Mathématiques Financières

4ème partie - Marchés financiers en temps continu & modélisation des actions

Université de Picardie Jules Verne – Amiens

Jean-Paul FELIX

Cours de février – mars 2010

1. **Pré-requis de Probabilités**

2. **Modèle de Black & Scholes**

   Cette partie sera dédiée à une présentation du modèle de Black & Scholes, modèle le plus populaire en temps continu.

Lemme : (Lemme d'Itô)

Soient les processus continus X et Y qui satisfont :

$$\begin{cases} dX_t = b_X(t, X_t)dt + \sigma_X(t, X_t)dW_t \\ Y_t = f(t, X_t) \end{cases}$$

Alors :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, X_t)\sigma_X^2(t, X_t)dt$$

- Exercice 1 : écrire le processus $X_t = W_t^2$ comme un processus d'Itô en précisant son drift et son coefficient de diffusion
- Exercice 2 : de même pour le processus $X_t = t + \exp(W_t)$

Théorème : (Théorème de Girsanov)

Soit W(t) un mouvement brownien sous la probabilité P, et définissons L(t) comme suit, pour t ≤ T :

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\,ds\right\}$$

Si EP(LT) = 1, le processus L(t) est une P-martingale

Si Q = L(T).P (i.e. si EQ(X) = EP(XLT) pour toutes variables X FT-mesurable), alors :

$$\overline{W}(t) = \left(W(t) - \int_0^t \theta(s)\,ds\right)$$

est un Q-mouvement brownien.

Proposition : (Notion de martingale)

X est une Ft-martingale si et seulement si , pour $s \leq t$:

$$E\left(X_t \middle| F_s\right) = E_s\left(X_t\right) = X_s$$

- Nous sommes en temps continu et nous nous plaçons dans un univers à horizon fini T
  - Nous sommes en t
- Sur le marché coexistent deux actifs liquides (actifs de base) :
  - L'actif sans risque « M »
  - L'actif risqué « S »
- Les prix de ces deux actifs suivent sous la probabilité historique P, les diffusions suivantes :

$$\begin{cases} dM_t = M_t \left(r\, dt \right) \\ dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dW_t \right) \end{cases}$$

  - Où $\left(W_t, t \geq 0 \right)$ est un mouvement brownien, et où μ et σ sont constants.

- Les prix de ces deux actifs suivent sous la probabilité historique P, les diffusions suivantes :

$$M_t = e^{rt}$$
$$S_t = x\exp(\mu t)\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

- En particulier, nous avons $E(S_t) = xe^{\mu t}$
- Le coefficient « μ » mesure le comportement global de S (on le nomme « drift »), alors que le coefficient « σ », appelée volatilité du prix, mesure l'importance du bruit.
- Ainsi, plus « σ » est grand, et plus la partie brownienne aura d'importance.

- Nous désirons évaluer, au temps t, un actif payant $h(S_T)$ en T

Définition

Un « portefeuille » est un couple (α,θ) , tel que « α (t) » est le nombre de parts obligataires et « θ (t) » le nombre de parts de l'actif risqué

$$V_t = \alpha_t M_t + \theta_t S_t$$

- A la date t, le portefeuille a pour valeur :

Définition

Un portefeuille est une « stratégie de trading » si sa valeur terminale est égale à h(ST)

$$\alpha_T M_T + \theta_T S_T = h(S_T)$$

Définition

Un portefeuille est « **auto finançant** » si

$$d(V_t) = d(\alpha_t M_t + \theta_t S_t) = \alpha_t dM_t + \theta_t dS_t$$

Définition

Un marché financier d 'horizon fini T est « **complet** », si toute variable aléatoire « Z »,

- positive « F_T-mesurable » et
- de carré intégrable,

est la valeur, à la date T, d'un portefeuille auto finançant (avec $(Ft)_t$, la filtration naturelle du Brownien W_t).

- Nous avons, par calcul élémentaire, $d(V_t) = rV_t\,dt + \theta_t\,(dS_t - rS_t\,dt)$

- Par intégrations par parties, la valeur actualisée du portefeuille est alors

$$d(e^{-rt}V_t) = e^{-rt}dV_t - re^{-rt}V_t\,dt = \theta_t\,d(e^{-rt}S_t)$$

- Ainsi, à la date t, la valeur du portefeuille auto finançant dépend uniquement de sa valeur initiale et du montant investi en actif risqué
  - Par intégration simple de l'équation précédente, nous avons

$$\boxed{\tilde{V}_t = V_t\,e^{-rt} = V_0 + \int_0^t \theta_s\,d\tilde{S}_s = V_0 + \int_0^t \theta_s\,R_s\,(dS_s - rS_s\,ds)}$$

- où $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est le prix de l'actif risqué actualisé, et $R_s = \exp(-rs)$

Proposition
Le prix actualisé de l'actif risqué est une martingale, après un changement de probabilité.

- En effet, le « théorème de Girsanov » précise qu'il existe une probabilité risque neutre Q, équivalente à P, telle que, sous Q, le processus $\left(W_t^*, t \geq 0\right)$, défini par $W_t^* = W_t + \kappa t$ est un mouvement brownien, où

$$\kappa = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

- La probabilité Q est définie par sa densité de Radon-Nykodym $dQ = L_t dP$ sur $(F_t)_t$, la filtration naturelle du Brownien W_t avec

$$L_t = \exp\left(-\kappa W_t - \frac{1}{2}\kappa^2 t\right)$$

Evaluation de l'actif (5/6)

- La dynamique de S peut dès lors s'écrire

$$dS_t = S_t\left(rdt + \sigma dW_t^*\right) \qquad W_t^* = W_t + \kappa t, \; avec \;\; \kappa = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

- Ou sous une forme équivalente, la dynamique du prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$:

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t \, dW_t^*$$

- Dont la solution est $\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t^* - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$

- Le prix actualisé $\left(\tilde{S}_t, t \geq 0\right)$ est une martingale sous la probabilité risque neutre Q et dès lors la valeur actualisée du portefeuille auto finançant est une martingale, dès que $V_t e^{-rt} = V_0 + \int_0^t \sigma \theta_s \tilde{S}_s \, dW_s^*$

- Le terme de droite étant une intégrale stochastique de mouvement brownien W^*, c'est donc une martingale

- Il s'ensuit que $V_0 = E_Q\left(h(S_T)e^{-rT}\right)$ et $V_t\, e^{-rt} = E_Q\left(V_T\, e^{-rT} \middle| F_t\right) = E_Q\left(h(S_T)e^{-rT} \middle| F_t\right)$

Proposition

A la date t, la valeur actualisée d'un produit dérivé est l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale actualisée sous la probabilité risque neutre, par rapport à l'information à la date t

Evaluation des options (1/2)

- Appliquons le modèle précédent pour obtenir la formule de Black & Scholes qui donne le prix C d'une option d'achat (Call)
- Le « payoff » du call étant $h(S_T)$ avec $h(x)=(x-K)^+$, nous obtenons alors :

$$C=E_Q\left(e^{-rT}(S_T-K)^+\right)=E_Q\left(e^{-rT}S_T 1_{S_T\geq K}\right)-Ke^{-rT}E_Q\left(1_{S_T\geq K}\right)$$

- En posant $S_T e^{-rT}=S_0\exp\left(\sigma W_T^{\ *}-\frac{\sigma^2 T}{2}\right)$, nous obtenons :

$$\boxed{C=S_0\,\mathrm{N}(d_1(S_0,T))-Ke^{-rT}\,\mathrm{N}(d_2(S_0,T))}$$

$$\begin{cases} d_1=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right)+\left(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

Evaluation des options (2/2)

- Le prix du call à la date t est égal à $C(t,S_t) = E_Q\left(e^{-rT}(S_T - K)^+ \middle| F_t\right)$ avec

$$\boxed{C(t,x) = x\mathrm{N}(d_1(x,t-T)) - Ke^{-r(T-t)}\mathrm{N}(d_2(x,T-t))}$$

- La célèbre formule de Black & Scholes écrite sur un sous-jacent avec taux d'intérêt r et dividende q, de dynamique

$$dS_t = S_t\left[(r-q)dt + \sigma dW_t\right]$$

donne le prix à la date t d'un call de prix d'exercice K, de maturité T, lorsque le sous-jacent veut x à la date t :

$$\boxed{Call(t,x) = xe^{-q(T-t)}\mathrm{N}\left[d_1\left(\frac{xe^{-q(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathrm{N}\left[d_2\left(\frac{xe^{-q(T-t)}}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right]}$$

Illustrations

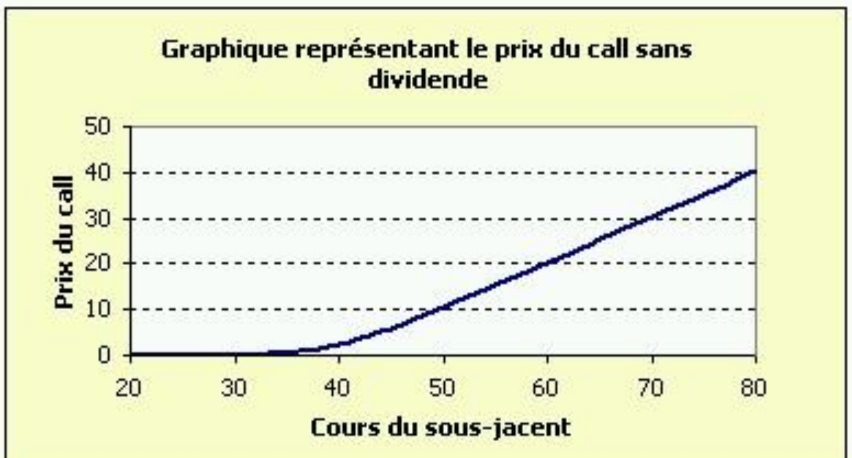
Valorisation d'un call et d'un put par la formule de Black & Scholes

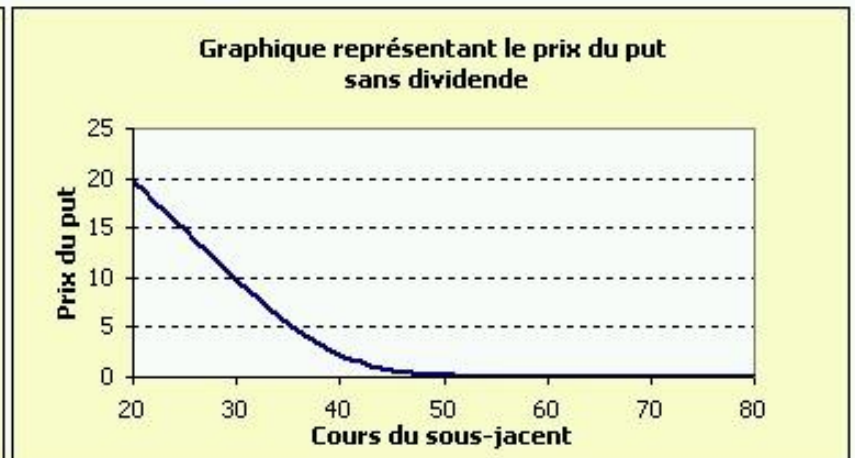
Cours du sous-jacent	40,00
Strike de l'option	40,00
Taux sans risque	2,50%
Nombre de jours avant l'échéance	90
Volatilité implicite du sous-jacent	30,00%
Dividende	5,00%

CALL sans dividende		PUT sans dividende
2,49	*Premium*	2,25

CALL avec dividende		PUT avec dividende
2,23	*Premium*	2,48

Graphiques





L'expression précédente du prix du call peut être implémentée sous la forme d'un « pricer » de call où nous représentons le prix du call en fonction du cours du sous-jacent par rapport au strike

Volatilité implicite et effet de smile (1/3)

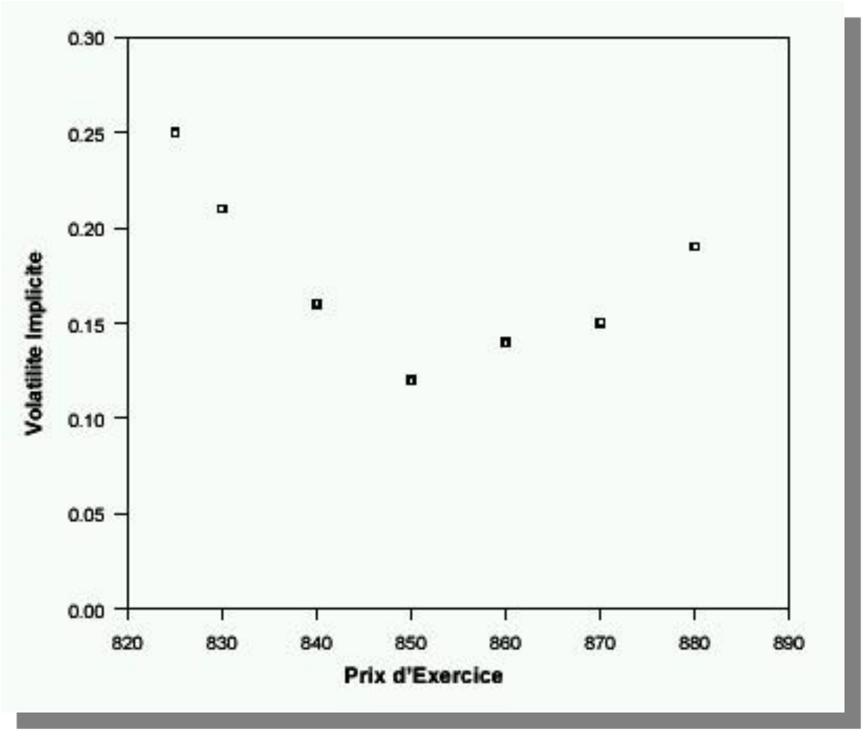
- Dans le contexte de la théorie des modèles stochastiques, la volatilité prend deux formes principales et bien distinctes

  - La **volatilité réelle** qui mesure la dispersion effective des rentabilités d'un actif financier, soit sur une période antérieure (volatilité historique), soit à l'instant courant (volatilité instantanée) ou bien encore sur une période postérieure (volatilité future)
  - La **volatilité implicite** (appelée aussi « volatilité de marché »), quantité qui est entrée par les opérateurs dans un modèle

- Nous pouvons calculer, à partir des prix de calls (options d'achat) de même maturité, et de prix d'exercice différents, les valeurs de la volatilité implicite

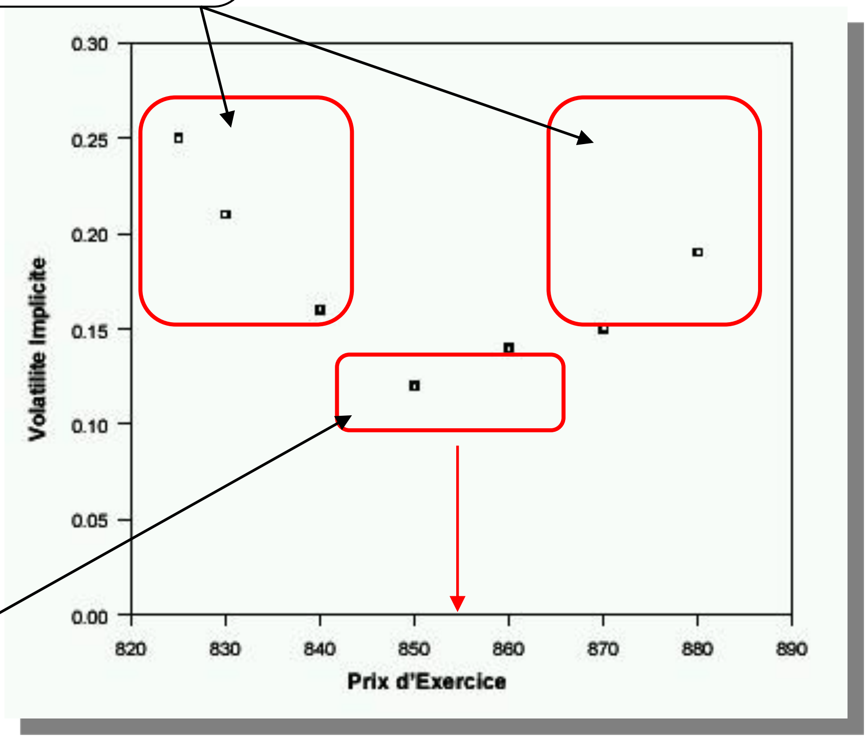
Volatilité implicite et effet de smile (2/3)

- Nous obtenons une courbe en forme de « U », semblable à un « sourire » (« **Implicit volatility smile** »)
- Nous présentons sur le graphique ci-contre, l'effet « **smile** » de la volatilité implicite du S&P 500 observé sur le CBOE (« Chicago Board Options Exchange »)
- La volatilité implicite est calculée à partir des cours intra journaliers de « calls » sur indice S&P 500 arrivant à échéance le 30/09/02.
- Le cours de l'indice S&P 500 est de 856.04 à la date de calcul



Volatilité implicite et effet de smile (3/3)

Plus on s'éloigne de la monnaie, plus la volatilité est élevée



Le smile n'est pas symétrique sur le marché des actions : les acteurs de marché sont plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse des actions

A la monnaie, la volatilité implicite est la plus basse

- Le prix d'une option dépend de cinq variables :
  - la valeur du sous-jacent
  - le prix d'exercice « K »
  - le temps restant jusqu'à maturité « T-t »
  - le taux « r »
  - la volatilité « σ »

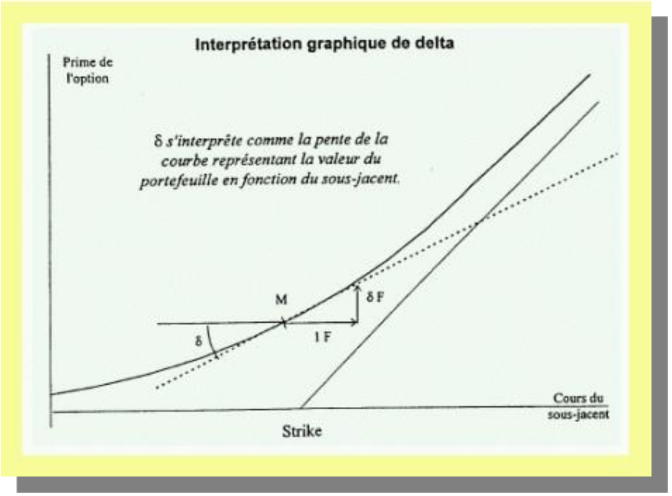
- Les paramètres « grecs » sont les dérivés partielles du prix de l'option par rapport à ces différents paramètres

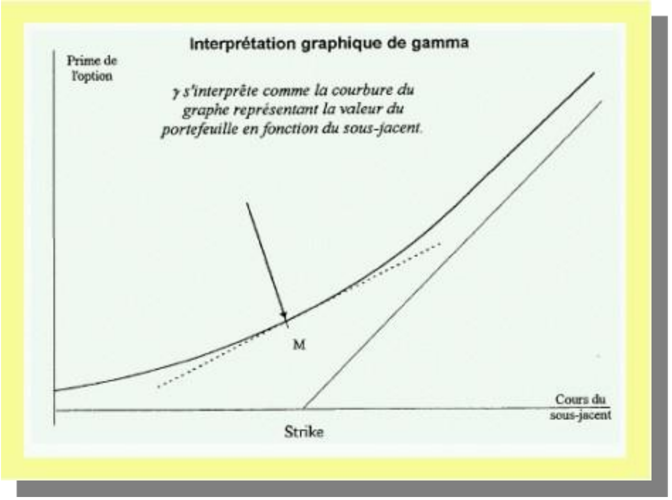
Portefeuille de couverture : les grecs (2/4)

1. Le « **delta** » est la dérivée du prix de l'option par rapport au sous-jacent. Lorsque le delta est nul, on dit que la position est « delta neutre ».
   Pour un Call : $\delta(t,x)=\frac{\partial C}{\partial x}=\mathrm{N}(d_1)$

2. Le « **gamma** » est la dérivée seconde par rapport au sous-jacent.
   Pour un Call : $\gamma(t,x)=\frac{\partial^2 C(t,x)}{\partial x^2}$

3. Le « **thêta** » est la dépendance par rapport au temps restant jusqu'à maturité.
   Pour un Call : $\theta(t,x)=\frac{\partial C(t,x)}{\partial t}$

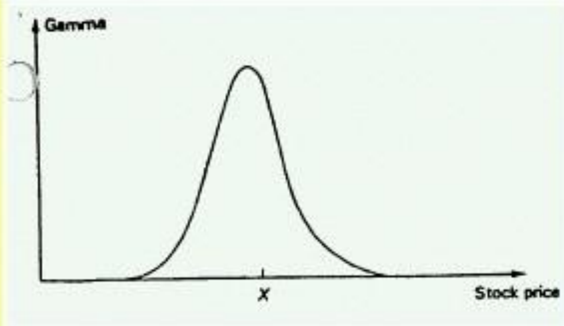




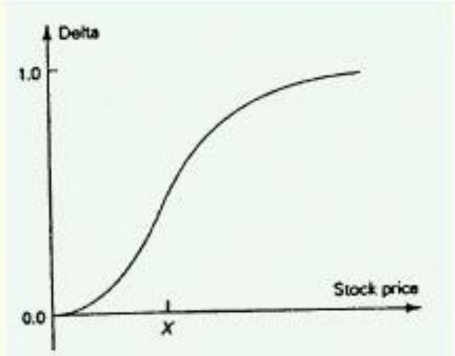
- Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix à une variation donnée du sous-jacent
  - La gestion en delta neutre consiste à éliminer, à chaque instant, le risque lié au prix du sous-jacent
- Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent
  - Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer + ou – vite que le prix du sous-jacent
  - Par analogie, on compare le delta à la vitesse, et le gamma à l'accélération
- Le thêta est le coût du temps (ou le gain) sur un portefeuille d'options
  - Il évalue combien le passage du temps influe sur la valeur d'une option
- Les deux derniers grecs sont le rho (variation par rapport au taux d'intérêt) et le véga (variation par rapport à la volatilité)

Portefeuille de couverture : les grecs (4/4)

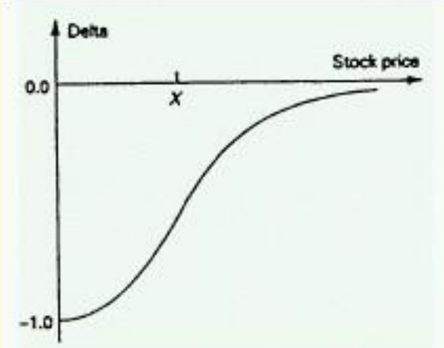
Variation du gamma pour des options



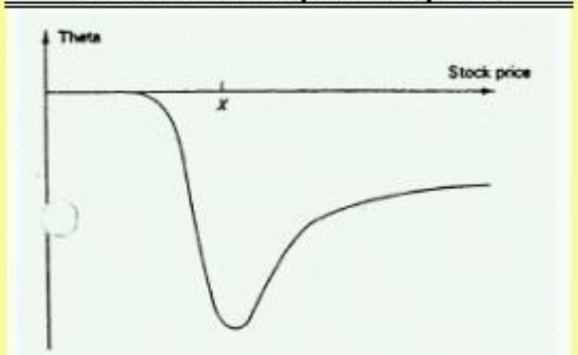
Variation du delta pour un Call



Variation du delta pour un Put



Variation du thêta pour des options



- Une option **américaine** présente les mêmes caractéristiques qu'une option européenne, mais le détenteur de l'option peut exercer son droit à tout instant avant maturité.

Proposition :
Le call américain est au moins de même valeur que le call européen

Proposition :
La valeur At d'une option d'achat américaine de prix d'exercice K vérifie les deux assertions :

$$\begin{cases} A_t \geq 0 \\ A_t \geq \left(S_t - e^{-r(T-t)}K\right) \geq \left(S_t - K\right) \end{cases}$$