Bimodules, trace généralisée
et transferts en homologie de Hochschild

Serge Bouc

1. Introduction

1.1. Soit B une algèbre sur un anneau commutatif k, et M un B-bimodule. Le *complexe de Hochschild* $C_*(B,M)$ (cf. Loday [2]) est le complexe de chaînes défini par

$$C_n(B,M) = M \otimes B^{\otimes n}$$

La différentielle $b : M \otimes B^{\otimes n} \to M \otimes B^{\otimes(n-1)}$ est définie par $b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$, avec

$$d_i(m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) = \begin{cases} mb_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_n & \text{si} \quad i = 0 \\ b_n m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{n-1} & \text{si} \quad i = n \\ m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{i-1} \otimes b_i b_{i+1} \otimes b_{i+2} \otimes \ldots \otimes b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $f : M \to N$ est un morphisme de bimodules, je note $C_*(B,f)$ le morphisme de complexes associé de $C_*(B,M)$ dans $C_*(B,N)$, défini par

$$C_n(m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) = f(m) \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n$$

L'homologie $H_*(B,M)$ du complexe $C_*(B,M)$ est par définition *l'homologie de Hochschild* de B à valeurs dans le bimodule M. Lorsque $B = M$, elle est aussi notée $HH_*(B)$.

1.2. Soit r un entier positif, et $\mathcal{M}_r(M)$ l'ensemble des matrices carrées $r \times r$, à coefficients dans M, considéré comme un bimodule pour l'algèbre $\mathcal{M}_r(B)$, l'action étant donnée par le produit matriciel.

L'application de *trace généralisée* $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_r(M) \otimes \mathcal{M}_r(B)^{\otimes n} \to M \otimes B^{\otimes n}$ (cf. [2] 1.2.1) est définie par

$$\mathrm{tr}(m \otimes b_1 \otimes \ldots b_n) = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n} m(i_0, i_1) \otimes b_1(i_1, i_2) \otimes \ldots \otimes b_n(i_n, i_0)$$

où $m(i,j)$ désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice m.

Cette application de trace généralisée est en fait un morphisme de complexes

$$C_*\big(\mathcal{M}_r(B), \mathcal{M}_r(M)\big) \to C_*(B, M)$$

qui permet d'établir l'isomorphisme de Morita

$$H_*\big(\mathcal{M}_r(B), \mathcal{M}_r(M)\big) \simeq H_*(B, M)$$

Le point de départ de cette note est l'isomorphisme $\mathcal{M}_r(B) \simeq \mathrm{End}_{B^{op}}(B^r)$ (l'algèbre d'endomorphisme du B-module à droite B^r). De plus

$$\mathcal{M}_r(M) \simeq B^r \otimes_B M \otimes_B (B^{op})^r$$

comme $\mathcal{M}_r(B)$-bimodules. Il est tentant d'essayer d'étendre cette construction au cas d'un B-module à droite P, *projectif* et de type fini, au lieu du module *libre* de type fini B^r.

2. Bimodules

2.1. Notations. Soit P un B-module à droite (ou module-B), et $\mathrm{End}_{B^{op}}(P)$ son algèbre d'endomorphismes (comme module-B). Alors P est doté d'une structure de $\mathrm{End}_{B^{op}}(P) \otimes B^{op}$-module (le produit tensoriel $\otimes$ désignant le produit tensoriel sur k).

Plus généralement, je considèrerai une sous-k-algèbre A de $\mathrm{End}_{B^{op}}(P)$, ce qui revient à doter P d'une structure de (A, B)-bimodule (ou A-module-B). Le module $P^* = \mathrm{Hom}_{B^{op}}(P, B)$ est de même doté d'une structure de B-module-A.

Le module P est projectif et de type fini comme module-B si et seulement si il est facteur direct d'un module libre B^m, ce qui revient à dire qu'il existe des éléments $p_i \in P$ et $\varphi_i \in P^*$, pour $1 \leq i \leq m$, tels que pour tout élément p de P

$$p = \sum_{i=1}^{m} p_i \varphi_i(p) \tag{1}$$

2.2. Trace généralisée. Soit M un B-module-B. Alors $P \otimes_B M \otimes_B P^*$ est un A-module-A. Je note

$$\mathrm{tr}_P : P \otimes_B M \otimes_B P^* \otimes A^{\otimes n} \to M \otimes B^{\otimes n}$$

l'application définie par

$$\mathrm{tr}_P(p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{1 \leq i_0, \ldots, i_n \leq m} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{in-1}(a_{n-1} p_{i_n}) \otimes \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

Lemme 2.1: *L'application* tr_P *est un morphisme de complexes*

$$C_*(A, P \otimes_B M \otimes_B P^*) \to C_*(B, M)$$

Démonstration: Il s'agit de vérifier que tr_P commute avec la différentielle b. Celà résulte du fait que

$$\mathrm{tr}_P d_0(p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \ldots \otimes a_n) = \mathrm{tr}_P(p \otimes m \otimes \varphi a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots a_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} \varphi_{i_0}(p_{i_1}) m \varphi(a_1 p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_2 p_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n-1}}(a_n p_{i_0})$$

D'autre part

$$d_0 \mathrm{tr}_P(p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \ldots \otimes a_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i_0, \ldots, \imath_n} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p_{i_1}) \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \varphi_{i_2}(a_2 p_{i_3}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

Mais l'équation (1) montre que

$$\sum_{i_1} \varphi(p_{i_1}) \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) = \varphi\Big(\sum_{i_1} p_{i_1} \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2})\Big) = \varphi(a_1 p_{i_2})$$

et il en résulte que $\mathrm{tr}_P d_0 = d_0 \mathrm{tr}_P$. Un raisonnement similaire montre que $\mathrm{tr}_P d_i = d_i \mathrm{tr}_P$ si $1 \leq i \leq n-1$. Finalement

$$\mathrm{tr}_P d_n(p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \ldots \otimes a_n) = \mathrm{tr}_P(a_n p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i_0, \ldots, i_{n-1}} \varphi_{i_0}(a_n p) m \varphi(p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n-1}}(a_{n-1} p_{i_0})$$

D'autre part

$$d_n \mathrm{tr}_P(p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \ldots \otimes a_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i_0, \ldots, i_n} \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0}) \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n-1}}(a_{n-1} p_{i_n})$$

L'équation (1) montre à nouveau que

$$\sum_{i_0} \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0}) \varphi_{i_0}(p) = \varphi_{i_n}\Big(\sum_{i_0} a_n p_{i_0} \varphi_{i_0}(p)\Big) = \varphi_{i_n}(a_n p)$$

et il en résulte que $\mathrm{tr}_P d_n = d_n \mathrm{tr}_P$. D'où le lemme. $\square$

2.3. Homotopies. Le morphisme de complexes tr_P dépend des choix de l'entier m tel que P soit facteur direct de B^m, et des choix des éléments p_i et φ_i. Je vais montrer cependant qu'il n'en dépend pas à homotopie près.

Soit m' un autre entier tel que P soit facteur direct de $B^{m'}$, et p'_i, φ'_i $(1 \leq i \leq m')$ des éléments de P et P^* tels que pour tout $p \in P$

$$p = \sum_{i=1}^{m'} p'_i \varphi'_i(p) \tag{2}$$

Je note tr'_P le morphisme de complexe associé aux éléments p'_i et φ'_i. Si l est un entier entre 0 et n, soit

$$h_{l,n} : C_n(A, P \otimes_B M \otimes_B P^*) \to C_{n+1}(B, M)$$

l'application définie sur l'élément $u = p \otimes m \otimes \varphi \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ par

$$h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1} p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

lorsque $1 \leq l \leq n-1$, et par

$$h_{0,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(p_{i_2}) \otimes \varphi_{i_2}(a_1 p_{i_3}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

$$h_{n,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi'_{i_n}(a_n p'_{i_{n+1}}) \otimes \varphi'_{i_{n+1}}(p_{i_0})$$

Dans ces expressions, l'indice i_j de φ_{i_j} ou p_{i_j} varie de 1 à m, et l'indice i_j de φ'_{i_j} ou p'_{i_j} varie de 0 à m'.

Soit $h = h_n = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l h_{l,n}$.

Lemme 2.2: *Avec ces notations*

$$bh + hb = \mathrm{tr}_P - \mathrm{tr}'_P$$

donc le morphisme tr_P *ne dépend que de* P *à homotopie près.*

Démonstration: Il y a quatre identités à établir :

1) <u>Si $0 \leq k < l$, alors $d_k h_{l,n} = h_{l-1,n-1} d_k$:</u>
En effet, dans ces conditions

$$d_k h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_k}(a_k p'_{i_{k+1}})\varphi'_{i_{k+1}}(a_{k+1}p'_{i_{k+2}}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

Mais l'équation (2) permet d'écrire

$$\sum_{i_{k+1}} \varphi'_{i_k}(a_k p'_{i_{k+1}})\varphi'_{i_{k+1}}(a_{k+1}p'_{i_{k+2}}) = \varphi'_{i_k}\Big(\sum_{i_{k+1}} a_k p'_{i_{k+1}}\varphi'_{i_{k+1}}(a_{k+1}p'_{i_{k+2}})\Big) = \ldots$$

$$\ldots = \varphi'_{i_k}(a_k a_{k+1} p'_{i_{k+2}})$$

D'où la formule annoncée. Le calcul précédent est légèrement différent si $k = 0$, mais le résultat est le même.

2) <u>Si $0 \leq l \leq n$, alors $d_l h_{l,n} = d_l h_{l-1,n}$:</u>
En effet dans ce cas

$$d_l h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p)m\varphi(p'_{i_1})\otimes\ldots\otimes\varphi'_{i_{l-1}}(a_{l-1}p'_{i_l})\otimes\ldots$$

$$\ldots\otimes\varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}})\varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}})\otimes\varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}})\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

L'équation (2) donne alors

$$\sum_{i_{l+1}} \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}})\varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) = \varphi'_{i_l}\Big(\sum_{i_{l+1}} p'_{i_{l+1}}\varphi'_{i_{l+1}}(a_l p_{i_{l+2}})\Big) = \varphi'_{i_l}(a_l p_{i_{l+2}})$$

Donc en renumérotant les indices, il vient

$$d_l h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_n} \varphi_{i_0}(p)m\varphi(p'_{i_1})\otimes\varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2})\otimes\ldots$$

$$\ldots\otimes\varphi'_{i_{l-1}}(a_{l-1}p'_{i_l})\otimes\varphi'_{i_l}(a_l p_{i_{l+1}})\otimes\varphi_{i_{l+1}}(a_{l+1}p_{i_{l+2}})\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

Mais d'autre part

$$d_l h_{l-1,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p)m\varphi(p'_{i_1})\otimes\varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2})\otimes\ldots$$

$$\ldots\otimes\varphi'_{i_{l-1}}(a_{l-1}p'_{i_l})\otimes\varphi'_{i_l}(p_{i_{l+1}})\varphi_{i_{l+1}(a_l p_{i_{l+2}})\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0}})$$

L'équation (1) montre que

$$\sum_{i_{l+1}} \varphi'_{i_l}(p_{i_{l+1}})\varphi_{i_{l+1}}(a_l p_{i_{l+2}}) = \varphi'_{i_l}\Big(\sum_{i_{l+1}} p_{i_{l+1}}\varphi_{i_{l+1}}(a_l p_{i_{l+2}})\Big) = \varphi'_{i_l}(a_l p_{i_{l+2}})$$

Donc après renumérotation des indices

$$d_l h_{l+1,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_n} \varphi_{i_0}(p)m\varphi(p'_{i_1})\otimes\varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2})\otimes\ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_{l-1}}(a_{l-1}p'_{i_l}) \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p_{i_{l+1}}) \otimes \varphi_{i_{l+1}}(a_{l+1}p_{i_{l+2}}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

ce qui prouve la formule annoncée.

3) Si $l < k \leq n+1$, alors $d_k h_{l,n} = h_{l,n-1} d_{k-1}$:
En effet si $l < k \leq n$, alors

$$d_k h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi_{i_k}(a_{k-1}p_{i_{k+1}}) \varphi_{i_{k+1}}(a_k p_{i_{k+2}}) \otimes \varphi_{i_{k+2}}(a_{k+1}p_{i_{k+3}}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

La sommation sur i_{k+1} donne alors, grâce à l'équation (1)

$$d_k h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi(a_{k-1}a_k p_{i_{k+2}}) \otimes \varphi_{i_{k+2}}(a_k p_{i_{k+3}}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

D'où la formule annoncée, si $k \neq n+1$. Et si $k = n+1$, alors

$$d_{n+1} h_{l,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0}) \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots \varphi_{i_n}(a_{n-1}p_{i_{n+1}})$$

En sommant sur i_0 et en utilisant l'équation (1), il vient

$$d_{n+1} h_{l,n}(u) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_{n+1}}(a_n p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'_{i_1}(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots$$

$$\ldots \otimes \varphi'_{i_l}(a_l p'_{i_{l+1}}) \otimes \varphi'_{i_{l+1}}(p_{i_{l+2}}) \otimes \varphi_{i_{l+2}}(a_{l+1}p_{i_{l+3}}) \otimes \ldots \varphi_{i_n}(a_{n-1}p_{i_{n+1}})$$

D'où la formule dans ce cas.

4) De plus $d_0 h_{0,n} = \mathrm{tr}_P$ et $d_{n+1} h_{n,n} = \mathrm{tr}'_P$:
En effet

$$d_0 h_{0,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \varphi'_{i_1}(p_{i_2}) \otimes \varphi_{i_2}(a_1 p_{i_3}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_{n+1}}(a_n p_{i_0})$$

Une sommation sur i_1 et l'équation (2) donnent alors la première égalité. De même

$$d_{n+1} h_{n,n}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_{n+1}} \varphi'_{i_{n+1}}(p_{i_0}) \varphi_{i_0}(p) m \varphi(p'_{i_1}) \otimes \varphi'(a_1 p'_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_n}(a_n p'_{i_{n+1}})$$

La seconde égalité en découle, par sommation sur i_0 et usage de l'équation (1).

Pour achever la démonstration du lemme, il reste à calculer

$$bh = \sum_{\substack{0\leq k\leq n+1 \\ 0\leq l\leq n}} (-1)^{k+l} d_k h_{l,n} = \ldots$$

$$\ldots \sum_{0\leq k<l\leq n} (-1)^{k+l} d_k h_{l,n} + \sum_{0\leq l\leq n} (-1)^{2l} d_l h_{l,n} + \sum_{0\leq l<k\leq n+1} (-1)^{k+l} d_k h_{l,n}$$

La somme de droite s'écrit aussi

$$\sum_{0\leq l<k\leq n+1} (-1)^{k+l} h_{l,n-1} d_{k-1} = -\sum_{0\leq l\leq k\leq n} (-1)^{k+l} h_{l,n-1} d_k = \ldots$$

$$\ldots = -\sum_{0\leq l<k\leq n} (-1)^{k+l} h_{l,n-1} d_k - \sum_{0\leq l\leq n} (-1)^{2l} h_{l,n-1} d_{l-1} = \ldots$$

$$\ldots = -\sum_{0\leq l<k\leq n} (-1)^{k+l} h_{l,n-1} d_k - \sum_{0\leq l\leq n} d_{l+1} h_{l,n}$$

Cette dernière somme vaut

$$\sum_{0\leq l\leq n} d_{l+1} h_{l,n} = \sum_{0\leq l<n} d_{l+1} h_{l+1,n} + d_{n+1} h_{l,n} = \sum_{1\leq l\leq n} d_l h_{l,n} + \mathrm{tr}'_P(u)$$

Il vient

$$bh(u) = \sum_{0\leq l\leq n} d_l h_{l,n} - \sum_{1\leq l\leq n} d_l h_{l,n} - \mathrm{tr}'_P(u) - \ldots$$

$$\ldots - \sum_{0\leq k<l\leq n} (-1)^{k+l} h_{l-1,n-1} d_k - \sum_{0\leq l<k\leq n} (-1)^{k+l} h_{l,n-1} d_k$$

Soit finalement

$$(bh + hb)(u) = d_0 h_{0,n}(u) - \mathrm{tr}'_P(u)$$

ce qui prouve le lemme. □

Proposition 2.3: *1. Si A et B sont des k-algèbres, si P est un A-module-B projectif et de type fini comme module-B, si M est un B-module-B, alors le morphisme de complexes tr_P induit un morphisme*

$$t_{P,M} : H_*(A, P \otimes_B M \otimes_B P^*) \to H_*(B, M)$$

qui ne dépend que de P et M.

2. Si A, B et C sont des k-algèbres, si P est un A-module-B, projectif et de type fini comme module-B, si Q est un B-module-C, projectif et de type fini comme module-C, alors $P \otimes_B Q$ est un A-module-C, projectif et de type fini comme module-C. De plus, si M est un C-module-C, alors

$$t_{Q,M} \circ t_{P,Q\otimes_C M\otimes_C Q^*} = t_{P\otimes_B Q,M}$$

Démonstration: La première assertion résulte immédiatement du lemme 2.2. Pour la seconde, si $p_i \in P$, $\varphi_i \in P^*$ $(1 \leq i \leq m)$ satisfont l'équation (1) pour le module P, et si $q_j \in Q$, $\psi_j \in Q^*$ $(1 \leq j \leq m')$ sont des éléments analogues pour Q, alors soient

$$r_{i,j} = p_i \otimes q_j \in P \otimes_B Q \quad \theta_{i,j} : P \otimes_B Q \to C \quad \text{tel que} \quad \theta_{i,j}(p \otimes q) = \psi_j\Big(\varphi_i(p)q\Big)$$

Il est alors facile de vérifier que $\theta_{i,j} \in (P \otimes_B Q)^*$, et que si $p \in P$ et $q \in Q$, alors dans $P \otimes_B Q$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m'}} (p_i \otimes q_j)\theta_{i,j}(p \otimes q) = p \otimes q$$

ce qui montre que $P \otimes_B Q$ est projectif et de type fini comme module-C. Il est clair de plus que $(P \otimes_B Q)^*$ s'identifie à $Q^* \otimes_B P^*$. Soit alors

$$u = p \otimes q \otimes m \otimes \psi \otimes \varphi \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$$

un élément de $(P \otimes_B Q) \otimes_C M \otimes_C (Q^* \otimes_B P^*) \otimes A^{\otimes n}$. Alors

$$t_{P,Q\otimes M\otimes Q^*}(u) = \sum_{i_0,\ldots,i_n} \varphi_{i_0}(p)q \otimes m \otimes \psi\varphi(p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

L'image par $t_{Q,M}$ de cette somme est égale à

$$\sum_{\substack{i_0,\ldots,i_n\\ j_0,\ldots,j_n}} \psi_{j_0}\Big(\varphi_{i_0}(p)q\Big)m\psi\Big(\varphi(p_{i_1})q_{j_1}\Big)\otimes\psi_{j_1}\Big(\varphi_{i_1}(a_1 p_{i_1})q_{j_1}\Big)\otimes\ldots\otimes\psi_{j_n}\Big(\varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})q_{j_0}\Big)$$

et la seconde assertion en résulte. □

2.4. Additivité. Les morphismes tr_P sont additifs en P, au sens suivant :

Proposition 2.4: *Soient A et B des k-algèbres, et P et Q des A-modules-B, projectifs et de type fini comme modules-B. Si M est un B-module-B, soit $\pi_{P,M}$ (resp. $\pi_{Q,M}$) la projection de $(P \oplus Q) \otimes_B M \otimes_B (P \oplus Q)^*$ sur $P \otimes_B M \otimes_B P^*$ (resp. sur $Q \otimes_B M \otimes_B Q^*$. Alors $\mathrm{tr}_{P\oplus Q}$ factorise en*

$$\begin{array}{c}
C_*\Big(A, (P \oplus Q) \otimes_B M \otimes_B (P \oplus Q)^*\Big) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle C_*(A,\pi_{P,M}) \oplus C_*(A,\pi_{Q,M})} \\
C_*(A, P \otimes_B M \otimes_B P^*) \oplus C_*(A, Q \otimes_B M \otimes_B Q^*) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{tr}_P + \mathrm{tr}_Q} \\
C_*(B, M)
\end{array}$$

Démonstration: En effet, si $p_i \in P$ et $\varphi_i \in P^*$ $(1 \le i \le m)$ satisfont l'équation (1) pour P, si $q_j \in Q$ et ψ_j $(1 \le i \le m')$ satisfont (1) pour Q, alors soient $r_i \in P \oplus Q$ et $\rho_i \in (P \oplus Q)^*$ $(1 \le i \le m + m')$ les éléments définis par

$$r_i = \begin{cases} p_i & \text{si} \quad i \le m \\ q_{i-m} & \text{sinon} \end{cases} \qquad\qquad \rho_i(p \oplus q) = \begin{cases} \varphi_i(p) & \text{si} \quad i \le m \\ \psi_{i-m}(q) & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors pour $p \in P$ et $q \in Q$

$$\sum_{1 \le i \le m+m'} r_i \rho_i(p \oplus q) = \sum_{1 \le i \le m} p_i \varphi_i(p) \oplus \sum_{1 \le j \le m'} q_j \psi_j(q) = p \oplus q$$

Donc les r_i et ρ_i satisfont l'équation (1) pour $P \oplus Q$. Alors si

$$u = (p \oplus q) \otimes m \otimes (\varphi \oplus \psi) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in (P \oplus Q) \otimes_B M \otimes_B (P \oplus Q)^* \otimes A^{\otimes n}$$

par définition de $\mathrm{tr}_{P\oplus Q}$

$$\mathrm{tr}_{P\oplus Q}(u) = \sum_{1 \le i_0, \ldots, i_n \le m+m'} \rho_{i_0}(p \oplus q) m (\varphi \oplus \psi)(r_{i_1}) \otimes \rho_{i_1}(a_1 r_{i_2}) \otimes \ldots \rho_{i_n}(a_n r_{i_0}) \tag{3}$$

Or si $i \le m$, si $j > m$ et $a \in A$, alors $\rho_i(a r_j) = 0$ car $a r_j \in Q$, et la restriction de ρ_i à Q est nulle. De même, si $i > m$ et $j \le m$, alors $\rho_i(a r_j) = 0$. Alors dans l'équation (3), si le terme

$$\rho_{i_0}(p \oplus q) m (\varphi \oplus \psi)(r_{i_1}) \otimes \rho_{i_1}(a_1 r_{i_2}) \otimes \ldots \rho_{i_n}(a_n r_{i_0})$$

est non-nul, et si $i_0 \le m$, alors comme $\rho_{i_n}(a_n r_{i_0}) \ne 0$, j'ai aussi $i_n \le m$. De proche en proche, il en résulte que $i_j \le m$ pour tout j. De même, si $i_0 > m$, alors tous les i_j sont supérieurs à m. La proposition en découle. $\square$

3. Transferts en homologie de Hochschild

3.1. Définition. Soit A et B des k-algèbres, et P un A-module-B, projectif et de type fini comme module-B. Soient $p_i \in P$ et $\varphi_i \in P^*$ $(1 \leq i \leq m)$ satisfaisant l'équation (1).

Lemme 3.1: *L'élément $\delta_P = \sum_{i=1}^m p_i \otimes \varphi_i$ de $P \otimes_B P^*$ ne dépend que de P. De plus, pour tout $a \in A$*

$$a\delta_P = \delta_P a$$

et l'application $i_P : a \mapsto a\delta_P$ est un morphisme de A-modules-A de A dans $P \otimes_B P^*$

Démonstration: Si $p'_i \in P$ et $\varphi'_i \in P^*$ $(1 \leq i \leq m')$ sont d'autres éléments satisfaisant l'équation (1), alors

$$\delta_P = \sum_{1 \leq i \leq m} p_i \otimes \varphi_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m'}} p'_j \varphi'_j(p_i) \otimes \varphi_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m'}} p'_j \otimes \varphi'_j(p_i)\varphi_i$$

De plus, pour tout $p \in P$

$$\Big(\sum_{1 \leq i \leq m} \varphi'_j(p_i)\varphi_i \Big)(p) = \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi'_j(p_i)\varphi_i(p) = \varphi'_j\Big(\sum_{1 \leq i \leq m} p_i\varphi_i(p) \Big) = \varphi'_j(p)$$

ce qui montre que

$$\delta_P = \sum_{1 \leq j \leq m'} p'_j \otimes \varphi'_j$$

donc que δ_P ne dépend que de P.

De même, si $a \in A$

$$a\delta_P = \sum_{1 \leq i \leq m} ap_i \otimes \varphi_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} p_j\varphi_j(ap_i) \otimes \varphi_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} p_j \otimes \varphi_j(ap_i)\varphi_i$$

Or si $p \in P$

$$\Big(\sum_{1 \leq i \leq m} \varphi_j(ap_i)\varphi_i \Big)(p) = \varphi_j\Big(\sum_{1 \leq i \leq m} ap_i\varphi_i(p) \Big) = \varphi_j(ap) = (\varphi_j a)(p)$$

donc $a\delta_P = \delta_P a$, et la seconde assertion en découle. □

Comme $P \otimes_B P^* \simeq P \otimes_B B \otimes_B P^*$, le lemme précédent permet de définir un morphisme de complexes composé

$$\gamma_P : C_*(A, A) \xrightarrow{C_*(A, i_P)} C_*(A, P \otimes_B P^*) \xrightarrow{\mathrm{tr}_P} C_*(B, B)$$

Il est facile de voir que ce morphisme est donné par

$$\gamma_P(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots a_n) = \sum_{i_0,\dots,i_n} \varphi_{i_0}(a_0 p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \dots \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})$$

Il ne dépend que de P à homotopie près, et je noterai

$$t_P : HH_*(A) \to HH_*(B)$$

le morphisme qui s'en déduit entre les homologies de Hochschild, que j'appellerai *transfert* associé à P.

3.2. Composition. Les transferts ainsi obtenus se composent très simplement :

Proposition 3.2: *Soient A, B, et C des k-algèbres. Si P est un A-module-B, projectif et de type fini comme module-B, et Q un B-module-C, projectif et de type fini comme module-C, alors*

$$t_Q \circ t_P = t_{P \otimes_B Q}$$

Démonstration: Soient $q_j \in Q$ et $\psi_j \in Q^*$ $(1 \leq j \leq m')$ des éléments satisfaisant l'équation (1) pour le module Q. Alors

$$\gamma_Q \circ \gamma_P(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{1 \leq i_0,\dots,i_n \leq m} \gamma_Q\Big(\varphi_{i_0}(a_0 p_{i_1}) \otimes \varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) \otimes \dots \otimes \varphi_{i_n}(a_n p_{i_0})\Big) = \dots$$

$$\dots = \sum_{\substack{1 \leq i_0,\dots,i_n \leq m \\ 1 \leq j_0,\dots,j_n \leq m'}} \psi_{j_0}\Big(\varphi_{i_0}(a_0 p_{i_1}) q_{j_1}\Big) \otimes \psi_{j_1}\Big(\varphi_{i_1}(a_1 p_{i_2}) q_{j_2}\Big) \otimes \dots \otimes \psi_{j_n}\Big(\varphi_{i_n}(a_n p_{i_0}) q_{j_0}\Big)$$

En notant $\theta_{i,j}$ l'élément de $(P \otimes_B Q)^*$ défini par

$$\theta_{i,j}(p \otimes q) = \psi_j\Big(\varphi_i(p) q\Big)$$

j'ai aussi

$$\gamma_Q \circ \gamma_P(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \dots$$

$$\dots = \sum_{\substack{1 \leq i_0,\dots,i_n \leq m \\ 1 \leq j_0,\dots,j_n \leq m'}} \theta_{i_0,j_0}(a_0 p_{i_1} \otimes q_{j_1}) \otimes \theta_{i_1,j_1}(a_1 p_{i_2} \otimes q_{j_2}) \otimes \dots \otimes \theta_{i_n,j_n}(a_n p_{i_0} \otimes q_{j_0})$$

c'est-à-dire par définition $\gamma_{P \otimes_B Q}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$. □

3.3. Additivité Le transfert t_P est complètement additif vis-à-vis des suites exactes :

Proposition 3.3: *Soient A et B des k-algèbres, et*

$$0 \to P \overset{\alpha}{\to} Q \overset{\beta}{\to} R \to 0$$

une suite exacte de A-modules-B projectifs et de type fini comme modules-B. Alors

$$t_Q = t_P + t_R$$

Démonstration: En effet, les modules P, Q et R étant projectifs en restriction à B, il y a des morphismes de modules-B $\alpha' : Q \to P$ et $\beta' : R \to Q$ tels que

$$\alpha' \circ \alpha = Id_P \qquad \beta \circ \beta' = Id_R \qquad \alpha \circ \alpha' + \beta' \circ \beta = Id_Q$$

Soient alors $p_i \in P$ et $\varphi_i \in P^*$ $(1 \leq i \leq a)$ satisfaisant l'équation (1) pour P, et $r_j \in R$ et $\rho_j \in R^*$ $(1 \leq j \leq c)$ satisfaisant (1) pour R. En posant pour $1 \leq i \leq b = a + c$

$$q_i = \begin{cases} \alpha(p_i) & \text{si} \quad i \leq a \\ \beta'(r_{i-a}) & \text{si} \quad i > a+1 \end{cases} \qquad \psi_i = \begin{cases} \varphi_i \circ \alpha' & \text{si} \quad i \leq a \\ \rho_{i-a} \circ \beta & \text{si} \quad i > a+1 \end{cases}$$

j'obtiens des éléments $q_i \in Q$ et $\psi \in Q^*$ satisfaisant (1) pour Q : en effet, si $q \in Q$, alors

$$\sum_{1 \leq i \leq b} q_i \psi_i(q) = \sum_{1 \leq i \leq a} \alpha(p_i)\varphi_i\alpha'(q) + \sum_{1 \leq j \leq c} \beta'(r_j)\rho_j\beta(q) = \ldots$$

$$\ldots = \alpha\Big(\sum_{1 \leq i \leq a} p_i\varphi_i\alpha'(q)\Big) + \beta'\Big(\sum_{1 \leq j \leq c} r_j\rho_j\beta(q)\Big) = \alpha\alpha'(q) + \beta'\beta(q) = q$$

Alors si $u = a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \in C_n(A, A)$

$$\gamma_Q(u) = \sum_{1 \leq i_0, \ldots, i_n \leq b} \psi_{i_0}(a_0 q_{i_1}) \otimes \psi_{i_1}(a_1 q_{i_2}) \otimes \ldots \otimes \psi_{i_n}(a_n q_{i_0})$$

Or si $i \leq a$, si $x \in A$, et si $\psi_j(xq_i) \neq 0$, alors $j \leq a$: en effet, si $j > a$, alors

$$\psi_j(xq_i) = \rho_{j-a}\beta\Big(x\alpha(p_i)\Big) = \rho_{j-a}\Big(\beta\alpha(xp_i)\Big) = 0$$

Dans un terme non-nul de la somme donnant $\gamma_Q(u)$, si l'un des indices est inférieur ou égal à a, alors tous les indices le sont. Comme de plus

$$\psi_j(xq_i) = \varphi_j\alpha'\Big(x\alpha(p_i)\Big) = \varphi_j\alpha'\alpha(xp_i)\Big) = \varphi_j(xp_i)$$

si $1 \leq i, j \leq a$, et comme

$$\psi_j(xq_j) = \rho_{j-a}\beta\Big(x\beta'(r_{i-a})\Big) = \rho_{j-a}\Big(x\beta\beta'(r_{i-a})\Big) = \rho_{j-a}(xr_{i-a})$$

si $i, j > a$, la proposition en découle. $\square$

Corollaire 3.4: *Soit k un corps commutatif, et A et B des k-algèbres de dimension finie. Si P est un A-module-B projectif de type fini, alors le transfert $t_P : HH_n(A) \to HH_n(B)$ est nul si $n > 0$.*

Démonstration: En effet dans ce cas, le bimodule P est somme directe de bimodules indécomposables P_i. Ceux-ci sont de la forme $P_i \simeq Ae \otimes fB^{op}$, pour des idempotents $e \in A$ et $f \in B$. Alors $t_{P_i} = t_{fB} \circ t_{Ae}$ factorise par l'homologie de Hochschild de k, qui est nulle en degré $n > 0$.

4. Complexes de bimodules

4.1. Transfert associé à un complexe. Les constructions précédentes s'étendent au cas d'un complexe fini K_* de A-modules-B, projectifs et de type fini comme modules-B : le transfert t_{K_*} associé à un tel complexe est défini par

$$t_{K_*} = \sum_i (-1)^i t_{K_i}$$

Ce transfert ne dépend de K_* qu'à quasi-isomorphisme près :

Lemme 4.1: *Soient K_* et L_* deux complexes finis de A-modules-B, projectifs et de type fini comme modules-B. Si K_* et L_* sont quasi-isomorphes, alors $t_{K_*} = t_{L_*}$*

Démonstration: Soit $f : K_* \to L_*$ un quasi isomorphisme, et Γ_* le cône de f. Alors $\Gamma_n = K_{n-1} \oplus L_n$ pour tout n, et le complexe Γ_* est acyclique. Comme $t_{\Gamma_*} = t_{L_*} - t_{K_*}$, il suffit de montrer que $t_{K_*} = 0$ si K_* est acyclique, ce qui peut se voir par récurrence sur la longueur l de K : c'est clair pour les complexes ayant un ou deux termes non-nuls. Si $l \geq 3$, je peux supposer $K_n = 0$ si $n < 0$. Alors K est obtenu en recollant les deux complexes acycliques

$$K' : 0 \to \ldots K_n \to \ldots K_2 \to \mathrm{Ker} d_1 \to 0 \qquad K" : 0 \to \mathrm{Ker} d_1 \to K_1 \to K_0 \to 0$$

Comme $K"$ est exact, le module $\mathrm{Ker} d_1$ est bien projectif et de type fini comme module-B. Le transfert t_{K_*} est donné par

$$t_{K_*} = \sum_i (-1)^i t_{K_i} = [\sum_{i \geq 2} (-1)^i t_{K_i} - t_{Kerd_1}] + [t_{Kerd_1} - t_{K_1} + t_{K_0}]$$

La première somme entre crochets est égale à $t_{K'_*}$, donc à 0 par hypothèse de récurrence, et la seconde est égale à 0 par la proposition 3.3. D'où la proposition.

4.2. Composition.

Proposition 4.2: *Soient A, B, et C des k-algèbres. Si K_* est un complexe fini de A-modules-B, projectifs et de type fini comme modules-B, et L_* un complexe de B-modules-C, projectifs et de type fini comme modules-C, alors*

$$t_{L_*} \circ t_{K_*} = t_{K_* \otimes_B L_*}$$

Démonstration: Le produit tensoriel des complexes K_* et L_* est défini par

$$(K_* \otimes_B L_*)_n = \sum_{i+j=n} K_i \otimes_B L_j$$

Alors

$$t_{K_* \otimes_B L_*} = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} t_{L_j} \circ t_{K_i} = t_{L_*} \circ t_{K_*}$$

par la proposition 3.2. □

4.3. Catégorie associée. Soit A le complexe de A-modules-A réduit à A en degré 0. Il est clair que t_A est l'identité. Ainsi l'homologie de Hochschild est un foncteur sur la catégorie $\mathcal{C}$ suivante :

- Les objets de $\mathcal{C}$ sont les k-algèbres.
- Un morphisme dans $\mathcal{C}$ de A dans B est un complexe fini de A-modules-B, projectifs et de type fini comme modules-B.
- Le produit des morphismes $K_* : A \to B$ et $L_* : B \to C$ est le morphisme $L_* \otimes_B K_*$.

4.4. Homologie cyclique. Il est facile de vérifier que les morphismes γ_P sont compatibles avec le complexe double définissant l'homologie cyclique (cf. [2]) : il en résulte des transferts $t_P : HC_*(A) \to HC_*(B)$ associé à un A-module-B projectif et de type fini comme module-B, et t_{K_*} associé à un complexe fini de tels modules. L'homologie cyclique est aussi un foncteur sur $\mathcal{C}$.

Le lecteur intéressé trouvera dans l'article de B. Keller ([1]) un point de vue moins terre à terre et beaucoup plus général sur les transferts en homologie de Hochschild ou en homologie cyclique.

Références

[1] B.Keller. – Invariance and localization for cyclic homology of dg-algebras. – May 1995. Preprint, à paraître au J.P.A.A.

[2] J. L.Loday. – *Cyclic Homology.* – Springer, 1992, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, volume 301.

Serge BOUC
Equipe des groupes finis
UFR de Mathématiques
Université PARIS 7-Denis Diderot
2, place Jussieu
75251. PARIS Cedex 05
email : bouc@math.jussieu.fr