Université de Picardie Jules Verne
Master 1 Math
Année 2011-2012

Proposition de mémoire de master 1

Youcef Mammeri

youcef.mammeri@u-picardie.fr
bureau C102 bis

Intégrales oscillantes

On s'intéresse aux intégrales de la forme

$$\int_a^b e^{-ih(k)}\psi(k)dk.$$

Un lemme de Van der Corput fournit la vitesse de décroissance de cette intégrale.
Lemme : *Soit $n \geq 2$. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \leq b, \lambda > 0$ et pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ à valeurs réelles satisfaisant pour tout $k \in [a,b], |h^{(n)}(k)| \geq \lambda$, on a*

$$\int_a^b e^{-ih(k)}dk \leq \frac{C}{\lambda^{1/n}}.$$

On peut alors en déduire que la solution de l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) = 0,$$

décroit avec le temps (pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Ce type d'équations intervient dans de nombreux phénomènes physiques, notamment pour décrire la propagation de petites vagues à la surface de l'eau.

Le but du mémoire sera de :
- démontrer le lemme de Van der Corput ;
- calculer la solution de l'équation dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$;
- démontrer que cette solution est décroissante en fonction du temps.

Références

[1] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, On the (generalized) Korteweg-de Vires equation, Duke Math. J. 59 (1989), 3, 585–610.

[2] E. Stein, *Harmonic Analysis : Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.