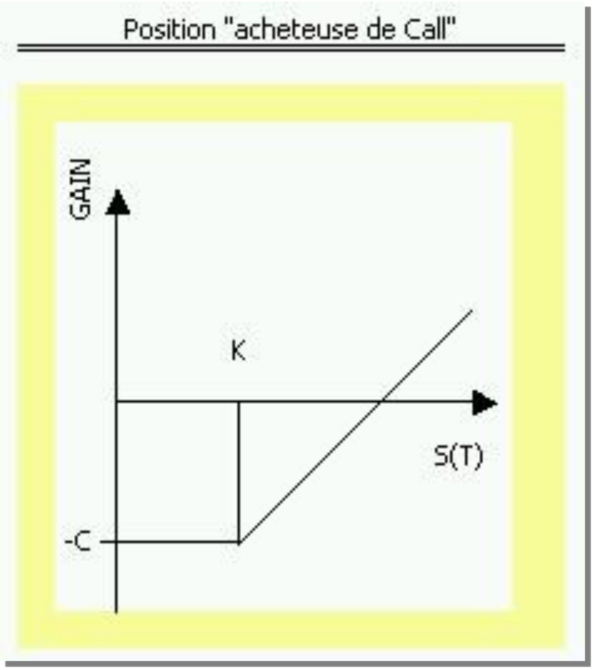
Important

Le Call donne le droit, mais non l'obligation d'acheter

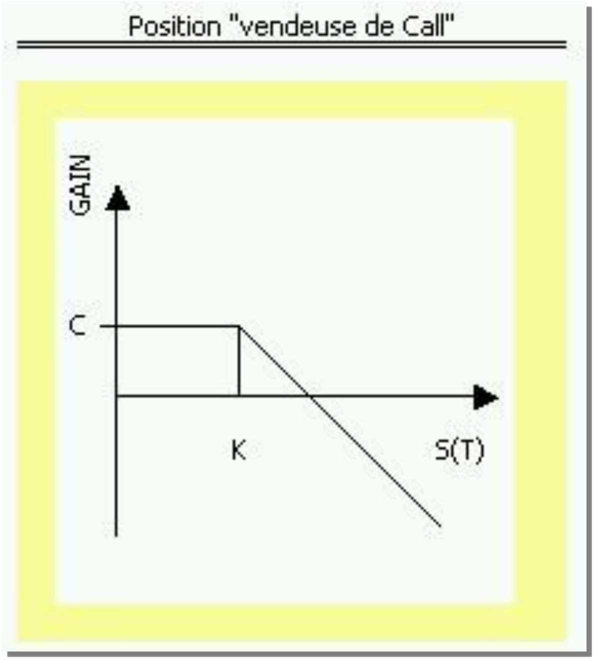


Les options d'achat (2/4)

- Au moment (à la date T), où il prend la décision d'exercer ou non l'option, le détenteur de l'option a connaissance du prix réel du sous-jacent que nous notons S_T.
- Si le prix de l'action à la date T est plus grand que K (i.e. si $S_T \geq K$), le détenteur de l'option achète l'action au prix convenu K ; et la revend immédiatement au prix S_T (réalisant ainsi un gain) ; sinon il n'achète pas.
- L'acheteur peut ainsi réaliser un gain illimité, ses pertes étant limitées à C.



- Le vendeur de l'option (le « writer ») prend l'engagement de livrer l'action si l'acheteur décide d'exercer. Il est soumis à la décision de l'acheteur
- Si ce dernier abandonne son droit, le vendeur conserve le premium. Sinon, il perd la différence entre le prix de l'action et le prix d'exercice
- Le vendeur du call a un bénéfice borné par C, et peut avoir une perte infinie
- L'acheteur espère une hausse des cours, le vendeur croît à une baisse.



Les options d'achat *(4/4)*

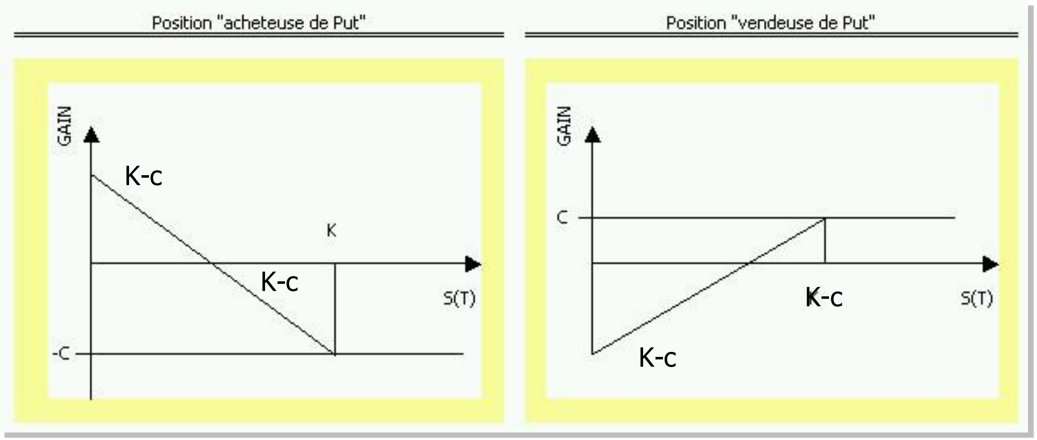
- Une **option** est un actif financier, et est à ce titre négociable sur le marché ; elle possède donc une valeur à chaque instant t
- Le problème de valorisation (« **pricing** ») est de déterminer C, ainsi que la valeur C(t) de l'option à tout instant t avant maturité
- Notons S_t la valeur du sous-jacent à la date t, avec $t < T$

Définition :
La quantité $(St - K)^+$ est la **valeur intrinsèque**(*) de l'option d'achat
- si cette quantité est strictement positive, l'option est « in the money »
- si St = K, l'option d'achat est « at the money »
- si St < K, l'option d'achat est « out of the money ».

(*) Aussi appelée **Payoff** de l'option

Définition :
Une option de vente (**put**) est un instrument financier par lequel, l'acheteur de l'option paye à la date 0, une somme P qui lui donne le droit, mais non l'obligation, de vendre à une date T (maturité) une action, à un prix K (prix d'exercice) fixé lors de la signature du contrat

Gain = max(0,K-S)-c



Gain = c-max(0,K-S)

Exercice 1 :

Vous achetez au prix de 6€ un put de strike « K = 50€ ».

- Allez-vous exercer l'option ?
- Quel est le gain/perte, si le prix final du sous-jacent est
  - a) 40, B) 45, C) 50, D) 55, et E) 60 ?

Exercice 2 :

A la date t=0, on suppose qu'un sous-jacent vaut « St=0 = 61€ »
Vous achetez un call de strike « K = 60€ » au prix de 4, et
Vous vendez un call de strike « K = 65€ » au prix de 2€.

- Déterminer la valeur du portefeuille à maturité t = T
  - si St=T = 57€ et St=T = 63€.

Théorème :
Soit C le prix d'une option d'achat et P le prix d'une option de vente de mêmes caractéristiques (sous-jacent, taux sans risque, maturité, prix d'exercice). Alors :

$$C = P + S - K/(1+r)^{maturite}$$

Un exemple d'opportunité d'arbitrage

- Considérons les options européennes call et put sur une action de caractéristiques suivantes:
  - les options sont de maturité 3 mois, de prix d'exercice « K = 100€ », le prix de l'action est « S = 100€ », le facteur d'actualisation à 3 mois vaut 0,98 (ce qui implique que la valeur actualisée du prix d'exercice « VA(K) = 98€ »), les prix du put et du call sont « P = 3€ » et « C = 5,5€ ».
  - Nous obtenons alors P + S = 103 < C + VA(K) = 103,5
- Le portefeuille d'arbitrage consiste à acheter le put et l'action, emprunter VA(K) et vendre le call
- Ce portefeuille procure un cash-flow positif aujourd'hui (de valeur 0,5) avec aucun coût à maturité.

Appliquons la règle de duplication d'un actif contingent et on trouve

$$C=\boxed{\frac{1}{1+r}E_{\pi}\left(\left(C_1-K\right)^+\right)}=\boxed{\frac{1}{1+r}\left[\pi\left(S_h-K\right)^+ +\left(1-\pi\right)\left(S_b-K\right)^+\right]}$$

Le prix de l'actif contingent est égal à l'espérance de gain actualisée sous la PRN

C1 vaut Sh dans l'état haut, et Sb dans l'état bas avec π la PRN

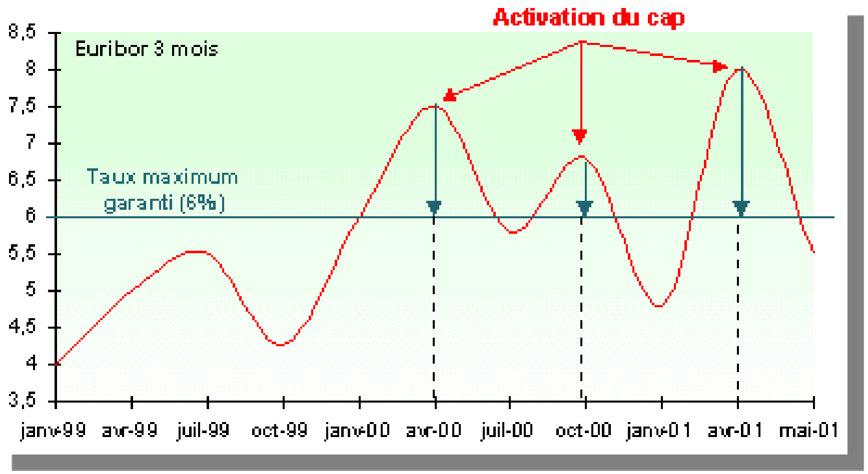
- Comme pour les dérivés actions, nous envisageons des actifs de taux optionnels
  - Dans ce cas, nous ne pouvons plus obtenir une formule de valorisation ne dépendant que de la courbe des taux.
  - Désormais, la volatilité interviendra et donc de fait un modèle devra être spécifié

- Bien que n'étant pas à proprement parler des options(*), les caps et floors sont généralement rangés dans la même catégorie
  - Les caps et floors sont les équivalents de calls et des puts

(*) Les options sur actifs de taux d'intérêt sont aussi appelées options de 1ère génération

Définition :
Un **cap** est un contrat où le vendeur promet de rétribuer son porteur, si le taux d'intérêt de référence vient à dépasser un niveau pré déterminé (le taux d'exercice du cap) à certaines dates dans le futur.

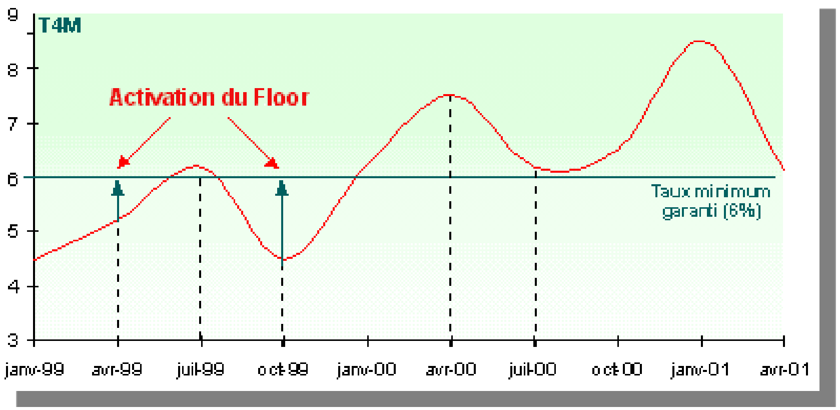
- L'acheteur d'un cap utilise classiquement ce produit pour se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt
- Par exemple pour couvrir un prêt à taux variable consenti par une banque.



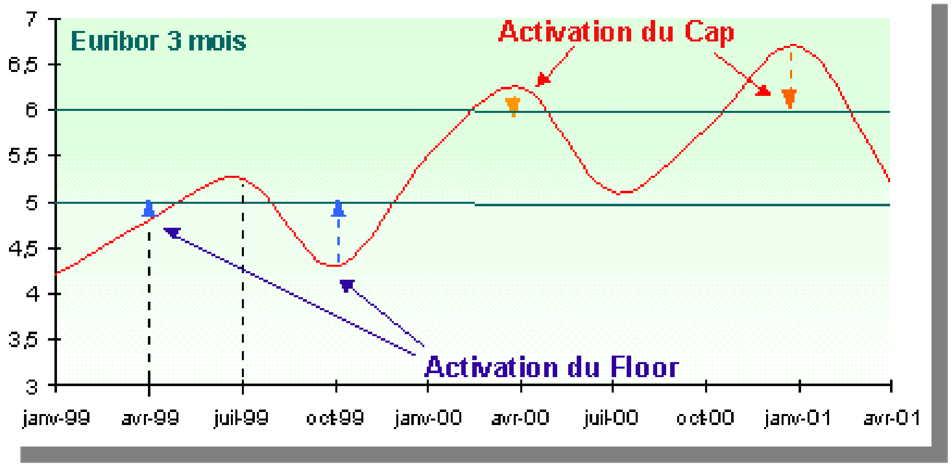
Les floors

Définition :
Le vendeur d'un **floor** promet de rétribuer son porteur, si le taux de référence vient de passer sous le taux d'exercice du floor.

- L'acheteur d'un floor utilise classiquement ce produit pour se couvrir contre une baisse des taux d'intérêt
- Par exemple pour couvrir un placement à taux variable.



Définition :
Un **collar** résulte de l'achat d'un cap et de la vente d'un floor (1), ou de la vente d'un cap et de l'achat d'un floor (2).
Il est utilisé le coût d'une protection contre la hausse (1) et la baisse des taux (2).



Caractéristiques des options de taux

Montant Nominal	Il est fixe en général
Taux de référence	Il s'agit du taux d'intérêt sur lequel repose le contrat. Les plus usuels en Europe sont l'Euribor 1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an.
Taux d'exercice	Il s'agit d'un niveau pré déterminé. Il reste fixe au cours du contrat.
Fréquence de constatation	Il s'agit de la fréquence selon laquelle le taux de référence est comparé au taux d'exercice. Les fréquences les plus usuelles sont tous les 3 mois, tous les six mois, tous les ans.
Maturité de l'option	Elle peut aller de plusieurs mois jusqu'à 30 ans.
Prime	Elle est exprimée en % du montant nominal

- Une entreprise envisage d'effectuer un financement à hauteur de 5 millions d'euros par des tirages à court terme renouvelés (crédits spots à 3 mois) et souhaite se couvrir contre une hausse des taux

- Elle achète un cap de 5 millions d'euros avec un taux plafond de 6% sur 2 ans, et un taux de référence EURIBOR 3 mois

  - La prime égale à « 0,24%* flat du montant » (5 millions x 0,24% = 12 000 euros) est payée immédiatement. Elle s'assure ainsi un taux maximum (hors marge bancaire) de :

    « 6% + 0,12% (impact annuel de la prime) = 6,12% »

  - A chaque date de constat (tous les 3 mois pendant 2 ans), la banque compare le niveau de l'EURIBOR 3 mois au taux plafond de 6%.

- Mise en œuvre du contrat
  - Si l'EURIBOR 3 mois est inférieur à 6%, le contrat n'est pas mis en œuvre : l'entreprise effectue son emprunt aux conditions du marché, son coût final étant majoré de la prime payée à l'origine
  - Si l'EURIBOR est supérieur à 6%, par exemple 7%, la banque versera 7% - 6% = 1% de différentiel rapporté à la durée
  - Le coût global maximum (hors marge bancaire) revenant ainsi à 6,12%

Évaluation des caps et des floors (1/2)

- Les caps se décomposent en somme de caplets, et les floors en somme de floorlets

Définition :
un **caplet** est une option qui délivre un flux égal à la différence – si elle est positive - entre un taux de marché et un taux d'exercice.

Définition :
un **floorlet** est une option qui délivre un flux égal à la différence – si elle est positive - entre un taux d'exercice et un taux de marché.

Évaluation des caps et des floors (2/2)

- Soit un cap avec échéancier, $cap_t = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j$
- Le payoff d'un caplet à la date T_j étant $C_j = \delta\left(R^L\left(T_{j-1},\delta\right) - E\right)^+$
- Nous obtenons :

$$cap_t = \sum_{j=1}^{n} E_Q\left[\exp\left(-\int_t^{T_j} r_s\, ds\right)\delta\left(R^L\left(T_{j-1},\delta\right) - E\right)^+\right]$$

- La valeur du cap est bien la somme de la valeur des caplets, soit la somme des espérances (risque neutre) des payoff actualisés à chaque pas de temps
- Cette formule ne peut explicitement être calculer que si nous avons spécifié un modèle particulier dans lequel nous connaissons les densités des variables aléatoires qui apparaissent dans l'espérance