# Sur le centre des algèbres de groupe en caractéristique $p$

**Serge Bouc**

**Abstract:** I give elementary proofs of some results on the idempotents of the center of finite group algebras over a commutative ring $R$ of characteristic $p$. Those results are well known when $R$ is a field, and their classical proof requires the use of a "lift to characteristic 0". The new methods explained here are independent of such a lift, and work also for a reduced ring of characteristic $p$.

Soit $G$ un groupe fini, $p$ un nombre premier, et $R$ un anneau commutatif de caractéristique $p$. Les résultats énoncés ici sur le centre $ZRG$ de l'algèbre de groupe sont bien connus lorsque $R$ est un corps. Certains d'entre eux se démontrent généralement en utilisant un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$, dont le corps des fraction $K$ est de caractéristique 0, et le corps résiduel est isomorphe à $R$. Le but de cette note est de donner des démonstrations évitant ce procédé de "relèvement en caractéristique 0", et utilisant uniquement l'anneau $R$.

## 1. Actions de $p$-groupes

Le lemme suivant est élémentaire et fondamental:

**Lemme 1.1:** *Soient $R$ un groupe abélien, et $P$ un $p$-groupe fini opérant sur un ensemble fini $X$. Si $f$ est une fonction de $X$ dans $R$ invariante par $P$, alors*

$$\sum_{x\in X} f(x) \equiv \sum_{x\in X^P} f(x) \quad mod \quad pR$$

**Démonstration:** Soit $P\backslash X$ un système de représentants des orbites de $P$ sur $X$. Alors

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{x\in G\backslash X}\sum_{p\in P/P_x} f(px) = \sum_{x\in G\backslash X}[P:P_x]f(x)$$

d'où le résultat, puisque $[P:P_x]f(x)$ appartient à $pR$ si $P_x \neq P$, c'est-à-dire si $x \notin X^P$. $\square$

On applique souvent ce lemme au cas où $R = \mathbf{Z}$ et $f$ est la fonction constante égale à 1: le résultat est alors la congruence

$$|X| \equiv |X^P| \quad (p)$$

Parmi les nombreuses autres applications de ce lemme:

*Les théorèmes de Sylow:* Soit $G$ un groupe fini d'ordre $n$. Je note $n_p$ la $p$-partie de $n$, et $n_{p'}$ sa $p'$-partie. Le groupe $G$ opère par translation sur l'ensemble $\mathcal{P}$ de ses parties de cardinal $n_p$. Cet ensemble est de cardinal $\binom{n}{n_p}$ qui est congru à $n_{p'}$ modulo $p$: en effet, dans $\mathbf{F}_p[X]$, j'ai l'égalité

$$(X+1)^n = (X+1)^{n_p n_{p'}} = (X^{n_p}+1)^{n_{p'}}$$

La congruence cherchée résulte de l'évaluation du terme en $X^{n_p}$, qui donne

$$\binom{n}{n_p} \equiv \binom{n_{p'}}{1} \quad (p)$$

Comme $n_{p'}$ est premier à $p$, il en résulte que le groupe $G$ admet au moins une orbite sur $\mathcal{P}$ dont le cardinal est premier à $p$. Il existe dans cette orbite une partie $P$ contenant 1. Alors l'indice du stabilisateur $H$ de $P$ dans $G$ est premier à $p$. Donc $n_p$ divise l'ordre de $H$. Comme de plus $H$ est contenu dans $P$ si $1 \in P$, et comme $H$ opère librement sur $P$, il en résulte que l'ordre de $H$ est inférieur ou égal à $|P| = n_p$. Donc $H = P$ est un sous-groupe d'ordre $n_p$ de $G$, c'est-à-dire un sous-groupe de Sylow.

De plus si $Q$ est un $p$-sous-groupe quelconque de $G$, alors $Q$ opère sur $G/P$, qui est de cardinal premier à $p$. Donc le cardinal des points fixes par $Q$ est premier à $p$. En particulier, cet ensemble de points fixes est non-vide, donc il existe $x \in G$ tel que $QxP = xP$, ou $Q^x \subseteq P$. Il en résulte que tous les $p$-sous-groupes de Sylow de $G$ sont conjugués entre eux, et sont les $p$-sous-groupes maximaux de $G$. De plus, le cas $Q = P$ donne la congruence

$$[G:P] \equiv [N_G(P):P] \quad (p) \qquad \text{soit} \qquad [G:N_G(P)] \equiv 1 \quad (p)$$

donc le nombre de $p$-sous-groupes de Sylow de $G$ est congru à 1 modulo $p$.

*Le centre d'un $p$-groupe:* Si $P$ est un $p$-groupe non-trivial, alors son centre $Z(P)$ est non-trivial: en effet, le centre de $P$ est l'ensemble des points fixes de $P$ dans son action par conjugaison sur lui-même. Il est donc de cardinal multiple de $p$ si $P$ est non-trivial. Donc $Z(P)$ est non-trivial.

## 2. L'homomorphisme de Brauer

**Hypothèse:** Dans toute la suite, je note $R$ un anneau commutatif de caractéristique $p$ (i.e. tel que $pR = 0$).

Soit $G$ un groupe fini opérant sur un groupe fini $X$. Alors $G$ opère aussi sur l'algèbre $RX$. Si $P$ est un $p$-sous-groupe de $G$, soit $Br_P$ l'application de projection

$$Br_P : (RX)^P \to R(X^P)$$

définie par

$$Br_P(\sum_{x\in X} r_x x) = \sum_{x\in X^P} r_x x$$

**Lemme 2.1:** *L'application $Br_P$ est un morphisme d'algèbres.*

**Démonstration:** En effet, soient $a = \sum_{x\in X} r_x x$ et $b = \sum_{y\in X} s_y y$ des éléments de $(RX)^P$. Alors

$$ab = \sum_{z\in X}(\sum_{\substack{x,y\in X\\ xy=z}} r_x s_y)z$$

Soit $\Omega_z = \{(x,y)\in X \mid xy = z\}$. Si $z$ est fixe par $P$, le groupe $P$ opère sur $\Omega_z$ par $p(x,y) = \big(p(x), p(y)\big)$, et la fonction $(x,y)\mapsto r_x s_y$ de $\Omega_z$ dans $R$ est invariante par $P$, puisque $a$ et $b$ sont dans $(RX)^P$. Le lemme 1.1 donne alors l'égalité

$$Br_P(ab) = \sum_{z\in X^P}(\sum_{x,y\in\Omega_z} r_x s_y)z = \sum_{z\in X^P}(\sum_{\substack{x,y\in X^P\\ xy=z}} r_x s_y)z = Br_P(a)Br_P(b)$$

ce qui prouve que $Br_P$ est un morphisme d'algèbres. □

## 3. Idempotents de $ZRG$

**Notations:** Soit $G$ un groupe fini. Le centre $ZRG$ de l'algèbre $RG$ est libre comme $R$-module, et admet pour base les éléments

$$1_C = \sum_{x\in C} c$$

lorsque $C$ décrit les classes de conjugaison de $G$.

Si $p$ est un nombre premier, je note $G_p$ l'ensemble des $p$-éléments de $G$, et $G_{p'}$ l'ensemble des $p'$-éléments. Je pose

$$1_{G_p} = \sum_{x\in G_p} x$$

Je donne $ZRG_{p'}$ le sous-$R$-module de $ZRG$ ayant pour base les éléments $1_C$, où $C$ est la classe de conjugaison d'un élément de $G_{p'}$. Je note $\mathrm{Res}_{G_{p'}}$ la projection de $ZRG$ sur $ZRG_{p'}$ définie par

$$\mathrm{Res}_{G_{p'}}(\sum_{x\in G} r_x x) = \sum_{x\in G_{p'}} r_x x$$

Soit $F : ZRG \to ZRG$ l'application définie par

$$F(\sum_{x\in G} r_x x) = \sum_{x\in G} r_x x^p$$

Alors $F$ est $R$-linéaire. Soit de même $\Gamma : ZRG \to ZRG$ définie par

$$\Gamma(\sum_{x\in G} r_x x) = \sum_{x\in G} r_x^p x$$

Alors $\Gamma$ est un morphisme d'anneaux. Enfin soit $\Phi = F \circ \Gamma$, i.e.

$$\Phi(\sum_{x\in G} r_x x) = \sum_{x\in G} r_x^p x^p$$

Il est facile de voir que puisque $R$ est de caractéristique $p$, les applications $F$ et $\Gamma$ commutent. De même $\Gamma$ et $\mathrm{Res}_{G_{p'}}$ commutent. Enfin $F$ et $\Gamma$ envoient $ZRG_{p'}$ dans lui-même, et la restriction de $F$ à $ZRG_{p'}$ est un automorphisme, car un $p'$-élément admet une racine $p$-ième unique dans $G_{p'}$.

Finalement, je note $q = p^\alpha$ l'exposant d'un $p$-sous-groupe de Sylow de $G$.

**Proposition 3.1:** *Soit $u \in ZRG$, et $\beta$ un entier supérieur ou égal à $\alpha$. Alors*

$$u^{p^\beta} = \Phi^\beta\Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big)$$

**Démonstration:** Soit $r = p^\beta$. Alors si $u = \sum_{x\in G} u_x x$

$$u^r = \sum_{z\in G}(\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_r\in G\\ x_1\ldots x_r=z}} u_{x_1}\ldots u_{x_r})z$$

Soit

$$\Omega_r(z) = \{(x_1,\ldots,x_r)\in G^r \mid x_1\ldots x_r = z\}$$

Le centralisateur $C_G(z)$ de $z$ dans $G$ opère sur $\Omega_r(z)$ par

$$g(x_1,\ldots,x_r) = ({}^g x_1,\ldots,{}^g x_r)$$

Soit $i$ un entier compris entre 1 et $r-1$, et $s_i : \Omega_r(z) \to \Omega_r(z)$ définie par

$$s_i(x_1,\ldots,x_r) = (x_1,\ldots,x_{i-1},{}^{x_i}x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_r)$$

Il est clair que $s_i$ et $s_j$ commutent si $|i-j| >= 2$, et un calcul simple montre que

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$$

Autrement dit, le groupe de tresses $B_r$ opère aussi sur $\Omega_r(z)$, et il est facile de vérifier que cette action commute à celle de $C_G(z)$. Soit

$$\gamma = s_{r-1}\ldots s_1$$

Alors

$$\gamma(x_1,\ldots,x_r) = s_{r-1}\ldots s_2({}^{x_1}x_2, x_1, x_3, \ldots, x_r) = \ldots$$

$$\ldots = s_{r-1}\ldots s_3({}^{x_1}x_2, {}^{x_1}x_3, x_1, x_4, \ldots, x_r) = {}^{x_1}(x_2,\ldots,x_r,x_1)$$

Il en résulte plus généralement que si $k$ est un entier compris entre 1 et $r$

$$\gamma^k(x_1,\ldots,x_r) = {}^{x_1x_2\ldots x_k}(x_{k+1},\ldots,x_r,x_1,\ldots,x_k)$$

En particulier

$$\gamma^r(x_1,\ldots,x_r) = {}^{x_1\ldots x_r}(x_1,\ldots,x_r) = {}^z(x_1,\ldots,x_r)$$

Soient $z_p$ et $z_{p'}$ la $p$-partie et la $p'$-partie de $z$, et $v \in G_{p'}$ l'unique racine $r$-ième de $z_{p'}^{-1}$. Alors $v \in C_G(z)$, car c'est une puissance de $z_{p'}$. Soit $\sigma : \Omega_r(z) \to \Omega_r(z)$ définie par

$$\sigma(x_1,\ldots,x_r) = v\gamma(x_1,\ldots,x_r)$$

Comme les actions de $v$ et $\gamma$ commutent

$$\sigma^r(x_1,\ldots,x_r) = {}^{v^rz}(x_1,\ldots,x_r) = {}^{z_p}(x_1,\ldots,x_r)$$

En particulier il existe une puissance $\pi$ de $p$ tel que $\sigma^\pi$ soit l'application identique de $\Omega_r(z)$.

De plus, la fonction

$$\lambda_r : (x_1,\ldots,x_r) \in \Omega_r(z) \mapsto u_{x_1}\ldots u_{x_r} \in R$$

est invariante par $C_G(z)$ si $u \in ZRG$, et par $B_r$ si $R$ est commutatif. Le lemme 1.1 donne alors

$$u^r = \sum_{z\in G}\Big(\sum_{(x_1,\ldots,x_r)\in\Omega_r(z)^\sigma} \lambda_r(x_1,\ldots,x_r)\Big)z$$

L'élément $(x_1,\ldots,x_r)$ de $\Omega_r(z)$ est fixe par $\sigma$ si et seulement si

$$x_2 = x_1^{vx_1} \quad x_3 = x_1^{(vx_1)^2} \quad \ldots x_r = x_1^{(vx_1)^{r-1}} \quad x_1 = x_1^{(vx_1)^r}$$

Dans ces conditions, dire que $(x_1,\ldots,x_r) \in \Omega_r(z)$ revient à dire que

$$x_1.x_1^{vx_1}.x_1^{(vx_1)^2}\ldots x_1^{(vx_1)^{r-1}} = z$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\Big(x_1(vx_1)^{-1}\Big)^r(vx_1)^r = z$$

ou encore

$$(vx_1)^r = v^rz = z_p$$

L'ensemble $\Omega_r(z)^\sigma$ est donc en bijection avec l'ensemble des éléments $x_1$ de $C_G(z_p)$ tels que $(vx_1)^r = z_p$. Mais si $g \in G$ est tel que $g^r = z_p$, alors $g$ est un $p$-élément, et alors $g^r = 1$, puisque $r$ est multiple de l'exposant d'un $p$-sous-groupe de Sylow de $G$.

Il en résulte que l'ensemble $\Omega_r(z)^\sigma$ est vide si $z_p \neq 1$. Et si $z_p = 1$, l'ensemble $\Omega_r(z)^\sigma$ est en bijection avec l'ensemble des éléments $x_1$ de $G$ tels que $(vx_1)^r = 1$, i.e. tels que $vx_1 \in G_p$. Les éléments $x_2, \ldots, x_r$ étant conjugués de $x_1$, il en résulte que

$$\lambda_r(x_1, \ldots, x_r) = u_{x_1}^r$$

Finalement, il vient

$$u^r = \sum_{\substack{v \in G_{p'} \\ x \in G \\ vx \in G_p}} u_x^r v^{-r} = \sum_{\substack{x \in G \\ y \in G_p \\ xy \in G_{p'}}} u_x^r (xy)^r = F^\beta \left[\mathrm{Res}_{G_{p'}}\Big(\Gamma^\beta(u) 1_{G_p}\Big)\right]$$

Comme $\Gamma(1_{G_p}) = 1_{G_p}$, et comme $\Gamma$ est un morphisme d'anneaux, j'ai aussi

$$u^r = F^\beta \left[\mathrm{Res}_{G_{p'}}\Big(\Gamma^\beta(u.1_{G_p})\Big)\right]$$

Finalement, comme $\Gamma$ commute à $\mathrm{Res}_{G_{p'}}$ et à $F$

$$u^r = F^\beta \Gamma^\beta \Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big) = \Phi^\beta \Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big)$$

ce qui prouve la proposition. □

**Corollaire 3.2:** *Soit $e$ un idempotent de $ZRG$. Alors $e \in ZRG_{p'}$.*

En effet $e = e^r = \Phi^\beta \Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(e.1_{G_p})\Big)$.

## 4. Classes de défaut nul

**Notations:** Si $x \in G$, le défaut de (la classe de conjugaison de) $x$ est par définition un $p$-sous-groupe de Sylow de $C_G(x)$, et (la classe de conjugaison de) $x$ est dit(e) de défaut nul si $C_G(x)$ est un $p'$-groupe. Je note $c_0(G)$ l'ensemble des éléments de $G$ de défaut nul. C'est un sous-ensemble de $G_{p'}$, puisque pour tout $x$, l'élément $x_p$ est dans $C_G(x)$.

Je note $ZRc_0(G)$ le sous-$R$-module de $ZRG$ engendré par les $1_C$, où $C$ est une classe de conjugaison de défaut nul. C'est un idéal de $ZRG$, car c'est l'intersection des noyaux des morphismes $Br_P$, pour $P \neq \{1\}$.

**Proposition 4.1:** *Avec ces notations,*

$$1_{G_p}^2 \in ZRc_0(G)$$

**Démonstration:** Cela résulte de deux applications successives du lemme 1.1. En effet

$$1_{G_p}^2 = \sum_{z \in G} |D_p(z)| z$$

où $D_p(z)$ est l'ensemble des couples $(x, y)$ d'éléments de $G_p$ tels que $xy = z$. Soit $S$ un $p$-sous-groupe de Sylow de $C_G(z)$. Alors $S$ opère sur $D_p(z)$ par conjugaison. De plus

$$D_p(z)^S = \{(x, y) \in C_G(S)_p \mid xy = z\}$$

Le centre de $S$ opère sur $D_p(z)^S$ par $u(x, y) = (xu^{-1}, uy)$, et il opère sans point fixe. Donc si $Z(S) \neq \{1\}$, i.e. si $S \neq \{1\}$, alors $|D_p(z)^S| = 0$ dans $R$. La proposition en résulte. $\square$

## 5. Le nil-radical de $ZRG$

**Hypothèse:** Dans toute la suite, je supposerai que l'anneau $R$ est réduit, i.e. sans élément nilpotent non-nul.

Cette hypothèse entraîne que $\Gamma$ est injective. Il en est donc de même de la restriction de $\Phi$ à $ZRG_{p'}$. Alors si $u \in ZRG$, la proposition 3.1 montre que

$$u^{p^\beta} = \Phi^\beta\Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big)$$

pour tout $\beta \geq \alpha$. En particulier, l'élément $u$ est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p}) = 0$.

D'autre part, si $u = \sum_{x \in G} u_x x$, alors

$$u.1_{G_p} = \sum_{z \in G} (\sum_{x \in E_z} u_x) z$$

où

$$E_z = \{x \in G \mid x^{-1}z \in G_p\}$$

Soit $S$ un $p$-sous-groupe de Sylow de $C_G(z)$. Alors $S$ opère sur $E_z$ par conjugaison, et

$$E_z^S = \{x \in C_G(S) \mid x^{-1}z \in G_p\}$$

Comme de plus $z_p \in S$, si $x \in C_G(S)$, alors $x$ centralise $z_p$, et l'élément $x^{-1}z = x^{-1}z_{p'}z_p$ est dans $G_p$ si et seulement si il en est de même de $x^{-1}z_{p'}$. Donc

$$E_z^S = \{x \in C_G(S) \mid x^{-1}z_{p'} \in G_p\}$$

Ce dernier ensemble n'est autre que $E_{z_{p'}}^S$. Il résulte alors du lemme 1.1 que

$$u.1_{G_p} = \sum_{z \in G} (\sum_{x \in E_{z_{p'}}} u_x) z = \sum_{t \in G_{p'}} (\sum_{x \in E_t} u_x) (\sum_{\substack{z \in G \\ z_{p'} = t}} z)$$

Alors
$$\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p}) = \sum_{t\in G_{p'}} (\sum_{x\in E_t} u_x)t$$
Il en résulte que $\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p}) = 0$ si et seulement si $u.1_{G_p} = 0$. Finalement, un élément $u$ de $ZRG$ est nilpotent si et seulement si $u^q = 0$. En résumé:

**Proposition 5.1:** *Le nilradical de $ZRG$ est égal à l'annulateur de $1_{G_p}$. C'est aussi l'ensemble des éléments $u$ tels que $u^q = 0$.*

Je conclurai cette section par une dernière remarque: soit $u \in ZRG$. Si $\beta \geq \alpha$, alors
$$u^{p^{2\beta}} = (u^{p^\beta})^\beta = \Phi^\beta\Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u^{p^\beta}.1_{G_p})\Big) = \Phi^{2\beta}\Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big)$$
Comme la restriction de $\Phi$ à $ZRG_{p'}$ est injective puisque $R$ est réduit, il vient
$$\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u^{p^\beta}.1_{G_p}) = \Phi^\beta\Big(\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u.1_{G_p})\Big)$$
d'où finalement
$$\mathrm{Res}_{G_{p'}}(u^{p^\beta}.1_{G_p}) = u^{p^\beta} \tag{1}$$

## 6. Les idempotents de $ZRc_0(G)$

J'ai déjà observé que $ZRc_0(G)$ est un idéal de $ZRG$. Donc si $u \in ZRc_0(G)$, alors $u.1_{G_p} \in ZRc_0(G) \subseteq ZRG_{p'}$. La formule 1 devient alors
$$u^{p^\beta}.1_{G_p} = u^{p^\beta} \qquad \text{si} \quad \beta \geq \alpha, \quad u \in ZRc_0(G) \tag{2}$$

En particulier, si $e$ est un idempotent de $ZRc_0(G)$, alors $e.1_{G_p} = e$.

De plus, comme $1_{G_p}$ appartient au sous-anneau $Z\mathbf{F}_pG$ de $ZRG$, il en est de même de $1_{G_p}^2$. Si $1_{G_p}^2$ s'écrit
$$1_{G_p}^2 = \sum_{z\in c_0(G)} \lambda_z z$$
alors
$$\Phi(1_{G_p}^2) = \sum_{z\in c_0(G)} \lambda_z z^p$$
car $\lambda_z^p = \lambda_z$. Comme de plus l'application $z \mapsto z^p$ est une bijection de $c_0(G)$, il existe un entier $\omega > 0$ tel que
$$\Phi^{\beta\omega}(1_{G_p}^2) = 1_{G_p}^2$$
pour tout entier $\beta$.

Alors si $\beta\omega \geq \alpha$, il vient

$$1_{G_p}^{p^{\beta\omega}} = \Phi^{\beta\omega}(1_{G_p}^2) = 1_{G_p}^2$$

Il est facile de voir que l'ensemble des entiers $h \geq 0$ tels que $1_{G_p}^{2+h} = 1_{G_p}^2$ est de la forme $k\mathbf{N}$, pour un entier $k > 0$ convenable. Cet entier $k$ doit diviser $p^{\beta\omega} - 2$, pout tout $\beta$ assez grand. Or

$$(p^{\beta\omega} - 2, p^{(\beta+1)\omega} - 2) = \big(p^{\beta\omega} - 2, p^{\beta\omega}(p^\omega - 1)\big)$$

Si $p$ est impair, c'est aussi

$$(p^{\beta\omega} - 2, p^\omega - 1)$$

Comme

$$p^{\beta\omega} - 2 = \big((p^\omega - 1) + 1\big)^\beta - 2$$

est un multiple de $p^\omega - 1$ moins 1, il vient finalement

$$(p^{\beta\omega} - 2, p^{(\beta+1)\omega} - 2) = (1, p^\omega - 1) = 1$$

si $p$ est impair. Et si $p = 2$, alors

$$\begin{aligned}(p^{\beta\omega} - 2, p^{(\beta+1)\omega} - 2) = 2(p^{\beta\omega-1} - 1, p^\omega - 1) = 2(p^{\beta\omega-1} - p^\omega, p^\omega - 1) = \dots \\ \dots = 2(p^{(\beta-1)\omega-1} - 1, p^\omega - 1)\end{aligned}$$

Donc dans ce cas

$$(p^{\beta\omega} - 2, p^{(\beta+1)\omega} - 2) = 2(p^{\omega-1} - 1, p^\omega - 1) = 2(p^{\omega-1} - 1, p^{\omega-1}(p-1)) = 2$$

puisque $p - 1 = 1$.

Donc si $p \neq 2$, alors $k = 1$ et $1_{G_p}^3 = 1_{G_p}^2$. Et si $p = 2$, alors $1_{G_p}^4 = 1_{G_p}^2$. Cette dernière égalité est donc toujours vraie. Il en résulte que $(1_{G_p}^2)^{p^\beta} = 1_{G_p}^2$ pour tout $\beta > 0$. La formule 2 donne alors

$$1_{G_p}^3 = 1_{G_p}^2$$

quel que soit $p$. Finalement, j'ai montré la proposition suivante:

**Proposition 6.1:** *L'élément $1_{G_p}^2$ est un idempotent de $ZRc_0(G)$. De plus, si $e$ est un idempotent de $ZRc_0(G)$, alors $e.1_{G_p}^2 = e$*

Dans le cas où $R$ est un corps, tout idempotent de $ZRc_0(G)$ est somme d'idempotents primitifs ("blocs de défaut nul"): alors $1_{G_p}^2$ *est égal à la somme des blocs de défaut nul de $G$*. Ce théorème est du à Tsushima ([1]).

## Références

[1] Y. Tsushima. On the block of defect 0. *Nagoya Journal of Mathematics*, 44:57–59, 1971.