Résolutions de foncteurs de Mackey

S. Bouc

Abstract. I will build some standard resolutions for Mackey functors which are projective relative to p-subgroups. Those resolutions are closely related to the poset of p-subgroups. They lead to generalizations of known results on cohomology. They give a way to compute the Cartan matrix for Mackey functors, in terms of p-permutation modules, and to precise the structure of projective Mackey functors. They also provide results on complexes of projective Mackey functors and complexes of p-permutation modules.

1. Introduction

Je vais établir ici l'existence de résolutions standard pour les foncteurs de Mackey projectifs par rapport aux p-sous-groupes. Ces résolutions sont étroitement reliées à l'ensemble des p-sous-groupes du groupe considéré. Elles permettent de généraliser certains résultats connus pour la cohomologie, de calculer la matrice de Cartan des foncteurs de Mackey en termes de modules de p-permutations, et de préciser la structure des foncteurs de Mackey projectifs. Les méthodes utilisées permettent d'étudier également les complexes de foncteurs de Mackey projectifs, et les complexes de modules de p-permutations.

2. Notations et rappels

2.1. L'algèbre de Mackey. La plupart des résultats dont j'aurai besoin se trouvent dans l'article de J.Thévenaz et P.Webb ([**6**]) sur la structure des foncteurs de Mackey: parmi d'autres définitions équivalentes possibles, un foncteur de Mackey est un module sur l'algèbre de Mackey. Une définition possible de cette dernière est la suivante

Définition 2.1. Soit G un groupe fini, et R un anneau commutatif. L'algèbre de Mackey $\mu_R(G)$ est l'algèbre engendrée par les éléments t_H^K, r_H^K, et $c_{g,H}$, où H et K sont des sous-groupes de G tels que $H \subseteq K$, et g un élément de G avec les relations:

$$t_K^L t_H^K = t_H^L \text{ pour tout } H \subseteq K \subseteq L$$
$$r_H^K r_K^L = r_H^L \text{ pour tout } H \subseteq K \subseteq L$$
$$c_{g,{}^hK} c_{h,K} = c_{gh,K} \text{ pour tout } g, h, K$$
$$t_H^H = r_H^H = c_{h,H} \text{ pour tout } h, H \text{ tels que } h \in H$$
$$c_{g,K} t_H^K = t_{{}^gH}^{{}^gK} c_{g,H} \text{ pour tout } g, h, H, K$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 19A22 ; Secundary 20J05.

$$c_{g,K}r_K^H = r_{{}^gK}^{{}^gH}c_{g,H} \text{ pour tout } g, h, H, K$$

$$\sum_H t_H^H = \sum_H r_H^H = 1$$

$$r_K^H t_L^H = \sum_{x\in K\backslash H/L} t_{K\cap {}^xL}^K r_{K\cap {}^xL}^{{}^xL} c_{x,L} \text{ pour tout } K \subseteq H \supseteq L \quad \text{(axiome de Mackey)}$$

tous les autres produits de r_H^K, t_H^K et $c_{g,H}$ étant nuls.

En posant $c_x = \sum_H c_{x,H}$ pour $x \in G$, il en résulte que $c_{x,H} = c_x t_H^H$, et que l'application $x \mapsto c_x$ fait de $\mu_R(G)$ une G-algèbre intérieure (au sens de Puig [**3**]).

La proposition (3.4) de [**6**] prouve que les $c_{x,1}$, donc aussi les c_x, sont linéairement indépendants, ce qui permet d'identifier x et c_x. Avec ces notations, la proposition (3.2) de [**6**] prouve que $\mu_R(G)$ admet une base sur R, formée des éléments $t_{{}^xL}^H x r_L^K$, pour H et K sous-groupes de G, $x \in K\backslash G/H$, et L sous-groupe de $H \cap K^x$ modulo conjugaison par $H \cap K^x$.

Si H est un sous-groupe de G, les relations de définition de $\mu_R(G)$ permettent de définir un morphisme de l'anneau de Burnside $b_R(H)$ de H à coefficients dans R dans l'algèbre $\mu_R(G)$, qui envoie l'élément H/K sur l'élément $t_K^H r_K^H$. Je noterai $X \mapsto [X]$ ce morphisme.

Il y a d'autre part un morphisme naturel z de l'anneau de Burnside de G dans le centre de l'algèbre de Mackey ([**6**], proposition (9.2)), défini par

$$z(X) = \sum_{K\subseteq G} [\mathrm{Res}_K^G X]$$

qui permet d'utiliser les idempotents de l'anneau de Burnside pour décomposer l'algèbre de Mackey en morceaux plus petits.

Dans tout ce qui suit, je m'intéresserai uniquement au cas "de caractéristique p": je supposerai que tous les nombres premiers différents de p sont inversibles dans l'anneau R. Dans ces conditions (cf [**6**] section 9-10), l'algèbre $\mu_R(G)$ est Morita-équivalente à un produit direct d'algèbres indexées par les sous-groupes p-parfaits de G (i.e. les sous-groupes n'admettant aucun quotient p-groupe non-trivial).

Plus précisément, l'algèbre $\mu_R(G)$ est Morita-équivalente au produit direct sur les sous-groupes p-parfaits H de G (modulo conjugaison par G) des algèbres que je noterai $\mu_R^1(N_G(H)/H)$ (la catégorie des $\mu_R^1(G)$-modules est notée $Mack_R(G,1)$ dans [**6**]): l'algèbre $\mu_R^1(G)$ est la partie de $\mu_R(G)$ correspondant à l'idempotent f_1^G de l'anneau de Burnside de G. En notant $\underline{s}_p(G)$ l'ensemble des p-sous-groupes de G, l'idempotent f_1^G de l'anneau de Burnside $b_{\mathbb{Q}}(G)$ à coefficients rationnels est défini par

$$f_1^G = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)/G} e_P^G$$

avec

$$e_P^G = \frac{1}{|N_G(P)|}\sum_{Q\subseteq P} \tilde{\chi}]Q,P[|Q|G/Q$$

où $\tilde{\chi}]Q,P[$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite de l'ensemble des p-sous-groupes contenant strictement Q et strictement contenus dans P. Un calcul simple montre alors que

$$f_1^G = -\sum_{P\in \underline{s}_p(G)/G} \frac{\tilde{\chi}(s_p(N_G(P)/P))}{|N_G(P)/P|} G/P$$

avec $s_p(G) = \underline{s}_p(G) - \{1\}$.

Cette expression a le mérite de montrer que f_1^G est p-entier, et définit donc f_1^G dans $b_R(G)$ (en effet, il est connu que $\tilde{\chi}(s_p(G))$ est divisible par la p-partie de l'ordre de G, puisque par exemple, c'est le degré d'un caractère projectif de G (cf. [**4**])).

Avec ces notations, l'algèbre $\mu_R^1(G)$ s'identifie à $z(f_1^G)\mu_R(G)$. Une autre façon de voir cette algèbre à équivalence de Morita près est donnée par le lemme suivant

Lemme 2.2. *Soit* $e = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)} t_P^P$. *Alors* $e\mu_R(G)e$ *est une sous-algèbre de* $\mu_R^1(G)$, *et l'inclusion de* $e\mu_R(G)e$ *dans* $\mu_R^1(G)$ *est une équivalence de Morita.*

Je dois d'abord vérifier que $e\mu_R(G)e$ est une sous-algèbre de $\mu_R^1(G)$: il suffit pour cela de vérifier que $z(f_1^G)e = e$, ce qui sera vrai à fortiori si $z(f_1^G)t_P^P = t_P^P$ pour tout p-sous-groupe de G. Or il résulte de la section 9 de [**6**] que

$$z(f_1^G)t_P^P = [\mathrm{Res}_P^G(f_1^G)]t_P^P = [\mathrm{Res}_P^G(f_1^G)P/P] = [\mathrm{Res}_P^G(f_1^G)]$$

et le résultat sera acquis si je sais que $\mathrm{Res}_P^G f_1^G = f_1^P$, puisque l'expression de f_1^P prouve que $f_1^P = P/P$ si P est un p-groupe. Or celà résulte du

Lemme 2.3. *Soit* H *un sous-groupe de* G. *Alors* $\mathrm{Res}_H^G f_1^G = f_1^H$

Je peux faire le calcul dans $b_{\mathbb{Q}}(G)$: les idempotents e_L^G sont tels que pour tout X de $b_{\mathbb{Q}}(G)$

$$X = \sum_{\substack{L\in G\\ L mod. G}} |X^L| e_L^G$$

Alors

$$\mathrm{Res}_H^G e_P^G = \sum_{\substack{L\subseteq H\\ L mod. H}} \mathrm{Res}_H^G e_P^G . e_L^H = \sum_{\substack{L\subseteq H\\ L mod. H}} |(\mathrm{Res}_H^G e_P^G)^L| e_L^H$$

et comme $|(\mathrm{Res}_H^G e_P^G)^L|$ n'est différent de zéro que si L est conjugué de P dans G, auquel cas il vaut 1, je vois que $\mathrm{Res}_H^G e_P^G$ est la somme des e_L^H, où L décrit les conjugués de P contenus dans H, modulo conjugaison par H. Alors $\mathrm{Res}_H^G f_1^G$ est la somme sur les p-sous-groupes L de H, modulo H, des e_L^H, d'où le lemme 2.3, et la première assertion du lemme 1. La seconde résulte alors du

Lemme 2.4. *Soit* A *un anneau unitaire, et* e *un idempotent de* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) L'inclusion de eAe *dans* A *est une équivalence de Morita.*
2) L'idéal bilatère de A *engendré par* e *est égal à* A *(i.e.* $AeA = A$*).*

L'inclusion de eAe dans A définit un foncteur de restriction r de la catégorie A-mod des A-modules à gauche dans eAe-mod, par $r(M) = eM$. Ce foncteur admet un adjoint à gauche i, défini par $i(M) = A\otimes_{eAe} M$. Alors $ri(M) = eA\otimes_{eAe} M = eAe\otimes_{eAe} M = M$ et $ir(M)$ s'identifie à AeM. Donc si 1) est vraie, en particulier $AeA = A$, donc 2) est vraie. Inversement, si 2) est vraie, alors $ir(M) = AeM = AeAM = AM = M$, donc 1) est vraie.

Pour prouver le lemme 2.2, il reste alors à vérifier que l'élément neutre de $\mu_R^1(G)$, à savoir $z(f_1^G)$, appartient à l'idéal bilatère de $\mu_R^1(G)$ engendré par e. Il suffit pour cela que $t_P^H r_P^H$ soit dans ce même idéal, pour tout sous-groupe H de G et tout p-sous-groupe P de H. Et celà est clair, puisque $t_P^H r_P^H = t_P^H e r_P^H$. D'où le lemme 1.

Remarque 2.5. Les $e\mu_R(G)e$-modules sont en fait des objets bien naturels: ce sont exactement les foncteurs de Mackey "définis uniquement sur les p-sous-groupes ". Les $\mu_R^1(G)$-modules sont quant à eux les foncteurs de Mackey projectifs par rapport aux p-sous-groupes([**6**] Theorem 9.7). L'algèbre $\mu_R^1(G)$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mu_R(G)$ engendrée par les $x \in G$, et les r_Q^H et t_Q^H, où Q est un p-sous-groupe de G et H un sous-groupe (quelconque) de G.

D'autre part, le lemme 2.2 a la conséquence suivante:

Corollaire 2.6. *Soit S un p-Sylow de G, et M_* un complexe de foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G,1)$. Alors M_* est acyclique (resp. acyclique et scindé) si et seulement si il en est de même de sa restriction à S.*

En effet, une équivalence de Morita transforme une suite exacte (resp. une suite exacte scindée) en une suite exacte (resp. exacte scindée).

2.2. Une autre algèbre. J'utiliserai aussi ici une autre algèbre, que je note $r\mu_R(G)$, définie de manière similaire en me restreignant aux p-sous-groupes de G, et en "oubliant" les générateurs t_H^K et l'axiome de Mackey.

Plus précisément, soit A un R-module libre admettant pour base les triplets (x,Q,P), où x est un élément de G, et P et Q des p-sous-groupes de G tels que $Q \subseteq P$. Je fais de A une algèbre en définissant la multiplication des éléments de la base par
$$(x,Q,P)(y,R,S) = \delta_{P^y,R}(xy,Q^y,S)$$
Il est facile de voir que A est une algèbre associative. De plus, soit
$$e = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)} (1,P,P)$$
alors
$$e.(y,Q,R) = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)} \delta_{P^y,Q}(y,P^y,R) = (y,Q,R)$$
et
$$(y,Q,R).e = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)} \delta_{R,P}(y,Q,P) = (y,Q,R)$$
donc e est élément neutre de A.

Soit alors I le sous-R-module de A engendré par les éléments de la forme $u_{x,p,Q,P} = (xp,Q^p,P) - (x,Q,P)$, où $p \in P$. Alors I est un idéal bilatère de A. En effet
$$\begin{aligned}(y,R,S)u_{x,p,Q,P} &= \delta_{S^{xp},Q^p}(yxp,R^{xp},P) - \delta_{S^x,Q}(yx,R^x,P)\\ &= \delta_{S^x,Q}((yxp,R^{xp},P) - (yx,R^x,P)) = \delta_{S^x,Q}u_{yx,p,R^x,P}\end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned}u_{x,p,Q,P}(y,R,S) &= \delta_{P^y,R}(xpy,Q^{py},S) - \delta_{P^y,R}(xy,Q^y,S)\\ &= \delta_{P^y,R}u_{xy,p^y,Q^y,S}\end{aligned}$$
ce qui a un sens puisque si $P^y = R$, alors $p^y \in R \subseteq S$.

Je noterai $r\mu_R(G)$ l'algèbre quotient A/I. Il est facile de trouver une base de $r\mu_R(G)$:

Lemme 2.7. *Les éléments (x,Q,P), pour $Q \subseteq P \in \underline{s}_p(G)$, et $x \in G/P$, forment une base de $r\mu_R(G)$.*

Ce lemme n'est qu'une reformulation du suivant:

LEMME 2.8. *Soit A une R-algèbre admettant une base B sur R. Soit E une relation d'équivalence sur B telle que les éléments $x-y$, avec xEy, engendrent un idéal bilatère I de A. Alors A/I admet une base sur R, formée des images dans A/I des éléments de B/E.*

En effet, il est clair que les images de B/E engendrent A/I. puisque tous les éléments de la classe d'équivalence de $x \in B$ sont congrus à x modulo I. Et si $\sum_{x\in B/E} r_x x \in I$, avec $r_x \in R$, alors il existe des scalaires $s_{x,y} \in R$ tels que

$$\sum_{x\in B/E} r_x x = \sum_{xEy} s_{x,y}(x-y)$$

Alors pour tout x

$$r_x = \sum_{xEy} s_{x,y} - \sum_{yEx} s_{y,x}$$

En sommant cette relation pour x dans la classe d'équivalence de z, je peux supposer que seul r_z est non-nul, donc

$$r_z = \sum_{xEz}\Big(\sum_{xEy} s_{x,y} - \sum_{yEx} s_{y,x}\Big) = \sum_{x,yEz} s_{x,y} - \sum_{x,yEz} s_{x,y} = 0$$

puisque la relation E est symétrique et transitive. D'où les lemmes prédédents.

Je peux alors définir une application f de $r\mu_R(G)$ dans $e\mu_R^1(G)e$ en envoyant (x,Q,P) sur xr_Q^P. Il est facile de vérifier que l'application f est un morphisme d'algèbres unitaires.

LEMME 2.9. *Le morphisme f est injectif.*

(Par la suite, j'identifierai $r\mu_R(G)$ son image dans $\mu_R(G)$.)
Il faut vérifier pour cela que les éléments xr_Q^P, pour $x \in G/P$ et $Q \subseteq P$, sont indépendants dans $\mu_R(G)$: or si

$$\sum_{x\in G/P,Q,P} r_{x,Q,P}\, xr_Q^P = 0 \quad \text{dans } \mu_R(G)$$

alors en multipliant cette relation à gauche par t_R^R et à droite par r_P^P, pour R et P donnés, il vient

$$\sum_{\substack{x\in G/P,Q\\ {}^xQ=R}} r_{x,Q,P}\, t_R^R x r_Q^P = 0$$

ou encore

$$\sum_{\substack{x\in G/P\\ R^x\subseteq P}} r_{x,R^x,P}\, t_R^R x r_{R^x}^P = 0$$

Alors en utilisant la base de $\mu_R(G)$ mentionnée plus haut, il vient, pour toute double classe Rx_0P et tout sous-groupe Q_0 de $R^{x_0}\cap P$

$$\sum_{\substack{x\in Rx_0P/P\\ R^x=Q_0 mod. R^{x_0}\cap P}} r_{x,R^x,P} = 0$$

ou encore

$$\sum_{\substack{y\in R/(R\cap {}^{x_0}P)\\ R^{yx_0}=Q_0 mod. R^{x_0}\cap P}} r_{yx_0,R^{yx_0},P} = 0$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{y\in R/(R\cap {}^{x_0}P)\\ R^{x_0}=Q_0 mod. R^{x_0}\cap P}} r_{yx_0,R^{x_0},P}=0$$

En particulier en prenant $Q_0=R^{x_0}\cap P$, j'en déduis que $r_{x_0,R^{x_0}\cap P,P}=0$, et comme cette relation est vraie pour tous x_0,R,P, j'ai bien l'indépendance annoncée, et l'injectivité de f.

Il est également naturel de considérer ici l'algèbre $t\mu_R(G)$ définie de manière similaire à $r\mu_R(G)$ en "oubliant" les générateurs r_H^K. Cette algèbre s'identifie à la sous-algèbre de $\mu_R(G)$ engendrée par les éléments t_Q^Px. Elle s'identifie aussi à l'algèbre opposée de $r\mu_R(G)$: l'application qui envoie t_Q^P sur r_Q^P et $c_{x,Q}$ sur $c_{x^{-1},Q}$ définit en effet un anti-isomorphisme de $t\mu_R(G)$ sur $r\mu_R(G)$. Les résultats que je démontrerai ici pour $r\mu_R(G)$ auront une version "duale" pour $t\mu_R(G)$, et l'argument précédent m'évitera d'avoir à faire deux démonstrations.

L'homomorphisme de $r\mu_R(G)$ dans $\mu_R^1(G)$ permet de définir un foncteur d'oubli de la catégorie des foncteurs de Mackey projectifs par rapport aux p-sous-groupes dans celle des $r\mu_R(G)$-modules. Je noterai $\mathcal{R}$ ce foncteur: si M est un foncteur de Mackey, alors $\mathcal{R}(M)$ est le foncteur M, pour lequel je ne tiens compte que des évaluations aux p-sous-groupes, des restrictions et des conjugaisons par des éléments de G.

Comme toujours dans ces cas-là, le foncteur $\mathcal{R}$ admet un adjoint à gauche: soit N un $r\mu_R(G)$-module. Je pose $N(P)=r_P^PN$. Si H est un sous-groupe de G, alors H opère sur $\oplus_{P\in\underline{s}_p(H)}N(P)$, et je pose

$$\mathcal{I}(N)(H)=H_0(H,\oplus_{P\in\underline{s}_p(H)}N(P))$$

que je noterai aussi $(\oplus_{P\in\underline{s}_p(H)}N(P))_H$.

Si P est un p-sous-groupe de H, et v un élément de $\oplus_{P\in\underline{s}_p(H)}N(P)$, je note $\pi_H(v)$ son image dans $\mathcal{I}(N)(H)$.

Si $H\subseteq K$ sont deux sous-groupes de G, et si $v\in\oplus_{P\in\underline{s}_p(H)}N(P)$, je pose

$$t_H^K(\pi_H(v))=\pi_K(v)$$

ce qui a un sens puisque $H\subseteq K$.

De même, si Q est un p-sous-groupe de K, et $v\in N(Q)$, je pose

$$r_H^K(\pi_K(v))=\sum_{x\in H\backslash K/Q}\pi_H(r_{H\cap {}^xQ}^{{}^xQ}xv)$$

Il est facile de voir que l'application r_H^K est bien définie.

Enfin dans les mêmes conditions, si $x\in G$, le pose

$$c_{x,K}(\pi_K(v))=\pi_{{}^xK}(xv)$$

Avec ces notations:

Lemme 2.10. *L'opération qui à N associe $\mathcal{I}(N)$ définit un foncteur de la catégorie des $r\mu_R(G)$-modules dans $Mack_R(G,1)$, et ce foncteur est adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{R}$.*

Je dois vérifier que $\mathcal{I}(N)$ est un foncteur de Mackey, qui est de surcroit dans $Mack_R(G,1)$, et qu'il vérifie la propriété d'adjonction. Pour la première propriété, les seuls points non-évidents sont la transitivité des restrictions et l'axiome de

Mackey. Soient donc $H \subseteq K \subseteq L$ des sous-groupes de G, et $x = \pi_L(n) \in \mathcal{I}(N)(L)$, avec $P \in \underline{s}_p(L)$ et $n \in N(P)$.

Alors

$$r_K^L(x) = \sum_{l \in K\backslash L/P} \pi_K(r_{K\cap {}^lP}^{{}^lP} ln)$$

Donc

$$\begin{aligned} r_H^K r_K^L(x) &= \sum_{k\in H\backslash K/K\cap {}^lP} \sum_{l\in K\backslash L/P} \pi_H(r_{H\cap {}^k(K\cap {}^lP)}^{{}^k(K\cap {}^lP)} k r_{K\cap {}^lP}^{{}^lP} ln) \\ &= \sum_{k\in H\backslash K/K\cap {}^lP} \sum_{l\in K\backslash L/P} \pi_H(r_{H\cap {}^{kl}P}^{{}^{kl}P} kln) \end{aligned}$$

Or l'application $(k,l) \mapsto kl$ est une bijection de l'ensemble des couples (k,l) tels que $l \in K\backslash L/P$ et $k \in H\backslash K/K \cap {}^lP$ sur l'ensemble $H\backslash L/P$. Et alors j'ai bien $r_H^K r_K^L(x) = r_H^L(x)$, d'où la transitivité des restrictions.

Pour l'axiome de Mackey, soient $H \subseteq K \supseteq L$ des sous-groupes de G, et $x = \pi_L(n) \in \mathcal{I}(N)(L)$, avec $P \in \underline{s}_p(L)$. Alors $t_L^K(x) = \pi_K(n)$ donc

$$r_H^K t_L^K(x) = \sum_{k\in H\backslash K/P} \pi_H(r_{H\cap {}^kP}^{{}^kP} kn)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{y\in H\backslash K/L} t_{H\cap {}^yL}^H r_{H\cap {}^yL}^{{}^yL} yx &= \sum_{y\in H\backslash K/L} t_{H\cap {}^yL}^H r_{H\cap {}^yL}^{{}^yL} \pi_{{}^yL}(yn) \\ = \sum_{y\in H\backslash K/L} t_{H\cap {}^yL}^H & \sum_{z\in H\cap {}^yL\backslash {}^yL/{}^yP} \pi_{H\cap {}^yL}(r_{H\cap {}^yL\cap {}^{zy}P}^{{}^{zy}P} zyn) \\ &= \sum_{y\in H\backslash K/L} \sum_{z\in H\cap {}^yL\backslash {}^yL/{}^yP} \pi_H(r_{H\cap {}^{zy}P}^{{}^{zy}P} zyn) \end{aligned}$$

En remplaçant z par z^y dans cette somme, j'ai aussi

$$r_H^K t_L^K(x) = \sum_{y\in H\backslash K/L} \sum_{z\in H^y\cap L\backslash L/P} \pi_H(r_{H\cap {}^{yz}P}^{{}^{yz}P} yzn)$$

et comme ci-dessus, l'application $(y,z) \mapsto yz$ induit une bijection de l'ensemble des couples (y,z) tels que $y \in H\backslash K/L$ et $z \in H^y \cap L\backslash L/P$ sur l'ensemble $H\backslash K/P$. Alors j'ai bien

$$r_H^K t_L^K(x) = \sum_{y\in H\backslash K/L} t_{H\cap {}^yL}^H r_{H\cap {}^yL}^{{}^yL} yx$$

et l'axiome de Mackey est vérifié. Donc $\mathcal{I}(N)$ est bien un foncteur de Mackey.

Pour vérifier qu'il est dans $Mack_R(G,1)$, je dois vérifier que $z(f_1^G)$ agit trivialement. Soit donc H un sous-groupe de G, et $x = \pi_H(n) \in \mathcal{I}(H)(N)$, avec $n \in N(P)$. Comme $x = t_P^H(\pi_P(n))$, j'ai $z(f_1^G)x = [f_1^H]t_P^H(\pi_P(n))$. Alors si je sais que $[f_1^H]t_P^H = t_P^H[\mathrm{Res}_P^H f_1^H]$, le résultat sera démontré puisque $\mathrm{Res}_P^H f_1^H = f_1^P = P/P$. Or cela résulte du

LEMME 2.11. *Soient $K \subseteq H$ des sous-groupes de G, et $X \in b(H)$. Alors*

$$[X]t_K^H = t_K^H[\mathrm{Res}_K^H X] \quad \textit{dans } \mu_R(G)$$

En effet si $X = H/L$, alors $[X] = t_L^H r_L^H$ et

$$[X]t_K^H = t_L^H r_L^H t_K^H = \sum_{x\in L\backslash H/K} t_{L\cap {}^xK}^H r_{L\cap {}^xK}^{{}^xK} x = \sum_{x\in L\backslash H/K} x t_{L^x\cap K}^H r_{L^x\cap K}^K$$
$$= \sum_{x\in L\backslash H/K} t_{L^x\cap K}^H r_{L^x\cap K}^K$$

puisque $x \in H$, ce qui s'écrit encore

$$[X]t_K^H = t_K^H \sum_{x\in L\backslash H/K} t_{L^x\cap K}^K r_{L^x\cap K}^K = t_K^H[\mathrm{Res}_K^H H/L]$$

ce qui prouve le lemme 2.11.

Il me reste à vérifier la propriété d'adjonction: soit donc α un morphisme de $\mathcal{I}(N)$ dans un foncteur de Mackey M. Un tel morphisme est caractérisé par la donnée, pour tout sous-groupe H de G, d'un morphisme α_H de $\mathcal{I}(N)(H)$ dans $M(H)$, tel que

$$\alpha_H t_K^H = t_K^H \alpha_K \ , \ \alpha_K r_K^H = r_K^H \alpha_H \ , \ c_{x,H}\alpha_H = \alpha_{{}^xH} c_{x,H}$$

pour tout $K \subseteq H$ et tout $x \in G$.

Alors si P est un p-sous-groupe de G, je définis une application β_P de $N(P)$ dans $M(P)$ par $\beta_P = \alpha_P \pi_P$. Si Q est un sous-groupe de P, et si $n \in N(P)$, alors

$$r_Q^P(\pi_P(n)) = \sum_{x\in Q\backslash P/P} \pi_Q(r_{Q\cap {}^xP}^{{}^xP} xn) = \pi_Q(r_Q^P(n))$$

donc

$$r_Q^P\beta_P(n) = r_Q^P\alpha_P\pi_P(n) = \alpha_Q r_Q^P \pi_P(n) = \alpha_Q\pi_Q r_Q^P(n) = \beta_Q r_Q^P(n)$$

De même

$$c_{x,P}\beta_P(n) = c_{x,P}\alpha_P\pi_P(n) = \alpha_{{}^xP} c_{x,P}\pi_P(n) = \alpha_{{}^xP}\pi_{{}^xP} c_{x,P}(n) = \beta_{{}^xP} c_{x,P}(n)$$

et β définit un morphisme de N dans $\mathcal{R}(M)$.

Inversement, si β est un tel morphisme, j'ai pour tout p-sous-groupe P de G un morphisme β_P de $N(P)$ dans $M(P)$, tel que

$$r_Q^P\beta_P = \beta_Q r_Q^P \ \ c_{x,P}\beta_P = \beta_{{}^xP} c_{x,P}$$

Alors si H est un sous-groupe de G, je définis une application α_H de $\mathcal{I}(N)(H)$ dans $M(H)$ en posant $\alpha_H(\pi_H(n)) = t_P^H\beta_P(n)$, si P est un p-sous-groupe de H, et si $n \in N(P)$. Si K est un sous-groupe de H, si Q est un sous-groupe de P, et si $n \in N(Q)$, alors

$$\alpha_H t_K^H(\pi_K(n)) = \alpha_H(\pi_H(n)) = t_Q^H\beta_Q(n)$$

alors que

$$t_K^H\alpha_K(\pi_K(n)) = t_K^H t_Q^K\beta_Q(n)$$

ce qui prouve que $\alpha_H t_K^H = t_K^H\alpha_K$.

De même, si $n \in N(P)$, alors

$$\alpha_K r_K^H(\pi_H(n)) = \alpha_K(\sum_{x\in K\backslash H/P} \pi_K(r_{K\cap {}^xP}^{{}^xP} xn)) = \sum_{x\in K\backslash H/P} t_{K\cap {}^xP}^K \beta_{K\cap {}^xP} r_{K\cap {}^xP}^{{}^xP} xn$$
$$= \sum_{x\in K\backslash H/P} t_{K\cap {}^xP}^K r_{K\cap {}^xP}^{{}^xP}\beta_{{}^xP} xn = \sum_{x\in K\backslash H/P} t_{K\cap {}^xP}^K r_{K\cap {}^xP}^{{}^xP} x\beta_P n$$
$$= r_K^H t_P^H \beta_P(n) = r_K^H\alpha_H(\pi_H(n))$$

ce qui prouve que $\alpha_K r_K^H = r_K^H \alpha_H$.

Enfin

$$c_{x,H}\alpha_H\pi_H(n) = c_{x,H}t_P^H\beta_P(n) = t_{{}^xP}^{{}^xH}c_{x,P}\beta_P(n) = \dots$$

$$\dots = t_{{}^xP}^{{}^xH}\beta_{{}^xP}c_{x,P}(n) = \alpha_{{}^xH}c_{x,H}(\pi_H(n))$$

ce qui prouve que $c_{x,H}\alpha_H = \alpha_{{}^xH}c_{x,H}$, donc que α définit un morphisme de $\mathcal{I}(N)$ dans M.

Il est clair que les correspondances ainsi définies entre $\mathrm{Hom}_{\mu_R(G)}(\mathcal{I}(N), M)$ et $\mathrm{Hom}_{r\mu_R(G)}(N, \mathcal{R}(M))$ sont des bijections inverses l'une de l'autre, ce qui prouve la propriété d'adjonction, et termine la démonstration du lemme 2.10.

3. Exemples de $r\mu_R(G)$-modules

Soit I le sous-R-module de $r\mu_R(G)$ engendré par les xr_Q^P, où $x \in G$, et Q est un sous-groupe propre de P. Alors:

LEMME 3.1. *I est un idéal bilatère nilpotent de $r\mu_R(G)$, et le quotient $r\mu_R(G)/I$ est isomorphe au produit direct sur les p-sous-groupes P de G modulo conjugaison par G des algèbres* $\mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G RN_G(P)/P$

(pour la notion d'algèbre induite, voir [**3**])

En effet, si Q est un sous-groupe propre de P, et si $A \subseteq B$ sont des p-sous-groupes de G, et si $c \in G$, alors $cr_A^B xr_Q^P$ est nul si $B^x \neq Q$, et égal à $cxr_{A^x}^P$ sinon, et alors A^x est un sous-groupe propre de P. De même, le produit $xr_Q^P cr_A^B$ est nul si $P^c \neq A$, et égal à $xcr_{Q^c}^B$ sinon, et alors Q^c est un sous-groupe propre de B.

Il est clair de plus que I est nilpotent: en effet, si $x_1r_{Q_1}^{P_1}x_2r_{Q_2}^{P_2}\dots x_nr_{Q_n}^{P_n} \neq 0$, alors $P_1^{x_2} = Q_2$, $P_2^{x_3} = Q_3$, etc, et la suite $P_1^{x_2\dots x_n}, P_2^{x_3\dots x_n}, \dots, P_n$ est strictement croissante. Sa longueur est donc bornée par la p-valuation de l'ordre de G.

Alors si P est un p-sous-groupe de G, soit $e_P = \sum_{Q =_G P} r_Q^Q$. Les e_P sont des idempotents de $r\mu_R(G)$. De plus e_P et e_R sont orthogonaux si P et R ne sont pas conjugués dans G. Enfin $\sum_{P mod. G} e_P = \sum_P r_P^P$ est l'élément neutre de $r\mu_R(G)$.

D'autre part, le produit $r_P^P cr_A^B r_P^P$ n'est différent de 0 que si $P^c = A \subseteq B = P$, et l'algèbre $r_P^P r\mu_R(G) r_P^P$ admet donc pour base les éléments xr_P^P, pour $x \in N_G(P)/P$ (qui forment un sous-ensemble de la base de $r\mu_R(G)$ mentionnée dans le lemme4 2.7). De plus, l'application $x \in N_G(P)/P \mapsto xr_P^P$ définit un morphisme d'algèbres α de $RN_G(P)/P$ dans $r_P^P r\mu_R(G) r_P^P$, qui est donc un isomorphisme. Il est alors clair que l'application de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G RN_G(P)/P$ dans $e_P r\mu_R(G) e_P$ qui à $g \otimes u \otimes h$ associe $g\alpha(u)h$ est un isomorphisme, ce qui prouve le lemme.

Or si H est un sous-groupe de G, et A une H algèbre intérieure, l'inclusion de A dans $\mathrm{Ind}_H^G A$ est une équivalence de Morita: ceci résulte par exemple du lemme 2.4. Cette remarque, associée au lemme 3.1, permet de classifier les $r\mu_R(G)$-modules simples.

En effet, soit P un p-sous-groupe de G et V un $RN_G(P)/P$-module. Je définis un $r\mu_R(G)$-module $N_{P,V}$ en posant $N_{P,V} = \mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G V$. L'élément cr_A^B agit par 0 sur $N_{P,V}$ si A est un sous-groupe propre de B, ou si B n'est pas conjugué de P. Et si $A = B = P^x$, alors $cr_A^B.(y \otimes v) = 0$ si $xy \notin N_G(P)$, et $cr_A^B.(y \otimes v) = cx^{-1} \otimes xyv$ sinon (en notant que cet élément ne dépend pas du choix de l'élément x tel que $B = P^x$).

J'ai ainsi bien défini un $r\mu_R(G)$-module: je dois essentiellement vérifier que Q agit trivialement sur $N_{P,V}(Q)$ et que

$$cr_{P^x}^{P^x}(dr_{P^y}^{P^y}.(z\otimes v)) = (cr_{P^x}^{P^x}dr_{P^y}^{P^y}).(z\otimes v)$$

Le premier membre vaut 0 si $yz \notin N_G(P)$, et $cr_{P^x}^{P^x}.(dy^{-1}\otimes yzv)$ sinon. Ce dernier est nul si $xdy^{-1} \notin N_G(P)$, et vaut $cx^{-1}\otimes xdzv = cx^{-1}\otimes xdy^{-1}yzv = cdy^{-1}\otimes yzv$ sinon. Or le second membre est nul si $P^{xd} \neq P^y$, i.e. si $xdy^{-1} \notin N_G(P)$, et vaut $cdr_{P^y}^{P^y}.(z\otimes v)$ sinon. Ce dernier est nul si $yz \notin N_G(P)$, et vaut $cdy^{-1}\otimes yzv$ sinon. Les deux membres sont donc égaux.

La définition de $N_{P,V}$ entraîne que $N_{P,V}(Q) = r_Q^Q N_{P,V}$ est nul si Q n'est pas conjugué de P dans G. Et si $Q = P^x$, alors $N_{P,V}(Q)$ s'identifie à $x^{-1}\otimes V$. Alors si $q\in Q$, et si $x^{-1}\otimes v \in N_{P,V}(Q)$, j'ai $q.(x^{-1}\otimes v) = qx^{-1}\otimes v = x^{-1}.{}^xq\otimes v = x^{-1}\otimes^x qv = x^{-1}\otimes v$ puisque ${}^xQ = P$ et puisque P agit trivialement sur V. Donc $N_{P,V}$ est bien un $r\mu_R(G)$-module.

Les remarques précédentes jointes au lemme 3.1 donnent la

Proposition 3.2. *Les modules $N_{P,V}$, lorsque P décrit les p-sous-groupes de G à conjugaison près, et V les $RN_G(P)/P$ modules simples, forment un système de représentants des classes d'isomorphisme de $r\mu_R(G)$-modules simples.*

Pour décrire les $r\mu_R(G)$-modules projectifs indécomposables, j'ai besoin d'une notation: si A et B sont des sous-groupes de G, je note $T_G(A,B)$ l'ensemble des $x\in G$ tels que $A^x\subseteq B$. Soient alors P un p-sous-groupe de G, et V un $RN_G(P)/P$-module. Si Q est un p-sous-groupe de G, je définis un sous-R-module de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G V$, noté $L_{P,V}(Q)$, par

$$L_{P,V}(Q) = \oplus_{x\in T_G(Q,P)/N_G(P)} x\otimes V$$

et je poserai $L_{P,V} = \oplus_Q L_{P,V}(Q)$.

Si $Q\supseteq R$, alors l'inclusion de $T_G(Q,P)/N_G(P)$ dans $T_G(R,P)/N_G(P)$ induit un morphisme r_R^Q de $L_{P,V}(Q)$ dans $L_{P,V}(R)$. Et si $x\in G$, alors la bijection naturelle $yN_G(P)\mapsto xyN_G(P)$ de $T_G(Q,P)/N_G(P)$ dans $T_G({}^xQ,P)/N_G(P)$ induit un morphisme, que je note encore x, de $L_{P,V}(Q)$ dans $L_{P,V}({}^xQ)$. Alors

Proposition 3.3. *Ces définitions font de $L_{P,V}$ un $r\mu_R(G)$-module, et le foncteur de $RN_G(P)/P$-Mod dans $r\mu_R(G)$-Mod qui à V associe $L_{P,V}$ est adjoint à gauche du foncteur de restriction déduit de l'inclusion $u\mapsto ur_P^P$ de $RN_G(P)/P$ dans $r\mu_R(G)$.*

L'action de cr_A^B sur l'élément $x\otimes v$ de $L_{P,V}(Q)$ est définie par

$$cr_A^B.x\otimes v = \delta_{B,Q}cx\otimes v$$

où, lorsque $B=Q$, l'élément $cx\otimes v$ est vu dans $L_{P,V}({}^cA)$. En particulier, si $q\in Q$, alors $q.(x\otimes v) = qx\otimes v = xq^x\otimes v = x\otimes q^xv = x\otimes v$, car $Q^x\subseteq P$. Donc Q agit trivialement sur $L_{P,V}(Q)$.

De même,

$$dr_E^F.(cr_A^B.x\otimes v) = \delta_{F,{}^cA}\delta_{B,Q}dcx\otimes v$$

avec $dcx\otimes v\in L_{P,V}({}^dE)$ si $B=Q$ et $F={}^cA$.

Comme $dr_E^F.cr_A^B = \delta_{F^c,A}dcr_{E^c}^B$, j'ai

$$(dr_E^F.cr_A^B).x\otimes v = \delta_{F^c,A}\delta_B^Q dcx\otimes v$$

avec $dcx \otimes v \in L_{P,V}({}^{dc}(E^c))$ si $F^c = A$ et $B = Q$. Donc $L_{P,V}$ est bien un $r\mu_R(G)$-module.

Il est clair que la construction qui à V associe $L_{P,V}$ est fonctorielle en V. Si M est un $r\mu_R(G)$-module, un morphisme α de $L_{P,V}$ dans M est caractérisé par la donnée, pour tout p-sous-groupe Q de G, d'un morphisme α_Q de $L_{P,V}(Q)$ dans $M(Q)$, tel que

$$\alpha_R r_R^Q = r_R^Q \alpha_Q \quad x\alpha_Q = \alpha_{{}^xQ} x$$

Comme $L_{P,V}(P)$ s'identifie à V comme $RN_G(P)/P$-module, j'en déduis un morphisme $\beta = \alpha_P$ de V dans $M(P)$. Et comme l'élément $x \otimes v$ de $L_{P,V}(Q)$ est égal à $r_Q^{{}^xP}(x \otimes v)$, j'ai

$$\alpha_Q(x \otimes v) = r_Q^{{}^xP} \alpha_{{}^xP}(x \otimes v) = r_Q^{{}^xP} x\alpha_P(1 \otimes v) = xr_{Q^x}^P \beta(v)$$

et β détermine entièrement α.

Inversement, si β est un morphisme de V dans $M(P)$, si Q est un p-sous-groupe de G, et si $x \otimes v \in L_{P,V}(Q)$, je pose $\alpha_Q(x \otimes v) = xr_{Q^x}^P \beta(v)$, ce qui a un sens puisque $Q^x \subseteq P$.

Alors $r_R^Q \alpha_Q(x \otimes v) = r_R^Q x r_{Q^x}^P \beta(v) = r_{R^x}^P \beta(v) = \alpha_R r_R^Q(x \otimes v)$, donc $\alpha_R r_R^Q = r_R^Q \alpha_Q$.

D'autre part, $y\alpha_Q(x \otimes v) = yxr_{Q^x}^P \beta(v)$, alors que $\alpha_{{}^yQ}(y.(x \otimes v)) = \alpha_{{}^yQ}(yx \otimes v) = yxr_{({}^yQ)^{yx}}^P \beta(v)$, ce qui prouve que α est un morphisme de $r\mu_R(G)$-modules.
Enfin il est clair que les correspondances ainsi définies entre $\mathrm{Hom}_{r\mu_R(G)}(L_{P,V}, M)$ et $\mathrm{Hom}_{RN_G(P)/P}(V, M(P))$ sont des bijections inverses l'une de l'autre. D'où la proposition.

Corollaire 3.4. *Si E_V est une enveloppe projective du $RN_G(P)/P$- module simple V, alors L_{P,E_V} est une enveloppe projective du $r\mu_R(G)$-module simple $N_{P,V}$.*

Cela résulte en effet des égalités

$$\mathrm{Hom}_{r\mu_R(G)}(L_{P,E_V}, M) = \mathrm{Hom}_{RN_G(P)/P}(E_V, M(P))$$

et $N_{P,V}(P) = V$: si f est un morphisme essentiel de E_V dans V, alors f définit un morphisme $L(f)$ de L_{P,E_V} dans $N_{P,V}$, qui est lui aussi essentiel: si L_1 est un sous-module de L_{P,E_V} qui s'envoie par f *sur* $N_{P,V}$, alors $L_1(P)$ s'envoie par f *sur* V, donc $L_1(P) = E_V$. Et comme $L_1(Q)$ est la somme pour $x \in T_G(Q,P)$ des $xr_{Q^x}^P(L_1(P))$, il en résulte que $L_1(Q) = L_{P,V}(Q)$ pour tout Q, donc que $L_1 = L_{P,V}$.

Remarque 3.5. Le module $L_{P,E_V}(1)$ s'identifie à $X = \mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G E_V$ comme RG-module. Dans le cas où R est un corps de caractéristique p, il est facile de vérifier que le module $L_{P,E_V}(Q)$ s'identifie au module

$$X[Q] = X^Q / (\sum_{R \subset Q} Tr_R^Q(X^R))$$

Les $r\mu_R(G)$-modules indécomposables sont alors en bijection avec les modules de p-permutation de la forme $\mathrm{Ind}_{N_G(P)/P}^G E_V$, où P est un p-sous-groupe de G et E_V un $RN_G(P)/P$-module projectif indécomposable.

Le foncteur de restriction déduit de l'inclusion $u \mapsto ur_P^P$ de $RN_G(P)/P$ dans $r\mu_R(G)$ admet également un adjoint à droite: si V est un $RN_G(P)/P$ module, et Q

un p-sous-groupe de G, alors Q agit à droite sur $N_G(P)\backslash T_G(P,Q)$, donc à gauche sur $\oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)}x^{-1}\otimes V$, et je pose

$$L^o_{P,V}(Q) = (\oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)}x^{-1}\otimes V)^Q$$

Alors si $Q \subseteq R$, l'inclusion de $N_G(P)\backslash T_G(P,Q)$ dans $N_G(P)\backslash T_G(P,R)$ permet de définir un morphisme r^R_Q de $L^o_{P,V}(R)$ dans $L^o_{P,V}(Q)$, par $r^R_Q(\oplus_x x^{-1}\otimes v_x) = \oplus_{P^x\subseteq Q}x^{-1}\otimes v_x$. De même, la bijection naturelle $y\mapsto yx^{-1}$ de $N_G(P)\backslash T_G(P,Q)$ dans $N_G(P)\backslash T_G(P,{}^xQ)$ permet de définir un morphisme noté x de $L^o_{P,V}(Q)$ dans $L^o_{P,V}({}^xQ)$, en posant $x.\oplus_y (y^{-1}\otimes v_y) = \oplus_y (yx^{-1})^{-1}\otimes v_y = \oplus_y xy^{-1}\otimes v_y$.

Il est alors clair que Q agit trivialement sur $L^o_{P,V}(Q)$. De plus

$$\begin{aligned} dr^F_E(cr^B_A.(\oplus_x x^{-1}\otimes v_x)) &= \delta_{B,Q}dr^F_E(\oplus_{P^x\subseteq A}cx^{-1}\otimes v_x)\\ &= \delta_{B,Q}\delta_{F,{}^cA}\oplus_{P^x\subseteq A, P^{xc^{-1}}\subseteq E} dcx^{-1}\otimes v_x \end{aligned}$$

Or si $F={}^cA$, alors $P^{xc^{-1}}\subseteq E$ entraîne que $P^x\subseteq E^c\subseteq F^c = A$, donc

$$dr^F_E(cr^B_A.(\oplus_x x^{-1}\otimes v_x)) = \delta_{B,Q}\delta_{F,{}^cA}\oplus_{P^{xc^{-1}}\subseteq E} dcx^{-1}\otimes v_x$$

Comme d'autre part, $dr^F_E cr^B_A = \delta_{F^c,A}dcr^B_{E^c}$, j'ai aussi

$$(dr^F_E cr^B_A)\oplus_x x^{-1}\otimes v_x = \delta_{B,Q}\delta_{F^c,A}\oplus_{P^x\subseteq E^c} dcx^{-1}\otimes v_x$$

et j'ai bien fait de $L^o_{P,V} = \oplus_Q L^o_{P,V}(Q)$ un $r\mu_R(G)$-module.

Cette construction est clairement fonctorielle en V. Et si α est un morphisme d'un $r\mu_R(G)$-module M dans $L^o_{P,V}$, alors comme $L^o_{P,V}(P) = 1\otimes V$, j'en déduis un morphisme β de $M(P)$ dans V, tel que $\alpha_P = 1\otimes\beta$. Si Q est un p-sous-groupe de G, si $m\in M(Q)$, et si $\alpha_Q(m) = \oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)}x^{-1}\otimes v_x$, soit $x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)$. Comme $r^Q_{P^x}\alpha_Q(m) = x^{-1}\otimes v_x$, je dois donc avoir $x^{-1}\otimes v_x = r^Q_{P^x}\alpha_Q(m) = \alpha_{P^x}r^Q_{P^x}(m) = x^{-1}\alpha_P x r^Q_{P^x}(m)$, j'ai donc $v_x = \beta(xr^Q_{P^x}(m))$, et β détermine entièrement α.

Inversement, si β est donné, je définis α_Q de $M(Q)$ dans $L^o_{P,V}(Q)$ en posant

$$\alpha_Q(m) = \oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)}x^{-1}\otimes\beta(xr^Q_{P^x}(m))$$

Il est facile de voir que α est un morphisme de M dans $L^o_{P,V}$. Les deux constructions ci-dessus sont clairement inverses l'une de l'autre. Donc

Proposition 3.6. *Le foncteur qui à V associe $L^o_{P,V}$ est adjoint à droite du foncteur de restriction de $r\mu_R(G)$-Mod dans $RN_G(P)/P$-Mod.*

ce qui permet bien sûr de trouver les $r\mu_R(G)$-modules injectifs.

4. Résolutions

4.1. Projectivité relative à un foncteur. La définition suivante généralise la notion de projectivité relative, lorsque $\mathcal{R}$ est un foncteur de restriction à un sous-groupe.

Définition 4.1. Soient C et D des catégories, et $\mathcal{R}$ un foncteur de C dans D. Je dirai qu'un objet M de C est projectif par rapport à $\mathcal{R}$ (ou projectif relativement à $\mathcal{R}$, ou $\mathcal{R}$-projectif) si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & M\\ & & \downarrow\beta\\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

tel que le morphisme $\mathcal{R}(\alpha)$ soit un épimorphisme scindé, il existe un morphisme ϕ de M dans X tel que $\alpha\phi = \beta$.

Le lemme suivant résulte immédiatement des définitions:

LEMME 4.2. *a) Si M est projectif par rapport à $\mathcal{R}$, et si $f : M \to N$ est un épimorphisme scindé, alors N est projectif par rapport à $\mathcal{R}$.*
b) Si M_1 et M_2 sont projectifs par rapport à $\mathcal{R}$, et si N est un coproduit de M_1 et M_2, alors N est projectif par rapport à $\mathcal{R}$

Le lemme suivant est une formalisation de résultats connus dans les cas classiques de projectivité relative, dans le cas où $\mathcal{R}$ a un adjoint à gauche:

LEMME 4.3. *Soient C et D des catégories, et $\mathcal{R}$ un foncteur de C dans D, ayant un adjoint à gauche $\mathcal{I}$. Soit M un objet de C. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *L'objet M est projectif par rapport à $\mathcal{R}$.*
2. *Le morphisme naturel $\mathcal{IR}(M) \to M$ déduit par adjonction de l'identité de $\mathcal{R}(M)$ est un épimorphisme scindé.*
3. *Il existe un objet Y de D et un épimorphisme scindé $\mathcal{I}(Y) \to M$.*

Si X est un objet de C, si Y est un objet de D, et α (resp. β) un morphisme de Y dans $\mathcal{R}(X)$ (resp. un morphisme de $\mathcal{I}(Y)$ dans X), je note α^* (resp. β_*) le morphisme de $\mathcal{I}(Y)$ dans X (resp. de Y dans $\mathcal{R}(X)$) qui lui correspond par adjonction. Alors $(\alpha^*)_* = \alpha$ et $(\beta_*)^* = \beta$.

Puisque l'isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_C(\mathcal{I}(-), -)$ et $\mathrm{Hom}_D(-, \mathcal{R}(-))$ est un isomorphisme de bifoncteurs, si $f \in \mathrm{Hom}_D(Y_1, Y_2)$, et si $\alpha \in \mathrm{Hom}_D(Y_2, \mathcal{R}(X))$, j'ai $(\alpha f)^* = \alpha^*\mathcal{I}(f)$. De même, si $g \in \mathrm{Hom}_C(X_1, X_2)$, et si $\beta \in \mathrm{Hom}_C(\mathcal{I}(Y), X_1)$, alors $(g\beta)_* = \mathcal{R}(g)\beta_*$.

Alors si 1) est vrai, la considération du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & & \downarrow Id_M \\ & (Id_{\mathcal{R}(M)})^* & \\ \mathcal{IR}(M) & \to & M \end{array}$$

montre que 2) est vraie, si je sais que le morphisme $u = \mathcal{R}((Id_{\mathcal{R}(M)})^*)$ est un épimorphisme scindé. Mais si je pose $v = (Id_{\mathcal{IR}(M)})_*$, j'ai

$$uv = ((Id_{\mathcal{R}(M)})^* Id_{\mathcal{R}(M)})_* = ((Id_{\mathcal{R}(M)})^*)_* = Id_{\mathcal{R}(M)}$$

Il est clair que 2) implique 3).
Inversement, si $u : \mathcal{I}(Y) \to M$ est un épimorphisme scindé, alors il existe $v : M \to \mathcal{I}(Y)$ tel que $uv = Id_M$. D'autre part, le morphisme $\mathcal{I}(u_*)$ est un morphisme de $\mathcal{I}(Y)$ dans $\mathcal{IR}(M)$ et

$$(Id_{\mathcal{R}(M)})^*\mathcal{I}(u_*) = (Id_{\mathcal{R}(M)}u_*)^* = u$$

donc

$$(Id_{\mathcal{R}(M)})^*\mathcal{I}(u_*)v = uv = Id_M$$

ce qui prouve 2).
Enfin si 2) est vraie, soit $\tau : M \to \mathcal{IR}(M)$ tel que $(Id_{\mathcal{R}(M)})^*\tau = Id_M$. Si j'ai un

diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

tel que $\mathcal{R}(\alpha)$ soit un épimorphisme scindé, alors il existe un morphisme

$$\gamma : \mathcal{R}(Y) \to \mathcal{R}(X)$$

tel que $\mathcal{R}(\alpha)\gamma = Id_{\mathcal{R}(Y)}$. En posant alors

$$\phi = (Id_{\mathcal{R}(X)})^* \mathcal{I}(\gamma)\mathcal{I}\mathcal{R}(\beta)\tau$$

il vient

$$\begin{aligned} \alpha\phi &= \alpha(Id_{\mathcal{R}(X)})^* \mathcal{I}(\gamma\mathcal{R}(\beta))\tau \\ &= (\mathcal{R}(\alpha)Id_{\mathcal{R}(X)})^* \mathcal{I}(\gamma\mathcal{R}(\beta))\tau \\ &= (\mathcal{R}(\alpha)\gamma\mathcal{R}(\beta))^* \tau = (\mathcal{R}(\beta))^* \tau \\ &= (\mathcal{R}(\beta)Id_{\mathcal{R}(M)})^* \tau = \beta(Id_{\mathcal{R}(M)})^* \tau = \beta \end{aligned}$$

ce qui prouve 1), et l'équivalence des conditions annoncées.

LEMME 4.4. *Soient C et D des catégories, et $\mathcal{R}$ un foncteur de C dans D, ayant un adjoint à gauche $\mathcal{I}$. Alors $\mathcal{R}$ est fidèle si et seulement si pour tout objet M de C, le morphisme naturel de $\mathcal{I}\mathcal{R}(M)$ dans M est un épimorphisme.*

En effet, le morphisme de $\mathcal{I}\mathcal{R}(M)$ dans M est un épimorphisme si et seulement si pour tout objet X, le morphisme

$$\mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}\mathcal{R}(M), X)$$

est injectif, i.e. par adjonction si et seulement si le morphisme

$$\mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{R}(M), \mathcal{R}(X))$$

est injectif.

REMARQUE 4.5. Il en résulte que si $\mathcal{R}$ est fidèle, alors tout objet projectif est projectif par rapport à $\mathcal{R}$.

Je suppose à présent que C et D sont des catégories abéliennes, que $\mathcal{R}$ est fidèle et admet un adjoint à gauche $\mathcal{I}$. Je note $K(M)$ le noyau de l'épimorphisme de $\mathcal{I}\mathcal{R}(M)$ dans M.

Alors $K(M)$ est le quotient de $\mathcal{I}\mathcal{R}K(M)$ par $K(K(M)) = K^2(M)$, qui est lui-même le quotient de $\mathcal{I}\mathcal{R}K^2(M)$ par $K(K^2(M)) = K^3(M)$, et je peux ainsi construire une résolution de M par des objets de C de la forme $\mathcal{I}(L)$, qui sont projectifs par rapport à $\mathcal{R}$. En fait:

LEMME 4.6. *Soient C et D des catégories abéliennes, et $\mathcal{R}$ un foncteur fidèle de C dans D admettant un adjoint à gauche $\mathcal{I}$. Alors pour tout objet M de C, il existe une résolution*

$$\ldots \to L_i \to L_{i-1} \to \ldots \to L_0 \to M \to 0$$

où les L_i sont projectifs par rapport à $\mathcal{R}$, telle que le complexe

$$\ldots \to \mathcal{R}(L_i) \to \mathcal{R}(L_{i-1}) \to \ldots \to \mathcal{R}(L_0) \to \mathcal{R}(M) \to 0$$

soit exact et scindé, et une telle résolution de M est unique à homotopie près.

L'existence d'une telle résolution résulte de l'argument précédent, et du fait que le morphisme $\mathcal{RIR}(M) \to \mathcal{R}(M)$ est un épimorphisme scindé (voir la démonstration du lemme 4.3).

Un argument classique d'homologie prouve alors que si M et N sont deux objets de C, si X_* est une résolution de M par des objets $\mathcal{R}$-projectifs, et Y_* une résolution de N telle que le complexe $\mathcal{R}(Y_*) \to \mathcal{R}(N)$ soit scindé, tout homomorphisme de M dans N se relève en un homomorphisme de X_* dans Y_*, et un tel relèvement est unique à homotopie près. L'unicité de la résolution cherchée en résulte.

Remarque 4.7. Si M est projectif, une résolution de M ayant les propriétés du lemme 4.6 est scindée, car M est projectif par rapport à $\mathcal{R}$.

4.2. Résolutions de foncteurs de Mackey. Les foncteurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{I}$ définis plus haut entre les catégories $r\mu_R(G)$-Mod et $Mack_R(G,1)$ ont les propriétés du lemme 4.6 (le foncteur $\mathcal{R}$ est fidèle car c'est le composé d'un foncteur d'oubli et d'une équivalence de catégories).

Ainsi, tout foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$ admet une résolution par des foncteurs $\mathcal{R}$-projectifs, dont la transformée par $\mathcal{R}$ est scindée. Cela signifie cette résolution peut être scindée par des homomorphismes commutant aux conjugaisons par G, et aux restrictions (mais ne commutant pas, en général aux traces). De plus une telle résolution est unique à homotopie près. Ce qui est particulier ici est que cette résolution peut être choisie *finie*.

En effet, soit M un foncteur de Mackey. Alors $K(M)(H)$ est l'image dans $(\oplus_{P\in \underline{s}_p(H)}M(P))_H$ de l'ensemble des suites n_P telles que $\sum_P t_P^H n_P = 0$. En particulier, si H est un p-sous-groupe Q de G, cette condition équivaut à $n_Q = -\sum_{P\subset Q} t_P^Q n_P$. J'en déduis que $\mathcal{R}K(M)(Q)$ s'identifie à

$$\mathcal{R}(M)_1(Q) = (\oplus_{P\subset Q} M(P))_Q$$

Plus généralement, soit M un $r\mu_R(G)$-module: je poserai $M_0 = M$, et si i est un entier positif, je pose

$$M_i(Q) = (\oplus_{P_0\subset P_1\cdots\subset P_{i-1}\subset Q} M(P_0))_Q$$

Si $n \in M(P_0)$, je note $n_{P_0,P_1,\ldots,P_{i-1},Q}$ l'élément correspondant de $(\oplus_{P_0\subset P_1\cdots\subset P_{i-1}\subset Q} M(P_0))$, et $\pi_Q(n_{P_0,P_1,\ldots,P_{i-1},Q})$ son image dans $M_i(Q)$. Si $x\in G$, je pose

$$x\pi_Q(n_{P_0,\ldots,P_{i-1},Q}) = \pi_{{}^xQ}((xn)_{{}^xP_0,\ldots,{}^xP_{i-1},{}^xQ})$$

et si S est un sous-groupe de Q, je pose

$$r_S^Q\pi_Q(n_{P_0,\ldots,P_{i-1},Q}) = \sum_{\substack{x\in S\backslash Q/P_0\\ S\cap{}^xP_0\neq S\cap{}^xP_1\cdots\neq S\cap{}^xP_{i-1}\neq S}} \pi_S((xr^{P_0}_{S^x\cap P_0}n)_{S\cap{}^xP_0,\ldots,S\cap{}^xP_{i-1},S})$$

Lemme 4.8. *Les définitions précédentes font de M_i un $r\mu_R(G)$ module.*

Le seul point non-trivial est la transitivité des restrictions. Soient donc $T\subseteq R\subseteq Q$ des p-sous-groupes de G, et $s=(P_0,\ldots,P_{i-1},Q)$ une suite croissante de sous-groupes de Q. Je dirai que s est une suite propre si elle est strictement croissante.

Si A est un sous-groupe de G, je noterai $A\cap s$ la suite $(A\cap P_0,\ldots,A\cap P_{i-1},A\cap Q)$.

Alors si $n \in M(P_0)$, j'ai

$$r_S^Q(\pi_Q(n_s)) = \sum_{\substack{x\in S\backslash Q/P_0\\ S\cap {}^x s\ propre}} \pi_S((x r^{P_0}_{S^x\cap P_0} n)_{S\cap {}^x s})$$

Donc

$$r_T^S r_S^Q(\pi_Q(n_s)) = \sum_{\substack{x\in S\backslash Q/P_0\\ S\cap {}^x s\ propre}} \sum_{\substack{y\in R\backslash S/S\cap {}^x P_0\\ R\cap {}^y(S\cap {}^x s)\ propre}} \pi_R((y r^{S\cap {}^x P_0}_{R^y\cap S\cap {}^x P_0} x r^{P_0}_{S^x\cap P_0} n)_{R\cap {}^y(S\cap {}^x s)})$$

ou encore

$$r_T^S r_S^Q(\pi_Q(n_s)) = \sum_{\substack{x\in S\backslash Q/P_0\\ S\cap {}^x s\ propre}} \sum_{\substack{y\in R\backslash S/S\cap {}^x P_0\\ R\cap {}^{yx} s\ propre}} \pi_R((yx r^{P_0}_{R^{yx}\cap P_0} n)_{R\cap {}^{yx} s})$$

Alors l'élément $z = yx$ décrit exactement l'ensemble des doubles classes $R\backslash Q/P_0$ telles que $R \cap {}^z s$ soit propre. Donc

$$r_T^S r_S^Q(\pi_Q(n_s)) = \sum_{\substack{z\in R\backslash Q/P_0\\ R\cap {}^z s\ propre}} \pi_R((z r^{P_0}_{R^z\cap P_0} n)_{R\cap {}^z s}) = r_T^Q(\pi_Q(n_s))$$

ce qui prouve le lemme.

La construction précédente associe à tout $r\mu_R(G)$-module M des $r\mu_R(G)$-modules M_i, et de plus $M_i = 0$ si i est supérieur ou égal à la p-valuation de l'ordre de G. Si M est un foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, et i un entier naturel, je noterai $\delta_i(M)$ le foncteur $\mathcal{I}(\mathcal{R}(M)_i)$: la résolution de M cherchée sera alors formée des foncteurs $\delta_i(M)$. Ces derniers s'expriment d'ailleurs assez simplement

Lemme 4.9. *Soit M dans $Mack_R(G,1)$, et H un sous-groupe de G. Alors*

$$\delta_i(M)(H) = (\oplus_{P_0\subset\cdots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)} M(P_0))_H$$

Si s est la suite $(P_0,\ldots,P_i)$ de p-sous-groupes de H, et si $n \in M(P_0)$, je note n_s l'élément correspondant de $(\oplus_{P_0\subset\cdots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)} M(P_0))$ si la suite s est strictement croissante, et je pose $n_s = 0$ sinon. Je note $\pi_H(n_s)$ l'image de n_s dans $(\oplus_{P_0\subset\cdots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)} M(P))_H$. Je peux alors définir une application f de $\delta_i(M)(H)$ dans $(\oplus_{P_0\subset\cdots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)} M(P))_H$ en posant

$$f(\pi_H\pi_Q(n_s)) = \pi_H(n_{s\cup Q})$$

ce qui a un sens puisque si $h \in H$ et $q \in Q$, alors

$$f(\pi_H(h\pi_Q(q.n_s))) = f(\pi_H\pi_{{}^hQ}((hqn)_{{}^{hq}s})) = \pi_H((hqn)_{{}^{hq}s\cup {}^hQ}))$$
$$= \pi_H(h.(qn)_{{}^q s\cup Q}) = \pi_H(q.n_{s\cup Q}) = \pi_H(n_{s\cup Q})$$

Inversement, je définis une application g

$$g : (\oplus_{P_0\subset\cdots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)} M(P))_H \rightarrow \delta_i(M)(H)$$

en posant

$$g(\pi_H(n_s)) = \pi_H\pi_{sups}(n_{s-sups})$$

ce qui a un sens car si $h \in H$, alors

$$g(\pi_H(h.n_s)) = g(\pi_H((hn)_{{}^h s})) = \pi_H\pi_{{}^h sups}((hn)_{{}^h s-{}^h sups}))$$
$$= \pi_H(h.\pi_{sups}(n_{s-sups})) = \pi_H\pi_{sups}(n_{s-sups})$$

Il est alors clair que f et g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, ce qui prouve le lemme.

Si K est un sous-groupe de H, si $s = (P_0, \ldots, P_i)$ est une suite de p-sous-groupes de K, et si $n \in M(P_0)$, il résulte des définitions que

$$t_K^H(\pi_K(n_s)) = \pi_H(n_s)$$

De même, si $s = (P_0, \ldots, P_i)$ est une suite de p-sous-groupes de H, et si $n \in M(P_0)$, alors

$$r_K^H(\pi_H(n_s)) = \sum_{\substack{x \in K\backslash H/P_0 \\ K\cap^x s\ propre}} \pi_K((x r_{K^x\cap P_0}^{P_0} n)_{K\cap^x s})$$

Et je peux donc identifier $\delta_0(M)$ avec $\mathcal{IR}(M)$. Je noterai d_0 le morphisme canonique de $\delta_0(M)$ dans M. Si $i > 0$, je définis une application d_i de $\delta_i(M)$ dans $\delta_{i-1}(M)$ en posant

$$d_{i,H}(\pi_H(n_s)) = \pi_H((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j})$$

où s_j désigne la suite $s - \{P_j\}$. Alors

Théorème 4.10. *Soit M dans $Mack_R(G,1)$. La suite*

$$0 \to \ldots \xrightarrow{d_{i+1}} \delta_i(M) \xrightarrow{d_i} \ldots \xrightarrow{d_1} \delta_0(M) \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

est un complexe exact de foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, et le complexe

$$0 \to \ldots \xrightarrow{\mathcal{R}(d_{i+1})} \mathcal{R}(\delta_i(M)) \xrightarrow{\mathcal{R}(d_i)} \ldots \xrightarrow{\mathcal{R}(d_1)} \mathcal{R}(\delta_0(M)) \xrightarrow{\mathcal{R}(d_0)} \mathcal{R}(M) \to 0$$

est exact et scindé.

Je dois d'abord vérifier que les applications d_i sont bien des morphismes de foncteurs de Mackey. C'est clair en ce qui concerne d_0. Si $i > 0$, si $H \subseteq K$ sont des sous-groupes de G, si $s = (P_0, \ldots, P_i)$ est une suite croissante de p-sous-groupes de H, et si $n \in M(P_0)$, alors

$$d_{i,K}(t_H^K \pi_H(n_s)) = d_{i,K}(\pi_K(n_s)) = \pi_K((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j})$$

alors que

$$t_H^K d_{i,H}(\pi_H(N_s)) = t_H^K(\pi_H((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j}) = \pi_K((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j})$$

et les applications d_i commutent aux traces.

De même, si $s = (P_0, \ldots, P_i)$ est une suite croissante de p-sous-groupes de K, et si $n \in M(P_0)$, alors

$$d_{i,H}(r_H^K \pi_K(n_s)) = d_{i,H}(\sum_{x \in H\backslash K/P_0} \pi_H((x r_{H^x\cap P_0}^{P_0} n)_{H\cap^x s}))$$

$$= \sum_{x \in H\backslash K/P_0} \pi_H((t_{H\cap^x P_0}^{H\cap^x P_1} x r_{H^x\cap P_0}^{P_0} n)_{(H\cap^x s)_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j (x r_{H^x\cap P_0}^{P_0})_{(H\cap^x s)_j}) \qquad (1)$$

D'autre part

$$r_H^K d_{i,K}(\pi_K(n_s)) = r_H^K \pi_K((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j})$$

Or si $j > 0$, alors le plus petit élément de s_j est P_0, et

$$r_H^K(\pi_K(n_{s_j})) = \sum_{x \in H\backslash K/P_0} \pi_H((x r_{H^x \cap P_0}^{P_0} n)_{H \cap {}^x s_j})$$

Et ces termes sont égaux aux termes correspondants de l'égalité (1), puisque pour tout m de $M(P_0)$, j'ai $m_{(H \cap {}^x s)_j} = m_{H \cap {}^x s_j}$. De même

$$r_H^K \pi_K((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0}) = \sum_{y \in H\backslash K/P_1} \pi_H(y r_{H^y \cap P_1}^{P_1} (t_{P_0}^{P_1} n)_{H \cap {}^y s_0})$$

$$= \pi_H \sum_{y \in H\backslash K/P_1} (y \sum_{z \in H^y \cap P_1 \backslash P_1/P_0} t_{H^y \cap {}^z P_0}^{H^y \cap P_1} r_{H^y \cap {}^z P_0}^{{}^z P_0} z n)_{H \cap {}^y s_0})$$

$$= \sum_{y \in H\backslash K/P_1} \sum_{z \in H^y \cap P_1 \backslash P_1/P_0} \pi_H(t_{H \cap {}^{yz} P_0}^{H \cap {}^y P_1} r_{H \cap {}^{yz} P_0}^{{}^{yz} P_0} yzn)_{H \cap {}^y s_0})$$

et comme $z \in P_1 = \inf s_0$, j'ai ${}^y P_1 = {}^{yz} P_1$ et $H \cap {}^y s_0 = H \cap {}^{yz} P_0$, et je peux sommer sur $x = yz$, qui décrit l'ensemble $H\backslash K/P_0$. Il vient

$$r_H^K \pi_K((t_{P_0}^{P_1} n)_{s_0}) = \sum_{x \in H\backslash K/P_0} \pi_H(t_{H \cap {}^x P_0}^{H \cap {}^x P_1} r_{H \cap {}^x P_0}^{{}^x P_0} xn)_{H \cap {}^x s_0})$$

$$= \sum_{x \in H\backslash K/P_0} \pi_H(t_{H \cap {}^x P_0}^{H \cap {}^x P_1} x r_{H^x \cap P_0}^{P_0} n)_{H \cap {}^x s_0})$$

qui est bien le terme correspondant de l'égalité (1), puisque $(H \cap {}^x s)_0 = H \cap {}^x s_0$, ce qui prouve que les applications d_i commutent aux restrictions.

Enfin il est clair que les d_i commutent aux conjugaisons par les éléments de G, donc ce sont bien des morphismes de foncteurs de Mackey.

Un calcul classique montre que $d_i d_{i+1} = 0$ pour tout i, et la suite de l'énoncé du théorème 4.10 est bien un complexe de foncteurs de Mackey (dans $Mack_R(G, 1)$ par définition des foncteurs $\delta_i(M)$).

Pour vérifier que ce complexe est exact, il suffit de démontrer que son image par $\mathcal{R}$ est acyclique, puisque le foncteur $\mathcal{R}$ est un foncteur d'oubli. Or je dois montrer que ce dernier est acyclique et scindé. Soit donc Q est un p-sous-groupe de G. Si $s = (P_0, \ldots, P_i)$ est une suite de sous-groupes de Q, et si $n \in M(P_0)$, je pose $\alpha_{i,Q}(\pi_Q(n_s)) = \pi_Q(n_{s \cup Q})$. De même, si $n \in M(Q)$, je pose $\alpha_{-1,Q}(n) = \pi_Q(n_{\{Q\}})$. J'ai ainsi défini pour tout i une application de $\delta_i(M)(Q)$ dans $\delta_{i+1}(M)(Q)$. Il s'agit en fait d'un morphisme de $\mathcal{R}(\delta_i(M))$ dans $\mathcal{R}(\delta_{i+1}(M))$: en effet, si S est un sous-groupe de Q, alors

$$\alpha_{i,S} r_S^Q \pi_Q(n_s) = \alpha_i \sum_{x \in S\backslash Q/P_0} \pi_S((x r_{S^x \cap P_0}^{P_0} n)_{S \cap {}^x s}) = \sum_{x \in S\backslash Q/P_0} \pi_S((x r_{S^x \cap P_0}^{P_0} n)_{(S \cap {}^x s) \cup S})$$

Or

$$r_S^Q \alpha_{i,Q} \pi_Q(n_s) = r_S^Q \pi_Q(n_{s \cup Q}) = \sum_{\substack{x \in S\backslash Q/P_0 \\ S \cap {}^x(s \cup Q)\ propre}} \pi_S((x r_{S^x \cap P_0}^{P_0} n)_{S \cap {}^x(s \cup Q)})$$

et comme pour tout m de $M(S)$, j'ai $m_{(S\cap {}^x s)\cup S} = m_{S\cap {}^x(s\cup Q)}$ si $S\cap {}^x(s\cup Q)$ est propre, et $m_{(S\cap {}^x s)\cup S} = 0$ sinon, je vois que les applications α_i commutent aux restrictions. Il est clair d'autre part qu'elles commutent aux conjugaisons, donc que ce sont des morphismes de $\mathcal{R}(\delta_i(M))$ dans $\mathcal{R}(\delta_{i+1}(M))$.

Enfin

$$d_{i+1,Q}\alpha_{i,Q}\pi_Q(n_s) = d_{i+1,Q}\pi_Q(n_{s\cup Q}) = \pi_Q((t_{P_0}^{P_1}n)_{(s\cup Q)_0} + \sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j n_{(s\cup Q)_j})$$

D'autre part

$$\alpha_{i-1,Q}d_{i,Q}\pi_Q(n_s) = \alpha_{i-1,Q}\pi_Q((t_{P_0}^{P_1}n)_{s_0} + \sum_{j=1}^{i}(-1)^j n_{s_j})$$

$$= \pi_Q((t_{P_0}^{P_1}n)_{s_0\cup Q} + \sum_{j=1}^{i}(-1)^j n_{s_j\cup Q})$$

Il vient donc par différence

$$d_{i+1,Q}\alpha_{i,Q}\pi_Q(n_s) - \alpha_{i-1,Q}d_{i,Q}\pi_Q(n_s) = (-1)^{i+1}\pi_Q(n_{(s\cup Q)_{i+1}}) = (-1)^{i+1}\pi_Q(n_s)$$

donc $d_{i+1}\alpha_i - \alpha_{i-1}d_i = (-1)^{i+1}Id$, et un changement de signe adéquat sur les α_i donne la dernière assertion du théorème.

4.3. Résultats duaux. J'ai indiqué plus haut comment l'algèbre $t\mu_R(G)$ s'identifie à l'algèbre opposée de $r\mu_R(G)$. Les résultats précédents ont une traduction en termes de cette algèbre, obtenue en remplaçant les restrictions par les traces, les traces par les restrictions, les éléments de G par leurs inverses, les points "cofixes" par les points fixes, et en inversant le sens des flèches.

Je noterai $\mathcal{T}$ le foncteur de restriction déduit de l'inclusion de $t\mu_R(G)$ dans $\mu_R(G)$. Le foncteur $\mathcal{T}$ admet un adjoint à droite, que je note $\mathcal{J}$, défini par

$$\mathcal{J}(N)(H) = (\oplus_{P\in \underline{s}_p(H)}N(P))^H$$

si N est un $t\mu_R(G)$-module et H un sous-groupe de G.

Si K est un sous-groupe de H, et si $\oplus_P n_P \in \mathcal{J}(N)(H)$, alors $r_K^H(\oplus_P n_P) = \oplus_Q m_Q$, avec $m_Q = n_Q$ si Q est un sous-groupe de K, et $m_Q = 0$ sinon.

De même, si $\oplus_Q m_Q \in \mathcal{J}(N)(K)$, alors $t_K^H(\oplus_Q m_Q) = \oplus_P n_P$, avec

$$n_P = \sum_{x\in P\backslash H/K} t_{P\cap {}^x K}^P x n_{P^x\cap K}$$

Si M est un foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, je peux définir de la même façon les foncteurs $\partial^i(M)$ par les formules

$$\partial^i(M)(H) = (\oplus_{P_0\subset\ldots\subset P_i\in \underline{s}_p(H)}M(P_0))^H$$

Avec ces notations $r_K^H(\oplus_s n_s) = \oplus_t m_t$, avec $m_t = n_t$ si $\sup t \subseteq K$, et $m_t = 0$ sinon. De même, $t_K^H(\oplus_t m_t) = \oplus_s n_s$, avec

$$n_s = \sum_{x\in P_0\backslash H/K} t_{P_0\cap {}^x K}^{P_0} x m_{s^x\cap K} \quad \text{avec} \quad P_0 = \inf s$$

La différentielle $\hat{d}^i$ de $\partial^i(M)$ dans $\partial^{i+1}(M)$ est donnée par $\hat{d}^i(\oplus_s n_s) = \oplus_t m_t$ avec

$$m_t = r_{P_0}^{P_1} n_{s_0} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j n_{s_j}$$

Le résultat dual du théorème 4.10 est alors le suivant:

THÉORÈME 4.11. *Soit M dans $Mack_R(G,1)$. La suite*

$$0 \to M \xrightarrow{\hat{d}^{-1}} \partial^0(M) \xrightarrow{\hat{d}^0} \ldots \xrightarrow{\hat{d}^{i-1}} \partial^i(M) \xrightarrow{\hat{d}^i} \ldots \to 0$$

est un complexe exact de foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, et le complexe

$$0 \to \mathcal{T}(M) \xrightarrow{\mathcal{T}(\hat{d}^{-1})} \mathcal{T}(\partial^0(M)) \xrightarrow{\mathcal{T}(\hat{d}^0)} \ldots \xrightarrow{\mathcal{T}(\hat{d}^{i-1})} \mathcal{T}(\partial^i(M)) \xrightarrow{\mathcal{T}(\hat{d}^i)} \ldots \to 0$$

est exact et scindé.

5. Applications

5.1. Modules de Steinberg. Le théorème 4.11 permet d'étendre à tout foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$ un résultat de P.Webb concernant l'expression de l'homologie en termes de modules de Steinberg (cf [**7**]):

PROPOSITION 5.1. *Soit M un foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, et H un sous-groupe de G. Alors*

$$M(H) = -\sum_{P \in \underline{s}_p(H)/N_G(H)} \mathrm{Ind}_{N_G(H,P)/N_H(P)}^{N_G(H)/H} \mathrm{Hom}_{RN_H(P)/P}(St_p(N_H(P)/P), M(P))$$

dans l'anneau de Green des $RN_G(H)/H$-modules.

REMARQUE 5.2. Le théorème de Webb concerne le cas où $H = G$ et $M(K) = \hat{H}^n(K,V)_p$, où V désigne un $\mathbf{Z}_pG$-module et $n \in \mathbf{Z}$: dans ce cas, le terme correspondant à $P = 1$ dans la somme ci-dessus est nul. D'autre part, le fait que $\hat{H}^n(-,V)_p$ soit dans $Mack_R(G,1)$ est démontré dans [**6**] (section [16]).

Je rappelle que le module de Steinberg d'un groupe G pour un nombre premier p est défini par

$$St_p(G) = -R - \sum_s (-1)^{|s|} \mathrm{Ind}_{N_G(s)}^G R$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison par G de suites strictement croissantes s de p-sous-groupes non-triviaux de G, et $|s|$ désigne le cardinal de la suite s. Cette somme a un sens dans l'anneau de Green des RG-modules de type fini. D'autre part, si A, B et C sont des RG-modules, alors $\mathrm{Hom}_{RG}(A-B,C)$ est égal par définition à $\mathrm{Hom}_{RG}(A,C) - \mathrm{Hom}_{RG}(B,C)$.

La proposition 5.1 découle de ce que, par le théorème 4.11, si H est un sous-groupe de G, la suite

$$0 \to M(H) \to \partial^0(M)(H) \to \ldots \to \partial^i(M)(H) \to \ldots \to 0$$

est une suite exacte et scindée de $RN_G(H)/H$-modules. En notant $\Delta_i(H)$ l'ensemble des suites $P_0 \subset \ldots \subset P_i$ de p-sous-groupes de H, j'ai donc

$$M(H) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \partial^i(M)(H) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\oplus_{s \in \Delta_i(H)} M(\inf s))^H$$

Or $\oplus_{s\in\Delta_i(H)}M(\inf s)$ est un $RN_G(H)$-module, isomorphe à

$$\oplus_{s\in\Delta_i(H)/N_G(H)}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)}^{N_G(H)}M(\inf s)$$

De plus, si H est un sous-groupe normal du groupe G, si K est un sous-groupe de G, et L un RK-module, le module $(\mathrm{Ind}_K^G L)^H$ s'identifie comme RG/H-module à $\mathrm{Ind}_{HK/H}^{G/H}L^{H\cap K}$. Cette remarque donne ici

$$\partial^i(M)(H)=\oplus_{s\in\Delta_i(H)/N_G(H)}\mathrm{Ind}_{HN_G(H,s)/H}^{N_G(H)/H}M(\inf s)^{N_H(s)}$$

D'autre part, le module $St_p(N_H(P)/P)$ est un $RN_G(H,P)$-module, isomorphe à

$$-\sum_i(-1)^i\sum_{\substack{s\in\Delta_i(H)/N_G(H,P)\\ \inf s=P}}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)}^{N_G(H,P)}R$$

donc le module $\mathrm{Hom}_R(St_p(N_H(P)/P),M(P))$ est isomorphe à

$$-\sum_i(-1)^i\sum_{\substack{s\in\Delta_i(H)/N_G(H,P)\\ \inf s=P}}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)}^{N_G(H,P)}\mathrm{Hom}_R(R,M(P))$$

Une nouvelle application de la remarque précédente, pour le groupe $N_G(H,P)$ et son sous-groupe normal $N_H(P)$, donne alors
$\mathrm{Hom}_{RN_H(P)}(St_p(N_H(P)/P),M(P))=$

$$-\sum_i(-1)^i\sum_{\substack{s\in\Delta_i(H)/N_G(H,P)\\ \inf s=P}}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)/N_H(s)}^{N_G(H,P)/N_H(P)}M(P)^{N_H(s)}$$

et le second membre de l'égalité de la proposition devient

$$\sum_{P\in\underline{s}_p(H)/N_G(H)}\sum_i(-1)^i\sum_{\substack{s\in\Delta_i(H)/N_G(H,P)\\ \inf s=P}}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)/N_H(s)}^{N_G(H)/H}M(P)^{N_H(s)}$$

c'est-à-dire

$$\sum_i(-1)^i\sum_{s\in\Delta_i(H)/N_G(H)}\mathrm{Ind}_{N_G(H,s)/N_H(s)}^{N_G(H)/H}M(\inf s)^{N_H(s)}$$

qui n'est autre que $\sum_i(-1)^i\partial^i(M)(H)$, ce qui prouve la proposition.

5.2. Foncteurs $\mathcal{T}$-injectifs, foncteurs $\mathcal{R}$-projectifs.

5.2.1. *Résidus.* Les définitions et résultats de la section 3 concernant la projectivité par rapport à $\mathcal{R}$ se dualisent en renversant le sens des flèches et en remplaçant partout "gauche" par "droite", et "projectif" par "injectif" (en d'autres termes, je dirai qu'un objet M est injectif relativement au foncteur $\mathcal{T}$ s'il est projectif par rapport au foncteur dual de $\mathcal{T}$ pour les catégories duales).
Pour énoncer le résultat suivant, j'aurai besoin de deux notations:
Soit M un foncteur de Mackey pour le groupe G, et K un sous-groupe de G.
Je noterai $\overline{M}(K)$ le quotient

$$\overline{M}(K)=M(K)/\sum_{L\subset K}t_L^KM(L)$$

et $\underline{M}(K)$ l'intersection

$$\underline{M}(K)=\bigcap_{L\subset K}Ker\,r_L^K$$

Ces définitions de "résidus" de M en K sont duales l'une de l'autre: si N est un foncteur de Mackey pour le groupe $N_G(K)/K$, je définis (avec Thévenaz et Webb cf.[**5**]) un foncteur de la catégorie des $R(N_G(K)/K)$-foncteurs de Mackey dans celle des $\mu_R(G)$-modules en associant à N le foncteur

$$F(N) = \mathrm{Ind}_{N_G(K)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(K)/K}^{N_G(K)} N$$

Alors le foncteur F a un adjoint à gauche, défini par

$$M^K(L/K) = M(L)/\sum_{K \not\subset H \subset L} t_H^L M(H)$$

et un adjoint à droite, défini par

$$M_K(L/K) = \bigcap_{K \not\subset H \subset L} \mathrm{Ker}\ r_H^L$$

Alors $\overline{M}(K)$ est la valeur en K/K de M^K, et $\underline{M}(K)$ la valeur en K/K de M_K.

Soit alors X un $r\mu_R(G)$-module, et P un p-sous-groupe de G. Il est facile de voir que $\overline{\mathcal{I}(X)}(P)$ s'identifie à $X(P)$. Si FP_V désigne le $N_G(P)/P$-foncteur de Mackey "points fixes sur V", défini par $FP_V(H) = V^H$, $r_K^H v = v$, et $t_K^H(w) = Tr_K^H(v)$, ceci entraîne que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}(X), \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_V) = \mathrm{Hom}(\mathcal{I}(X)^P, FP_V) =$$

$$\mathrm{Hom}_{RN_G(P)/P}(X(P), V)$$

la seconde égalité tenant au fait que le foncteur qui à V associe FP_V est adjoint à droite du foncteur d'évaluation en P/P (de la catégorie des $RN_G(P)/P$-foncteurs de Mackey dans celle des $RN_G(P)/P$-modules)(cf.[**5**] Proposition 6.1).

Comme de plus

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}(X), \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_V) = \mathrm{Hom}(X, \mathcal{R}(\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_V))$$

j'en déduis que le foncteur qui à V associe $\mathcal{R}(\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_V)$ est adjoint à droite du foncteur qui à X associe $X(P)$ (de la catégorie des $r\mu_R(RN_G(P)/P)$-modules dans celle des $RN_G(P)/P$-modules), donc qu'il s'identifie au foncteur qui à V associe $L_{P,V}^o$ (cf proposition 3.6).

La proposition suivante permet de calculer la valeur d'un foncteur de Mackey $\mathcal{R}$-projectif ou $\mathcal{T}$-injectif en fonction de ses résidus:

PROPOSITION 5.3. *Soit M est un foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$.*

1. *Si M est $\mathcal{R}$-projectif (par exemple si M est projectif), alors*

$$M(H) = (\oplus_{P \in \underline{s}_p(H)} \overline{M}(P))_H$$

comme $RN_G(H)/H$-module.

2. *Si M est $\mathcal{T}$-injectif (par exemple si M est injectif), alors*

$$M(H) = (\oplus_{P \in \underline{s}_p(H)} \underline{M}(P))^H$$

comme $RN_G(H)/H$-module.

Ces deux résultats étant duaux l'un de l'autre, il suffit par exemple de prouver le second, qui sera une conséquence du résultat suivant, plus fort mais moins parlant:

PROPOSITION 5.4. *Soit M est un foncteur de Mackey dans $Mack_R(G,1)$. Si M est $\mathcal{T}$-injectif, alors*

$$\mathcal{R}(M) = \bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} L^o_{P,\underline{M}(P)} = \mathcal{R}(\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_{\underline{M}(P)})$$

La proposition 5.3 en découle car

$$(\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_{\underline{M}(P)})(H) =$$

$$\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G}\ \bigoplus_{x\in N_G(P)\backslash G/H} (\mathrm{Inf}_{N_G(P)/P}^{N_G(P)} FP_{\underline{M}(P)})(N_G(P)\cap {}^xH)$$

$$= \bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G}\ \bigoplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,H)/H} FP_{\underline{M}(P)}(N_{^xH}(P)/P)$$

et en acceptant pour le calcul des coefficients rationnels, cette dernière somme vaut

$$\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)} \frac{|N_G(P)|}{|G|} \bigoplus_{x\in T_G(P,H)} \frac{|N_{^xH}(P)|}{|N_G(P)||H|} \underline{M}(P)^{N_{^xH}(P)/P} =$$

$$\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G), x\in G, P^x\subseteq H} \frac{|N_H(P^x)|}{|G||H|} \underline{M}(P^x)^{N_H(P^x)/P^x}$$

$$= \bigoplus_{P\in \underline{s}_p(H)} \frac{|N_H(P)|}{|H|} \underline{M}(P)^{N_H(P)} = (\oplus_{P\in \underline{s}_p(H)} \underline{M}(P))^H$$

La proposition 5.4 indique que l'identification de la partie 2 de la proposition 5.3 commute aux restrictions.

Pour prouver la proposition 5.4, je vais d'abord identifier les $r\mu_R(G)$-modules isomorphes à des sommes directes de modules du type L^o_{P,V_P}. Je note d'abord que je peux définir $\underline{M}(P)$ lorsque M un $r\mu_R(G)$-module et P un p-sous-groupe de G, puisque cette définition ne fait intervenir que des restrictions. Alors:

LEMME 5.5. *Soit M un $r\mu_R(G)$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Il existe des $N_G(P)/P$-modules V_P tels que M soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} L^o_{P,V_P}$$

2. *Le module M est isomorphe à*

$$\bigoplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} L^o_{P,\underline{M}(P)}$$

3. *Pour tout p-sous-groupe P de G, l'inclusion de $\underline{M}(P)$ dans $M(P)$ est une injection directe de $RN_G(P)/P$-modules, et le quotient $M(P)/\underline{M}(P)$ est isomorphe à $(\varprojlim_{Q\subset P} M(Q))^P$.*

Je rappelle que $L^o_{P,V}$ est défini par

$$L^o_{P,V}(Q) = (\oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)} x^{-1}\otimes V)^Q$$

et

$$r^R_Q(\oplus_x x^{-1}\otimes v_x) = \oplus_{P^x\subseteq Q} x^{-1}\otimes v_x$$

En particulier $L^o_{P,V}(R)$ est nul si P n'est pas contenu dans R à conjugaison près, donc $\underline{L}^o_{P,V}(R)=0$ dans ce cas.

Dans le cas contraire, si $v=\oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,R)} x^{-1}\otimes v \in \underline{L}_{P,V}(R)$, et si R n'est pas conjugué de P, soit $y\in T_G(P,R)$. Comme $r^R_{P^y}(v) = y^{-1}\otimes v_y = 0$, je vois que $v=0$. Ce qui prouve que $\underline{L}^o_{P,V}(R)$ est nul si R n'est pas conjugué de P, et égal à V sinon, donc que l'assertion 1) entraîne l'assertion 2).

Il est clair inversement que l'assertion 2) entraîne l'assertion 1). Le raisonnement précédent montre également que l'assertion 1) entraîne la première partie de l'assertion 3), car si $M=L^o_{P,V}$, alors l'injection de $\underline{M}(R)$ dans $M(R)$ est nulle si R n'est pas conjugué de P, et l'application identique sinon.

Pour prouver la seconde, je note que le morphisme naturel de $M(R)$ dans $(\lim\limits_{\longleftarrow Q\subset R} M(Q))^R$ a pour noyau $\underline{M}(R)$. Il suffit donc de montrer que ce morphisme est surjectif.

Soit donc $M=L^o_{P,V}$. Il n'y a rien à démontrer si P n'est pas contenu dans R à conjugaison près. De même, si $R=P$, alors $(\lim\limits_{\longleftarrow Q\subset R} M(Q))^R=0$, et $\underline{M}(R)=M(R)$ dans ce cas. Je peux donc supposer que R contient strictement P à conjugaison près. Alors si $v\in(\lim\limits_{\longleftarrow Q\subset R} M(Q))^R$, j'ai pour tout sous-groupe propre Q de R un élément v_Q de $M(Q)$, tel que si $S\subseteq Q$, alors $r^Q_S(v_Q)=v_S$. En particulier, si $x\in T_G(P,R)$, alors l'élément v_{P^x} s'écrit $x^{-1}\otimes v_x$. Comme v est fixe par R, l'élément $w=\oplus_{x\in N_G(P)\backslash T_G(P,R)} x^{-1}\otimes v_x$ est dans $M(R)$, et il est clair que $r^R_Q(w)=v_Q$ pour tout sous-groupe propre Q de R, ce qui prouve la seconde partie de l'assertion 3).

Il me reste donc à montrer que l'assertion 3) entraîne l'assertion 2). Soit X le module $\oplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} L^o_{P,\underline{M}(P)}$. Je note tout d'abord que

$$\mathrm{Hom}(M,X) = \oplus_P \mathrm{Hom}_{RN_G(P)/P}(M(P),\underline{M}(P))$$

par la propriété d'adjonction du foncteur $V\mapsto L^o_{P,V}$. Alors par la première partie de l'assertion 3), je peux choisir pour tout P modulo G une section de l'inclusion de $\underline{M}(P)$ dans $M(P)$, et ce choix détermine un morphisme ϕ de M dans X.

Ce morphisme est tel que $\underline{\phi}(P)$ est l'identité pour tout P. Soit alors K le noyau de ϕ, et Q un p-sous-groupe minimal de G tel que $K(Q)\neq 0$. Alors par définition de Q,

$$K(Q)=\underline{K}(Q)=\mathrm{Ker}\ \underline{\phi}(Q)=0$$

et cette contradiction prouve que ϕ est injectif. Soit donc Y le conoyau de ϕ. J'admettrai pour l'instant le lemme suivant:

Lemme 5.6. *Le foncteur qui à M associe $\underline{M}(P)$ est exact à gauche, et son premier foncteur dérivé droit D_P est défini par*

$$D_P(M) = (\lim_{\longleftarrow Q\subset P} M(Q))^P/(\text{Image de } M(P))$$

Alors la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{\phi} X \to Y \to 0$ donne pour tout P la suite exacte $0 \to \underline{M}(P) \xrightarrow{\underline{\phi}(P)} \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \to 0$, par la seconde partie de l'assertion 3). Comme $\underline{\phi}(P)$ est l'identité, j'en déduis que $\underline{Y}(P) = 0$ pour tout P.

Alors si Q est minimal tel que $Y(Q) \neq 0$, j'ai $\underline{Y}(Q) = Y(Q) = 0$, contradiction qui prouve que Y est nul, donc que ϕ est surjectif, d'où finalement l'assertion 2) du lemme 5.5.

Il reste donc à prouver le lemme 5.6. Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ est une suite exacte de $r\mu_R(G)$-modules, il est clair que $\underline{X}(P)$ est un sous-module de $\underline{Y}(P)$. Et si w est dans le noyau de l'application $\underline{Y}(P) \to \underline{Z}(P)$, alors w est un élément de $Y(P)$ qui s'envoie sur 0 dans $Z(P)$. Donc w est dans $X(P) \cap \underline{Y}(P) = \underline{X}(P)$, ce qui prouve que le foncteur $M \mapsto \underline{M}(P)$ est exact à gauche.

Pour prouver le lemme 5.6, il reste à voir que son premier foncteur dérivé D_P a la forme annoncée. Je noterai d_P le foncteur qui à M associe le quotient de $(\varprojlim_{Q \subset P} M(Q))^P$ par l'image de $M(P)$.

J'ai déjà noté (dans la démonstration de l'implication 1)$\Rightarrow$ 3) du lemme 5.5), que $d_P(M) = 0$ si M est de la forme $L^o_{P,V}$. La propriété d'adjonction du foncteur $V \mapsto L^o_{P,V}$ montre que $L^o_{P,V}$ est injectif si V l'est, et j'ai bien $D_P(L^o_{P,V}) = d_P(L^o_{P,V}) = 0$ dans ce cas.

Soit alors M un $r\mu_R(G)$-module quelconque. Je choisis pour tout P modulo G un $RN_G(P)/P$ module injectif I_P contenant $\underline{M}(P)$. L'inclusion de $\underline{M}(P)$ dans I_P se prolonge en un morphisme de $M(P)$ dans I_P, et j'obtiens ainsi un morphisme de M dans $X = \oplus_P L^o_{P,I_P}$, et X est un module injectif. Il est facile de voir que ce morphisme est de plus injectif.

Soit Y le conoyau de ce morphisme. Si je sais que toute suite exacte $0 \to M \to X \to Y \to 0$ fournit une suite exacte

$$0 \to \underline{M}(P) \to \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \to d_P(M) \to d_P(X)$$

j'obtiens alors une suite exacte

$$0 \to \underline{M}(P) \to \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \to d_P(M) \to 0$$

Comme de plus, par définition de D_P, j'ai la suite exacte

$$0 \to \underline{M}(P) \to \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \to D_P(M) \to 0$$

le lemme 5.6 sera démontré.

Soit donc $0 \to M \to X \xrightarrow{b} Y \to 0$ une suite exacte, dans laquelle je considère M comme sous-module de Y, et y un élément de $\underline{Y}(P)$. Alors il existe x dans $X(P)$ tel que $y = b(x)$. De plus, si Q est un sous-groupe propre de P, alors $r^P_Q x$ appartient à $M(Q)$.

La suite $(r^P_Q x)_{Q \subset P}$ définit un élément de $(\varprojlim_{Q \subset P} M(Q))^P$, unique modulo l'image de $M(P)$, i.e. un élément de $d_P(M)$. Cet élément est nul si et seulement si il existe un élément m de $M(P)$ tel que $r^P_Q x = r^P_Q m$ pour tout sous-groupe propre Q de P, i.e. si y est dans l'image de $\underline{X}(P)$ (car alors $y = b(x - m)$, et $x - m \in \underline{X}(P)$). J'ai ainsi construit une suite exacte

$$0 \to \underline{M}(P) \to \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \xrightarrow{c} d_P(M)$$

L'inclusion a de M dans X fournit un morphisme $d_P(a)$ de $d_P(M)$ dans $d_P(X)$. Soit m un élément de $d_P(M)$. Alors m est représenté par une suite $(m_Q)_{Q \subset P}$ d'éléments de $M(Q)$ telle que $r^Q_S(m_Q) = m_S$ si $S \subseteq Q \subset P$, et $pm_Q = m_{{}^pQ}$ si

$p \in P$. L'élément m est dans le noyau de $d_P(a)$ si et seulement si il existe un élément x de $X(P)$ tel que $m_Q = r_Q^P x$ pour tout $Q \subset P$, donc si et seulement si m est dans l'image de $\underline{Y}(P)$ (l'élément m est alors l'image par c de $b(x)$).

J'ai donc prouvé que la suite

$$0 \to \underline{M}(P) \to \underline{X}(P) \to \underline{Y}(P) \xrightarrow{c} d_P(M) \xrightarrow{d_P(a)} d_P(X)$$

est exacte, ce qui prouve le lemme 5.6, et achève la démonstration du lemme 5.5.

Il me reste à voir comment le lemme 5.5 entraîne la proposition 5.4. Soit donc M un foncteur de Mackey $\mathcal{T}$-injectif dans $Mack_R(G,1)$. Je vais montrer que $\mathcal{R}(M)$ vérifie la condition 3 du lemme 5.5.

Cette dernière étant invariante par passage à un facteur direct, je peux supposer que M est de la forme $\mathcal{J}(X)$. Soit alors P un p-sous-groupe de G. Par définition

$$\mathcal{J}(X)(P) = (\bigoplus_{Q \subseteq P} X(Q))^P$$

Si R est un sous-groupe de P, et si $v = (v_Q) \in \mathcal{J}(X)(P)$, alors la composante Q de $r_R^P(v)$ est égale à v_Q (pour $Q \subseteq R$). Si donc v est dans $\underline{\mathcal{J}(X)}(P)$, alors v_Q est nul pour tout sous-groupe d'un sous-groupe propre de P, donc pour tout sous-groupe propre de P. La seule composante non-nulle de v est donc sa composante P. Or il est clair que $\mathcal{J}(X)(P)$ se décompose en

$$\mathcal{J}(X)(P) = X(P) \bigoplus (\bigoplus_{Q \subset P} X(Q))^P$$

comme $N_G(P)/P$-module, ce qui prouve que l'injection de $\underline{\mathcal{J}(X)}(P)$ dans $\mathcal{J}(X)(P)$ est une injection directe.

De même, si $w \in (\varprojlim_{Q \subset P} \mathcal{J}(X)(Q))^P$, alors w est une suite d'éléments w_Q de $\mathcal{J}(X)(Q)$ telle que $r_R^Q(w_Q) = w_R$ si $Q \subset P$, et $x.w_Q = w_{{}^xQ}$ si $x \in P$. Chaque élément w_Q est lui-même défini par une suite $w_{R,Q}$ d'éléments de $X(R)$, pour $R \subseteq Q$. Alors si $R \subseteq S \subseteq Q \subset P$, je dois avoir $r_S^Q(w_Q) = w_S$, donc $w_{R,S} = w_{R,Q}$. En posant $u_R = w_{R,R}$ pour $R \subset P$, et $u_P = 0$, je définis bien un élément $u = (u_R)$ de $\mathcal{J}(X)(P)$ (car w est invariant par P) tel que $r_Q^P(u) = w_Q$ pour $Q \subset P$. Le morphisme naturel de $\mathcal{J}(X)(P)$ dans $(\varprojlim_{Q \subset P} \mathcal{J}(X)(Q))^P$ est donc bien surjectif, ce qui prouve la condition 3 du lemme 5.5, et la proposition 5.4.

5.2.2. *Homomorphismes.* Soit X un $r\mu_R(G)$-module, et Y un $t\mu_R(G)$-module. Je définis à partir de X et Y un $t\mu_R(G)$-module $h(X,Y)$, en posant

$$h(X,Y)(P) = \mathrm{Hom}_R(X(P), Y(P))$$

Si P est un sous-groupe de Q, et si $\phi \in h(X,Y)(P)$, je pose

$$t_P^Q(\phi) = t_P^Q.\phi.r_P^Q$$

Si x est un élément de G, je définis le transformé de ϕ par x en posant

$$x(\phi) = x.\phi.x^{-1}$$

Une construction analogue, quoique plus complexe, existe pour les foncteurs de Mackey: si X et Y sont des G-foncteurs de Mackey, je définis le foncteur de Mackey $H(X,Y)$ en posant

$$H(X,Y)(K) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_K^G X, \mathrm{Res}_K^G Y)$$

Un élément de $H(X,Y)(K)$ est donc une suite d'homomorphismes ϕ_L de $X(L)$ dans $Y(L)$,pour L sous-groupe de K telle que

$$\phi_L.t_M^L = t_M^L.\phi_M \qquad \phi_M.r_M^L = r_M^L.\phi_L \qquad \text{si } M \subseteq L \subseteq K$$

$$x.\phi_L = \phi_{{}^xL}.x \qquad \text{si } x \in K,\ L \subseteq K$$

La restriction d'un tel élément $\phi = (\phi_L)_{L\subseteq K}$ à un sous-groupe M de K est définie par $r_M^K(\phi)_L = \phi_L$ pour $L \subseteq M$. La trace de ϕ de K à un sous-groupe N de G contenant K est définie par

$$t_K^N(\phi)_L = \sum_{x\in K\backslash N/L} t^L_{K^x\cap L}.x^{-1}.\phi_{K\cap {}^xL}.x.r^L_{K^x\cap L}$$

Enfin, si $x \in G$, alors le transformé par x de ϕ est défini par

$$(x\phi)_L = x.\phi_{L^x}.x^{-1}$$

Un calcul un peu pénible permet de vérifier que $H(X,Y)$ est bien un foncteur de Mackey. Cette construction joue le rôle pour les foncteurs de Mackey du foncteur $\mathrm{Hom}(-,-)$ pour les G-modules: par exemple, un foncteur de Mackey X est projectif par rapport au sous-groupe K de G si et seulement si $H(X,X)(G) = t_K^G H(X,X)(K)$ (critère de Higman).

Il est facile de voir d'autre part que si X et Y sont dans $Mack_R(G,1)$, alors $H(X,Y)$ y est aussi (cela tient au fait que $\mathrm{Res}_K^G f_1^G = f_1^K$).

Ces deux constructions sont reliées par le lemme suivant:

Lemme 5.7. *Soit X un $r\mu_R(G)$-module, et Y un $t\mu_R(G)$-module. Alors*

$$H(\mathcal{I}(X),\mathcal{J}(Y)) \simeq \mathcal{J}(h(X,Y))$$

Corollaire 5.8. *Soient X et Y des foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G,1)$. Si X est $\mathcal{R}$-projectif et si Y est $\mathcal{T}$-injectif, alors $H(X,Y)$ est $\mathcal{T}$-injectif, et en particulier*

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \oplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G}\mathrm{Hom}_{RN_G(P)/P}(\overline{X}(P),\underline{Y}(P))$$

Soit K un sous-groupe de G. Il y a un foncteur évident de restriction de la catégorie des $r\mu_R(G)$-modules à celle des $r\mu_R(K)$-modules: si P est un p-sous-groupe de K, et X un $r\mu_R(G)$-module, alors $\mathrm{Res}_K^G(X)(P) = X(P)$. Il est clair d'autre part que ce foncteur commute aux foncteurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{R}$: plus précisément, si $\mathcal{I}_G$ (resp. $\mathcal{I}_K$) désigne le foncteur $\mathcal{I}$ pour le groupe G (resp. pour le groupe K), alors $\mathrm{Res}_K^G\mathcal{I}_G = \mathcal{I}_K\mathrm{Res}_K^G$ (ici le premier Res désigne celui des foncteurs de Mackey, le second celui des $r\mu_R(G)$-modules).

De même, il y a un foncteur de restriction, que je note encore Res_K^G, de la catégorie des $t\mu_R(G)$-modules à celle des $t\mu_R(K)$-modules, qui commute aux foncteurs $\mathcal{J}$ et $\mathcal{T}$.

Avec ces notations

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_K^G\mathcal{I}_G(X),\mathrm{Res}_K^G\mathcal{J}(Y)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_K(\mathrm{Res}_K^G X),\mathrm{Res}_K^G\mathcal{J}(Y)) =$$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_K^G X,\mathcal{R}_K\mathrm{Res}_K^G\mathcal{J}_G(Y)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_K^G X,\mathcal{R}_K\mathcal{J}_K(\mathrm{Res}_K^G Y))$$

Mais $\mathcal{J}_K(\mathrm{Res}_K^G Y)$ est $\mathcal{T}_K$-injectif, et $\underline{\mathcal{J}_K(\mathrm{Res}_K^G)(Y)}(P) = Y(P)$. La proposition 5.4 permet alors d'affirmer que

$$\mathcal{R}_K\mathcal{J}_K(\mathrm{Res}_K^G Y) = \bigoplus_{P\in\underline{s}_p(K)/K} L^o_{P,Y(P)}$$

et alors

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}^G_K \mathcal{I}_G(X), \mathrm{Res}^G_K \mathcal{J}(Y)) = \bigoplus_{P \in \underline{s}_p(K)/K} \mathrm{Hom}_{N_G(P)/P}(X(P), Y(P))$$

donc

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}^G_K \mathcal{I}_G(X), \mathrm{Res}^G_K \mathcal{J}(Y)) = (\bigoplus_{P \in \underline{s}_p(K)} h(X,Y)(P))^K$$

qui n'est autre que $\mathcal{J}(h(X,Y))(K)$.

Il est facile de préciser cet isomorphisme: si pour tout p-sous-groupe P de K, j'ai un morphisme ϕ_P de $X(P)$ dans $Y(P)$ tel que $x\phi_P x^{-1} = \phi_{^xP}$ si $x \in K$, et si L est un sous-groupe de K, je définis un morphisme ϕ_L de $(\oplus_{P \subseteq L} X(P))_L$ dans $(\oplus_{Q \subseteq L} Y(Q))^L$ en posant

$$\phi_L(\pi_L(u))_Q = \sum_{x \in P \backslash L/Q} t^Q_{Q \cap {}^xP} . x . r^P_{Q^x \cap P} . \phi_P(u)$$

Cette identification permet de vérifier que l'isomorphisme obtenu est bien un isomorphisme de foncteurs de Mackey, ce qui prouve le lemme 5.7.

Alors si X est $\mathcal{R}$-projectif et si Y est $\mathcal{T}$-injectif, le foncteur $H(X,Y)$ est facteur direct d'un foncteur de la forme $H(\mathcal{I}(A), \mathcal{J}(B))$, isomorphe à $\mathcal{J}(h(A,B))$, donc il est $\mathcal{T}$-injectif. Pour démontrer le corollaire, il reste alors à appliquer la proposition 5.4 et le lemme suivant:

Lemme 5.9. *Soient X et Y des G-foncteurs de Mackey, et K un sous-groupe de G. Alors $H(X,Y)_P$ s'identifie à $H(X^P, Y_P)$*

Ce lemme montre en effet que

$$\underline{H(X,Y)}(P) = H(X^P, Y_P)(P/P) = \mathrm{Hom}_R(\overline{X}(P), \underline{Y}(P))$$

donc que

$$(\oplus_{P \in \underline{s}_p(G)} \underline{H(X,Y)}(P))^G = \oplus_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Hom}_{N_G(P)/P}(\overline{X}(P), \underline{Y}(P))$$

Il reste donc à prouver le lemme 5.9. Soit K un sous-groupe de G. Alors par définition, $H(X,Y)(K)$ est le groupe d'homomorphismes (comme K-foncteurs de Mackey) de $\mathrm{Res}^G_K X$ dans $\mathrm{Res}^G_K Y$. Un élément de $H(X,Y)(K)$ est donc une suite (ϕ_L) d'homomorphimes de $X(L)$ dans $Y(L)$, pour $L \subseteq K$, commutant aux restrictions, aux traces, et aux éléments de K.

Si P est un sous-groupe normal de K, un tel élément est dans $H(X,Y)_P(K/P)$ si sa restriction à tout sous-groupe M de K ne contenant pas P est nulle, i.e. si $\phi_M = 0$ si $P \not\subseteq M$.

Si L/P est un sous-groupe de K/P, alors $r^L_M \phi_L = \phi_M r^L_M = 0$ si $P \not\subseteq M$, et l'image de ϕ_L est contenue dans $Y_P(L/P)$. De même, puisque $\phi_L t^L_M = t^M_L \phi_M = 0$, l'application ϕ_L factorise par $X^P(L/P)$. Je définis ainsi pour tout sous-groupe L/P de K/P un morphisme de $X^P(L/P)$ dans $Y_P(L/P)$.

Il est clair que ces morphismes commutent aux restrictions, aux traces et aux éléments de K, donc que j'ai défini un morphisme de K/P-foncteurs de Mackey de X^P dans Y_P. La construction ci-dessus s'inversant de manière évidente, le lemme 5.9 est démontré.

5.3. Foncteurs projectifs et matrice de Cartan.

5.3.1. *Notations et rappels.* Je supposerai dans cette section que R est un corps k, de caractéristique $p > 0$.

Dans ces conditions, les foncteurs de Mackey simples dans $Mack_k(G, 1)$ sont indexés par les classes de conjugaison par G de couples (Q, V), où Q est un p-sous-groupe de G et V un $kN_G(Q)/Q$-module simple (non-nul).(cf.[**5**] Theorem 8.3 et [**6**] Theorem 9.7).

Le foncteur simple $S_{Q,V}^G$ est défini pour $Q \neq 1$ par

$$S_{Q,V}^G = \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} S_{1,V}^{N_G(Q)/Q}$$

le foncteur $S_{1,V}^G$ étant quant à lui l'unique sous-foncteur minimal du foncteur de points fixes FP_V. Sa valeur en un sous-groupe H est donnée par $S_{1,V}^G(H) = Tr_1^H(V)$.

En notant FQ_V le foncteur de points "cofixes" de V, dont la valeur en H est $FQ_V(H) = V_H$, le foncteur $S_{1,V}^G$ est également le quotient de FQ_V par son unique sous-foncteur maximal.

Je noterai $P_{Q,V}^G$ l'enveloppe projective du foncteur $S_{Q,V}^G$. Alors $P_{Q,V}^G$ est dans $Mack_k(G, 1)$. En notant b_Q le foncteur de Burnside du groupe Q, le foncteur $P_{Q,V}^G$ est facteur direct du foncteur $\mathrm{Ind}_Q^G b_Q$. Le module $P_{Q,V}(1)$ est un kG-module de p-permutations indécomposable (cf.[**6**] Theorem 12.7). Inversement, étant donné un kG-module de p-permutations W, il existe un unique foncteur de Mackey projectif L dans $Mack_k(G, 1)$ tel que $L(1) = W$.

Les foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_k(G, 1)$ sont ainsi entièrement caractérisés par leur évaluation sur le sous-groupe trivial. Le résultat principal de cette section sera un moyen de calculer la matrice de Cartan de $Mack(G, 1)$ à partir des modules de p-permutations.

Si M est un foncteur de Mackey, je noterai M^* son dual, défini par $M^*(H) = M(H)^*$, par $t_H^K(\phi) = \phi \circ r_H^K$, par $r_H^K(\phi) = \phi \circ r_H^K$ et $x.\phi = \phi \circ x^{-1}$. Si M et N sont deux foncteurs de Mackey, alors $\mathrm{Hom}(M, N)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(N^*, M^*)$, donc le dual d'un foncteur projectif est un foncteur injectif, et le dual d'un foncteur injectif est un foncteur projectif.

Le dual du foncteur $S_{Q,V}^G$ étant le foncteur S_{Q,V^*}^G, le dual du foncteur $P_{Q,V}^G$ est l'enveloppe injective I_{Q,V^*}^G du foncteur S_{Q,V^*}^G.

Si L est un foncteur de Mackey projectif, alors les morphismes naturels de $FQ_{L(1)}$ dans L et de L dans $FP_{L(1)}$ sont respectivement injectif et surjectif.(cf.[**6**] Lemma 12.4). Il en est de même par dualité si L est un foncteur injectif, puisque le dual du foncteur FP_V est le foncteur FQ_{V^*}.

Enfin si K est un sous-groupe de G, le dual du foncteur M^K est le foncteur $(M^*)_K$.

5.3.2. *Résidus.* Les foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G, 1)$ qui sont de plus projectifs (resp. injectifs) sont $\mathcal{R}$-projectifs (resp. $\mathcal{T}$-injectifs). Je peux leur appliquer le corollaire du lemme 5.7 (d'ailleurs pour cela R n'a pas besoin d'être un corps). Lorsque R est un corps k, les résidus des foncteurs de Mackey projectifs ou injectifs sont facilement calculables:

LEMME 5.10. *Soit M un foncteur de Mackey projectif (resp. injectif) dans $Mack_k(G, 1)$, et P un p-sous-groupe de G. Alors $\overline{M}(P)$ (resp. $\underline{M}(P)$) est isomorphe à $M(1)[P]$.*

(pour la notation $V[P]$, voir la remarque 3.5)

Il suffit par dualité de prouver ce lemme lorsque M est projectif: en effet, si M est injectif, alors M^* est projectif et

$$\underline{M}(P) = M_P(P/P) = ((M^*)^*)_P(P/P) = ((M^*)^P)^*(P/P) = ((M^*)^P(P/P))^* =$$
$$(M^*(1)[P])^* = (M(1)[P]^*)^* = M(1)[P]$$

puisque si V est un module de p-permutations, alors $V^*[P] = (V[P])^*$.

Soit donc M un foncteur de Mackey projectif dans $Mack_k(G,1)$, et Q un p-sous-groupe de G. Le morphisme naturel α de $M(Q)$ dans $FP_{M(1)}(Q) = M(1)^Q$ est l'application qui à v associe $r_1^Q v$. Ce morphisme est surjectif. D'autre part, si v est une trace relative $t_S^Q w$ à partir d'un sous-groupe propre S de Q, alors

$$r_1^Q v = \sum_{x\in Q/S} t_1^1 x r_1^S w = Tr_S^Q(w)$$

et le morphisme α passe aux quotients, donnant un morphisme surjectif $\overline{\alpha}$ de $\overline{M}(Q)$ dans $M(1)[Q]$. Je dois donc établir que ce morphisme est injectif. Cette propriété étant stable par somme directe et passage à un facteur direct, je peux supposer que M est de la forme $\mathrm{Ind}_S^G b_S$, où S est un p-sous-groupe de G.

Dans ce cas, le module $M(1)$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_S^G k$, et en notant $\overline{T}_G(Q,S)$ le quotient $N_G(Q)\backslash G/S$, j'ai (cf.[**2**])

$$M(1)[Q] = (\mathrm{Ind}_S^G)[Q] = \sum_{x\in\overline{T}_G(Q,S)} \mathrm{Ind}_{N_{{}^xS}(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q} k$$

D'autre part, si L est un foncteur de Mackey pour le groupe $N_G(Q)/Q$, alors

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q, L) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_S^G b_S, \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G \mathrm{Inf}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} L)$$

ou

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q, L) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_{N_G(Q)}^G \mathrm{Ind}_S^G b_S, \mathrm{Inf}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} L)$$

De plus

$$\mathrm{Res}_{N_G(Q)}^G \mathrm{Ind}_S^G b_S = \sum_{x\in N_G(Q)\backslash G/S} \mathrm{Ind}_{N_G(Q)\cap {}^xS}^{N_G(Q)} b_{N_G(Q)\cap {}^xS}$$

donc

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q, L) = \sum_{x\in N_G(Q)\backslash G/S} \mathrm{Hom}(b_{N_G(Q)\cap {}^xS}, \mathrm{Res}_{N_G(Q)\cap {}^xS}^{N_G(Q)} \mathrm{Inf}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} L)$$

Comme pour tout groupe S et tout S-foncteur de Mackey X, le groupe $\mathrm{Hom}(b_S, X)$ est isomorphe à $X(S)$, et comme $(\mathrm{Inf}_{N_G(Q)/Q}^{N_G(Q)} L)(N_{{}^xS}(Q))$ est nul si Q n'est pas contenu dans ${}^xS$, i.e. si $x \notin \overline{T}_G(Q,S)$, et égal à $L(N_{{}^xS}(Q)/Q)$ sinon, j'ai

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q, L) = \sum_{x\in\overline{T}_G(Q,S)} L(N_{{}^xS}(Q)/Q)$$

Finalement, pour tout L, j'ai

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q, L) = \sum_{x\in\overline{T}_G(Q,S)} \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_{N_{{}^xS}(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q} b_{N_{{}^xS}(Q)/Q}, L)$$

Or le foncteur qui à M associe M^Q étant adjoint à gauche d'un foncteur exact, il en résulte que M^Q est projectif si M l'est. Alors les foncteurs $X = (\mathrm{Ind}_S^G b_S)^Q$

et $Y = \sum_{x\in\overline{T}_G(Q,S)} \mathrm{Ind}_{N_{^xS}(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q} b_{N_{^xS}(Q)/Q}$ sont tous deux projectifs, et tels que $\mathrm{Hom}(X, L) = \mathrm{Hom}(Y, L)$ pour tout L. Ils sont donc isomorphes.

Ils ont donc même valeur en Q/Q, ce qui donne

$$\overline{M}(Q) = \sum_{x\in\overline{T}_G(Q,S)} \mathrm{Ind}_{N_{^xS}(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q} k = M(1)[Q]$$

et termine la démonstration du lemme 5.10.

5.3.3. *Matrice de Cartan.* Je supposerai de plus ici que le corps k est assez gros (i.e. qu'il neutralise tous les groupes $N_G(Q)/Q$, pour $Q \in \underline{s}_p(G)$).

Soit Q (resp. L) un p-sous-groupe de G, et V (resp. W) un $kN_G(Q)/Q$-module simple (resp. un $kN_G(L)/L$-module simple). Le lemme 5.10 et le corollaire 5.8 permettent d'affirmer que

$$\mathrm{Hom}(P_{Q,V}^G, (P_{L,W}^G)^*) = \oplus_{S\in\underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}(P_{Q,V}^G(1)[S], (P_{L,W}^G)^*(1)[S])$$

D'autre part, dans le groupe de Grothendieck des foncteurs de Mackey

$$P_{L,W}^G = \sum_{H,M} C_{(L,W),(H,M)} S_{H,M}^G$$

où la somme porte sur les paires indexant les foncteurs de Mackey simples de $Mack_k(G, 1)$, en notant $C_{(L,W),(H,M)}$ le coefficient de la matrice de Cartan correspondant aux foncteurs simples $S_{L,W}^G$ et $S_{H,M}^G$. Le dual de $S_{H,M}^G$ étant S_{H,M^*}^G, il vient

$$(P_{L,W}^G)^* = \sum_{H,M} C_{(L,W),(H,M)} S_{H,M^*}^G$$

et comme $\mathrm{Hom}(P_{Q,V}^G, S_{H,M^*}^G)$ est nul si la paire (H, M^*) n'est pas conjuguée de la paire (Q, V), et de dimension 1 sur k sinon (d'où l'hypothèse supplémentaire sur k), il vient

$$C_{(L,W),(Q,V^*)} = \sum_{S\in\underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}(P_{Q,V}^G(1)[S], (P_{L,W}^G)^*(1)[S])$$

Or $(P_{L,W}^G)^*(1) = (P_{L,W}^G(1))^*$, et $(P_{L,W}^G(1))^* = P_{L,W^*}^G(1)$ (car $P_{L,W}^G(1)$ est le correspondant de Green de l'enveloppe projective de W par le théorème 12.7 de [**6**], et puisque la correspondance de Green commute à la dualité). Changeant alors V en V^* dans l'égalité ci-dessus, il vient

$$C_{(L,W),(Q,V)} = \sum_{S\in\underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}((P_{Q,V}^G(1))^*[S], (P_{L,W}^G(1))^*[S])$$

ou encore

$$C_{(L,W),(Q,V)} = \sum_{S\in\underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}(P_{L,W}^G(1)[S], P_{Q,V}^G(1)[S])$$

Finalement, par linéarité, il en résulte la

PROPOSITION 5.11. *Soit k un corps "assez gros". Si M et N sont des foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_k(G, 1)$, alors*

$$\dim_k \mathrm{Hom}(M, N) = \sum_{S\in\underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}(M(1)[S], N(1)[S])$$

Corollaire 5.12. *Soit $pg(G)$ l'anneau de Green des kG-modules de p-permutations. La forme bilinéaire sur $pg(G)$ définie par*

$$< X,Y >_G = \sum_{S\in \underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(S)/S}(X[S],Y[S])$$

est symétrique, définie et positive. De plus, si H est un sous-groupe de G, alors

$$< \mathrm{Ind}_H^G X, Y >_G = < X, \mathrm{Res}_H^G Y >_H$$

Le corollaire résulte du fait que la matrice de Cartan de $Mack_k(G,1)$ est symétrique, définie et positive, et que la forme bilinéaire correspondante vérifie la réciprocité de Fröbenius (de plus, si M est un kH-foncteur de Mackey, alors $(\mathrm{Ind}_H^G M)(1) = \mathrm{Ind}_H^G M(1)$).

5.3.4. *Une autre formule.* Je suppose ici qur R est un corps k de caractéristique p. Les notations concernant les modules de Steinberg généralisés sont celles de [**1**].

Proposition 5.13. *Soit L un foncteur de Mackey projectif dans $Mack_k(G,1)$, et X un foncteur de Mackey quelconque. Alors*

$$\dim_k \mathrm{Hom}(L,X) = \sum_{P\in \underline{s}_p(G)/G} \dim_k \mathrm{Hom}_{kN_G(P)/P}(St(N_G(P)/P, L(1)[P]), X(P))$$

Pour prouver cette proposition, j'utilise les ingrédients suivants:
1) Si N est un sous-groupe normal de G, il existe un morphisme d'algèbres naturel de $\mu_k(G/N)$ dans $\mu_k(G)$, qui envoie l'élément $t_{^{\bar{x}}L/N}^{K/N}\bar{x}r_{L/N}^{H/N}$ sur $t_{^xL}^K x r_L^H$. Si N est un p-sous-groupe normal de G, alors ce morphisme envoie l'algèbre $\mu_k^1(G/N)$ dans l'algèbre $\mu_k^1(G)$: en effet, si P/N est un p-sous-groupe de G/N, alors l'image de $t_{P/N}^{H/N}$ (resp. $r_{P/N}^{H/N}$) est t_P^H (resp. r_P^H), et P est un p-sous-groupe de G.
2) Ce morphisme induit un foncteur exact $\rho_{G/N}^G$ de la catégorie des G-foncteurs de Mackey dans celle des G/N-foncteurs de Mackey: si M est un G-foncteur de Mackey, alors le foncteur $\rho_{G/N}^G(M)$ est tel que

$$\rho_{G/N}^G(M)(H/N) = M(H)$$

Si N est un p-sous-groupe normal de G, le foncteur $\rho_{G/N}^G$ envoie $Mack_k(G,1)$ dans $Mack_k(G/N,1)$.
Le foncteur $\rho_{G/N}^G$ admet un adjoint à gauche, noté $\iota_{G/N}^G$. Comme le foncteur $\rho_{G/N}^G$ est exact, le foncteur $\iota_{G/N}^G(M)$ est projectif si M l'est. Si N est un p-sous-groupe normal de G, et si M est dans $Mack_k(G/N,1)$, alors $\iota_{G/N}^G(M)$ est dans $Mack_k(G,1)$.
3) Si M est un G/N-foncteur de Mackey, alors pour tout kG-module V

$$\mathrm{Hom}(\iota_{G/N}^G(M), FP_V) = \mathrm{Hom}(M, \rho_{G/N}^G(FP_V))$$

et il est facile de voir que $\rho_{G/N}^G(FP_V)$ s'identifie à FP_{V^N}. Alors

$$\mathrm{Hom}(\iota_{G/N}^G(M), FP_V) = \mathrm{Hom}_{kG/N}(M(N/N), V^N) = \mathrm{Hom}_{kG}(M(N/N), V)$$

Comme d'autre part

$$\mathrm{Hom}(\iota_{G/N}^G(M), FP_V) = \mathrm{Hom}_G(\iota_{G/N}^G(M)(1), V)$$

il en résulte que $\iota_{G/N}^G(M)(1)$ est isomorphe comme kG-module au module $M(N/N)$.
4) Si $M = A - B$ est un kG-module projectif virtuel, je note FQ_M le foncteur de

Mackey projectif virtuel $FQ_A - FQ_B$, dans l'anneau de Green des foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_k(G,1)$. Si X et Y sont deux kG-foncteurs de Mackey projectifs virtuels dans $Mack_k(G,1)$ tels que $X(1) = Y(1)$ dans l'anneau de Green des kG-modules, alors $X = Y$.
Les considérations précédentes prouvent le lemme suivant:

LEMME 5.14. *Soit L un foncteur de Mackey projectif dans $Mack_k(G,1)$. Alors*

$$L = \sum_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G \iota_{N_G(P)/P}^{N_G(P)}(FQ_{St(N_G(P)/P, L(1)[P])})$$

dans l'anneau de Green des foncteurs projectifs dans $Mack_k(G,1)$.

En effet, le module $L(1)$ s'écrit (cf.[**1**])

$$L(1) = \sum_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G St(N_G(P)/P, L(1)[P])$$

Alors les deux membres de l'égalité du lemme sont des foncteurs de Mackey projectifs virtuels dans $Mack_k(G,1)$, qui ont même valeur en (1). Ils sont donc égaux.

La proposition s'en déduit en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(-,X)$ aux deux membres.

REMARQUE 5.15. Il est possible de calculer effectivement le foncteur $\iota_{G/N}^G$: soit M un kG/N-foncteur de Mackey, et K un sous-groupe de G. Soit $\omega_N(K)$ l'ensemble des sous-groupes de K ordonné par la relation

$$L \preceq L' \Leftrightarrow \begin{cases} L \subseteq L' \\ L \cap N = L' \cap N \end{cases}$$

Je note

$$\varinjlim_{L \in \omega_N(K)} M(LN/N)$$

le quotient de $\oplus_{L \subseteq K} M(LN/N)$ par le sous-module engendré par les éléments de la forme $t_{LN/N}^{L'N/N} m - m$, pour $L \preceq L'$ et $m \in M(LN/N)$.

Le groupe K opère sur $\varinjlim_{L \in \omega_N(K)} M(LN/N)$, et alors

$$\iota_H^G(M)(K) = \Big(\varinjlim_{L \in \omega_N(K)} M(LN/N) \Big)_K$$

est le plus grand quotient sur lequel K agit trivialement. Si L est un sous-groupe de K, et m un élément de $M(LN/N)$, je note m_L^K l'image de m dans $\iota_H^G(M)(K)$.

Si $K \subseteq K'$, alors $t_K^{K'}$ (resp. $r_K^{K'}$) est l'application de $\iota_H^G(M)(K)$ dans $\iota_H^G(M)(K')$ (resp. de $\iota_H^G(M)(K')$ dans $\iota_H^G(M)(K)$) définie par

$$t_K^{K'}(m_L^K) = m_L^{K'} \qquad r_K^{K'}({m'}_{L'}^{K'}) = \sum_{x \in K \backslash K'/L'} \left({}^x r_{(K^x \cap L')N/N}^{L'N/N} m' \right)_{K \cap {}^x L'}^K$$

Enfin si $x \in G$, alors ${}^x(m_L^K) = ({}^x m)_{{}^x L}^{{}^x K}$.

6. Foncteurs projectifs et image de $\mathcal{I}$

J'essaierai de voir dans cette section dans quelles conditions un foncteur de Mackey projectif dans $Mack(G,1)$ est dans l'image de $\mathcal{I}$. Je supposerai que R est un anneau local complet, dont le corps résiduel est de caractéristique p.

6.1. Résolutions projectives finies. Je vais établir l'équivalence suivante:

THÉORÈME 6.1. *Soit X un $r\mu_R(G)$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le foncteur $\mathcal{I}(X)$ est projectif.*
2. *Le module X a une résolution projective finie.*

La démonstration de ce théorème nécessite une série de résultats préliminaires.

LEMME 6.2. *Soient X et Y des foncteurs projectifs dans $Mack_R(G,1)$. Le morphisme $\phi \mapsto \phi(1)$ d'évaluation en 1 de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans $\mathrm{Hom}_{RG}(X(1),Y(1))$ est surjectif. De plus ϕ est une injection directe (resp. une surjection directe) si et seulement si $\phi(1)$ est une injection directe (resp. une surjection directe).*

J'ai déjà rappelé que le morphisme naturel de Y dans $FP_{Y(1)}$ est surjectif si Y est projectif. Soit alors f dans $\mathrm{Hom}_{RG}(X(1),Y(1))$. Il lui correspond par adjonction un morphisme F de X dans $FP_{Y(1)}$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & FP_{Y(1)} \end{array}$$

se complète en un morphisme ϕ de X dans Y, car la flèche de droite est surjective, et le foncteur X est projectif. Il est clair que $\phi(1)$ est égal à f, ce qui prouve la première assertion.

Il est clair de plus que si ϕ est une injection directe, alors $\phi(1)$ en est une. Inversement,si $\phi(1)$ est une injection directe, alors il existe un morphisme f de $Y(1)$ dans $X(1)$ tel que $f\phi(1) = Id_{X(1)}$. Le morphisme f se relève en un morphisme F, et alors le morphisme $\psi = F\phi$ est un endomorphisme de X tel que $\psi(1) = Id$. Une certaine puissance de ψ est un élément de Fitting. Son image I est alors un facteur direct de X, donc I est un foncteur de Mackey projectif dans $Mack(G,1)$ tel que $I(1) = X(1)$, ce qui prouve que I est isomorphe à X, donc que $\psi = F\phi$ est inversible, et ϕ est une injection directe. Le cas d'une surjection directe est analogue.

LEMME 6.3. *Soient X et Y sont des foncteurs projectifs dans $Mack_R(G,1)$, et ϕ un morphisme de X dans Y. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le morphisme ϕ est une injection directe (resp. une surjection directe).*
2. *Pour tout p sous-groupe P de G, le morphisme $\overline{\phi}(P)$ de $\overline{X}(P)$ dans $\overline{Y}(P)$ est injectif (resp. surjectif).*

Comme le relèvement des morphismes entre objets projectifs de la caractéristique p à la caractéristique 0 ne pose pas de problèmes, je peux supposer que R est un corps k de caractéristique p. Dans ce cas, le module $\overline{X}(P)$ s'identifie à $X(1)[P]$, et le morphisme $\overline{\phi}(P)$ à $\phi(1)[P]$. Je démontrerai simultanément le lemme 6.3 et la proposition suivante:

PROPOSITION 6.4. *Soient M et N des kG-modules de p-permutations, et f un morphisme de M dans N. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le morphisme f est une injection directe (resp. une surjection directe).*
2. *Pour tout p sous-groupe P de G, le morphisme $f[P]$ de $M[P]$ dans $N[P]$ est injectif (resp. surjectif).*

En effet soient X, Y et ϕ comme dans le lemme 6.3. Il est clair que si ϕ est une surjection directe, alors pour tout P, le morphisme $\overline{\phi}(P)$ est une surjection (directe). Inversement, si $\overline{\phi}(P)$ est surjectif pour tout P, alors $\phi(1) = \overline{\phi}(1)$ est surjectif. Soit Q un p-sous-groupe tel que $\phi(R)$ soit surjectif pour tout sous-groupe propre R de Q. Soit de plus $v \in Y(P)$.

Comme $\overline{\phi}(P)$ est surjectif, il existe des éléments $v_R \in Y(R)$, pour $R \subset Q$, et un élément $w \in X(Q)$ tels que

$$v = \phi(Q)(w) + \sum_{R \subset Q} t_R^Q v_R$$

Alors chaque v_R s'écrit $v_R = \phi(R)(w_R)$ puisque $\phi(R)$ est surjective, et alors

$$v = \phi(Q)(W) + \sum_{R \subset Q} t_R^Q \phi(R)(w_R) = \phi(Q)(w) + \sum_{R \subset Q} \phi(Q)(t_R^Q w_R)$$

ce qui prouve que $\phi(Q)$ est surjectif pour tout Q. Alors ϕ est surjectif, donc ϕ est une surjection directe puisque Y est projectif. Ceci montre l'équivalence des conditions du lemme 6.3 dans le cas surjectif.

Alors soient M, N et f comme dans la proposition 6.4. Si f est une surjection directe, il est clair que $f[P]$ est une surjection (directe) pour tout P. Inversement, si $f[P]$ est surjectif pour tout P, soit L_M (resp. L_N) le foncteur de Mackey projectif dans $Mack_k(G, 1)$ tel que $L_M(1) = M$ (resp. $L_N(1) = N$). Le morphisme f se prolonge en un morphisme ϕ de L_M dans L_N, tel que $\phi(1) = f$. L'hypothèse entraîne que $\overline{\phi}(P)$, qui s'identifie à $f[P]$, est surjectif pour tout P. Alors ϕ est une surjection directe, et $f = \phi(1)$ également. Ce qui prouve l'équivalence des conditions de la proposition 6.4 dans le cas surjectif.

Mais par dualité, cela prouve l'équivalence des conditions de la proposition 6.4 dans le cas injectif.

Soient alors de nouveau X, Y, et ϕ comme dans le lemme 6.3. Il est clair que si ϕ est une injection directe, alors $\overline{\phi}(P)$ est injectif pour tout P (c'est une injection directe). Inversement, si $\overline{\phi}(P)$ est injectif pour tout P, soit $f = \phi(1)$. Alors f est un morphisme de $X(1)$ dans $Y(1)$ tel que $f[P]$ soit injectif pour tout P, donc f est une injection directe, et le lemme 22 entraîne que ϕ est une injection directe, ce qui termine la démonstration du lemme 6.3 et de la proposition 6.4.

Comme les modules projectifs et les morphismes entre eux se relèvent de la caractéristique p à la caractéristique 0, il suffit de prouver le théorème 6.1 dans le cas où R est un corps k de caractéristique p.

Si M est un kG-module, et P un p-sous-groupe de G, je noterai Br_P le morphisme de projection de M^P sur $M[P]$. Si X est un $r\mu_R(G)$-module, comme l'image de r_1^P est contenue dans $X(1)^P$, je peux par abus de langage noter $Br_P r_1^P$ l'application composée de $X(P)$ dans $X(1)[P]$. Avec ces notations:

Proposition 6.5. *Soit X un $r\mu_k(G)$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le module X a une résolution projective finie.*
2. *Le module $X(1)$ est un kG-module de permutations, et pour tout p-sous-groupe P de G, l'application $Br_P r_1^P$ est un isomorphisme de $X(P)$ sur $X(1)[P]$.*

Je vais démontrer que l'assertion 1 de la proposition entraîne l'assertion 2 par récurrence sur la longueur d'une résolution projective finie de X.

J'ai déjà observé (section 2) que l'assertion 2 est vraie si X est projectif: en effet, si P est un p-sous-groupe de G, si E est un $kN_G(P)/P$-module projectif, et si $X = L_{P,E}$, alors

$$X(Q) = \oplus_{x \in T_G(Q,P)/N_G(P)} x \otimes E$$

D'autre part, le module $X(1)$ s'identifie à $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$. Un élément v de $X(1)^Q$ s'écrit donc $\sum_{x \in G/P} x \otimes v_x$, la suite v_x étant telle que $v_{\sigma_q(x)} = h_{q,x} v_x$, en notant $x \mapsto \sigma_q(x)$ la permutation de G/P induite par q, et $h_{q,x}$ l'élément de $N_G(P)$ défini par $qx = \sigma_q(x) h_{q,x}$. En particulier, l'élément v_x est invariant par $Q \cap {}^xP$, et v s'écrit aussi

$$v = \sum_{x \in Q \backslash G/N_G(P)} Tr_{Q \cap {}^xP}^Q (x \otimes v_x)$$

Il est alors clair que $r_1^Q X(Q)$ est un supplémentaire dans $X(1)^Q$ du noyau de Br_Q.

Soit donc X un $r\mu_k(G)$-module ayant une résolution projective finie. Il existe un $r\mu_k(G)$-module projectif L et un $r\mu_k(G)$-module Y ayant une résolution projective strictement plus courte que celle de X, et une suite exacte

$$0 \to Y \xrightarrow{i} L \to X \to 0$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que $Y(1)$ est un module de p-permutations, et que $Br_P r_1^P$ est un isomorphisme de $Y(P)$ sur $Y(1)[P]$. Alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Y(P) & \xrightarrow{i(P)} & L(P) \\ & & \downarrow Br_P r_1^P & & \downarrow Br_P r_1^P \\ & & Y(1)[P] & \xrightarrow{i(1)[P]} & L(1)[P] \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes, montre que l'application $i(1)$ est une injection de $Y(1)$ dans $L(1)$ telle que $i(1)[P]$ soit injective pour tout P. Donc $i(1)$ est une injection directe par le proposition 6.4, et la suite

$$0 \to Y(1) \xrightarrow{i(1)} L(1) \to X(1) \to 0$$

est exacte et scindée. En particulier, le module $X(1)$ est facteur direct de $L(1)$. C'est donc un module de p-permutations. Alors le diagramme complété

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y(P) & \xrightarrow{i(P)} & L(P) & \to & X(P) & \to & 0 \\ & & \downarrow Br_P r_1^P & & \downarrow Br_P r_1^P & & \downarrow Br_P r_1^P & & \\ 0 & \to & Y(1)[P] & \xrightarrow{i(1)[P]} & L(1)[P] & \to & X(1)[P] & \to & 0 \end{array}$$

montre que la flèche verticale de droite est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion 2 de la proposition.

Je vais à présent démontrer que l'assertion 2 de la proposition entraîne l'assertion 1. Tout d'abord une notation: si X est un $r\mu_k(G)$-module, je note $Supp(X)$ l'ensemble des sous-groupes P tels que $X(P) \neq 0$, et $\overline{Supp}(X)$ sa clôture "vers le bas" pour l'inclusion, i.e. l'ensemble des sous-groupes qui sont contenus dans un élément de $Supp(X)$.

Soit X un $r\mu_k(G)$-module ayant les propriétés de l'assertion 2 de la proposition. Je vais procéder par récurrence sur le cardinal de $\overline{Supp}(X)$.

Il n'y a rien à démontrer si ce cardinal est nul, puisqu'alors X est nul, donc projectif. J'utiliserai alors le lemme suivant, que j'admets pour l'instant:

Lemme 6.6. *Soit X un $r\mu_k(G)$-module, et pour tout p-sous-groupe P de G, soit E_P l'enveloppe projective du $kN_G(P)/P$-module*

$$X(P)/(\sum_{Q\supset P} r_P^Q X(Q))$$

Alors l'enveloppe projective de X est isomorphe à $\oplus_{P\in \underline{s}_p(G)/G} L_{P,E_P}$.

Les propriétés de l'assertion 2 montrent en effet que si P est un élément maximal de $Supp(X)$ (ou de $\overline{Supp}(X)$, ce qui revient au même), alors le module $X(P)$ est un $kN_G(P)/P$-module de p-permutations. De plus, si $P \subset Q \subseteq N_G(P)$, alors $X(P)[Q/P]$, isomorphe à $X(1)[P][Q/P]$, donc à $X(1)[Q]$, donc à $X(Q)$, est nul. Alors $X(P)$ est un $kN_G(P)/P$-module projectif. Comme de plus, $r_P^Q X(Q)$ est nul si Q contient strictement P, je vois que $X(P)$ est égal à E_P pour tout P maximal dans $Supp(X)$.

Soit alors $L = \oplus_P L_{P,E_P}$ l'enveloppe projective de X, et Y le noyau d'une surjection s de L sur X. Comme $L_{P,E_P}(P) = E_P = X(P)$, je vois que $Y(P)$ est nul si P est maximal dans $Supp(X)$. De plus $L(Q)$ est nul si Q n'est pas dans $\overline{Supp(X)}$: en effet, le support de L_{P,E_P} est l'ensemble des sous-groupes de G contenus dans P à conjugaison près, si E_P, donc $X(P)$ sont non-nuls.

Le cardinal de $\overline{Supp(Y)}$ est donc strictement plus petit que le cardinal de $\overline{Supp(X)}$. D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L(P) & \stackrel{s(P)}{\to} & X(P) & \to & 0 \\ Br_P r_1^P \downarrow & & \downarrow Br_P r_1^P & & \\ L(1)[P] & \stackrel{s(1)[P]}{\to} & X(1)[P] & & \end{array}$$

montre comme précédemment que s est une surjection scindée. De la même manière, le diagramme complété

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y(P) & \to & L(P) & \stackrel{s(P)}{\to} & X(P) & \to & 0 \\ & & \downarrow Br_P r_1^P & & \downarrow Br_P r_1^P & & \downarrow Br_P r_1^P & & \\ 0 & \to & Y(1)[P] & \to & L(1)[P] & \stackrel{s(1)[P]}{\to} & X(1)[P] & \to & 0 \end{array}$$

montre alors que Y a les propriétés de l'assertion 2. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que Y a une résolution projective finie. Donc il en est de même de X, et la proposition 6.5 est démontrée.

Remarque 6.7. Le raisonnement précédent montre aussi que si p^n est la p-partie de l'ordre de G, alors tout $r\mu_k(G)$-module ayant une résolution projective finie a une résolution de longueur inférieure ou égale à n. La longueur des résolutions projectives finies minimales est donc bornée.

Je dois à présent démontrer le lemme 24. Je rappelle que les $r\mu_k(G)$-modules simples, que j'ai notés $N_{P,V}$, sont indexés par les paires $\{P, V\}$, où P est un p-sous-groupe de G et V un $kN_G(P)/P$-module simple. Ils sont définis par $N_{P,V}(Q) = 0$ si Q n'est pas conjugué de P, et $N_{P,V}(P) = V$. Il est alors facile de voir que pour tout $r\mu_k(G)$-module X

$$\mathrm{Hom}(X, N_{P,V}) = \mathrm{Hom}_{kN_G(P)/P}(X(P)/\sum_{Q\supset P} r_P^Q X(Q), V)$$

ce qui montre, en notant $J(X)$ le radical de X, que

$$J(X)(P) = J(X(P)) + \sum_{Q \supset P} r_P^Q X(Q)$$

Le lemme 24 en découle facilement.

Je peux alors démontrer le théorème 6.1: soit X un $r\mu_k(G)$-module tel que $\mathcal{I}(X)$ soit projectif. Alors, comme $X(1) = \mathcal{I}(X)(1)$, le module $X(1)$ est un module de p-permutations. D'autre part, le module $\overline{\mathcal{I}(X)}(P)$ s'identifie à $X(1)[P]$ si $\mathcal{I}(X)$ est projectif, par le lemme 5.10. Mais pour tout X, il s'identifie aussi à $X(P)$. De plus le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(P) & \rightarrow & \mathcal{I}(X)(P) \\ \downarrow r_1^P & & \downarrow r_1^P \\ X(1) & \rightarrow & \mathcal{I}(X)(1) \end{array}$$

est commutatif, donc X vérifie les conditions de l'assertion 2 de la proposition 6.5. Donc X a une résolution projective finie, ce qui prouve l'assertion 2 du théorème.

Pour montrer que l'assertion 2 du théorème entraîne l'assertion 1, je procède par récurrence sur la longueur d'une résolution projective finie de X. Si X est projectif, alors $\mathcal{I}(X)$ est projectif, car le foncteur $\mathcal{I}$ est adjoint à gauche d'un foncteur exact.

Si X a une résolution projective finie, alors il existe un $r\mu_k(G)$-module projectif L, un $r\mu_k(G)$-module Y ayant une résolution projective strictement plus courte que X, et une suite exacte

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} L \rightarrow X \rightarrow 0$$

Alors $\mathcal{I}(Y)$ et $\mathcal{I}(L)$ sont des foncteurs de Mackey projectifs. De plus, puisque $\overline{\mathcal{I}(i)}(P) = i(P)$ est injectif pour tout P, le morphisme $\mathcal{I}(i)$ est une injection directe par le lemme 6.3. Comme le foncteur $\mathcal{I}$ est exact à droite, il en résulte que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(Y) \xrightarrow{\mathcal{I}(i)} \mathcal{I}(L) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée, et le foncteur $\mathcal{I}(X)$ est donc projectif, ce qui prouve le théorème 6.1.

6.2. Exemples. Soit M un module de p-permutations. Il existe un unique foncteur de Mackey projectif L_M dans $Mack_k(G,1)$, tel que $L_M(1) = M$. La proposition 6.5 et le lemme 5.10 donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un $r\mu_k(G)$-module X tel que L_M soit isomorphe à $\mathcal{I}(X)$: en effet dans ce cas, le module $X(P)$ doit être isomorphe à $\overline{L_M}(P)$, donc à $M[P]$. Il doit donc exister des applications r_Q^P, définies pour $Q \subseteq P$, de $M[P]$ dans $M[Q]$, telles que

- $r_S^Q r_Q^P = r_S^P$ si $S \subseteq Q \subseteq P$.
- $r_P^P = Id$ pour tout $P \in \underline{s}_p(G)$.
- $x r_Q^P x^{-1} = r_{{}^xQ}^{{}^xP}$ pour tout $x \in G$ et tout $Q \subseteq P$.
- r_1^P est injective et son image est un supplémentaire de $KerBr_P$ dans $M^P = M[1]^P$

Inversement, si de telles applications existent, alors elles définissent un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X)$ soit projectif, et de plus $\mathcal{I}(X)(1) = X(1) = M$, donc $\mathcal{I}(X)$ est isomorphe à L_M.

6.2.1. *Modules de permutations.* Un exemple simple de cette situation est le cas où M est un module de *permutations*: en effet, si B est une base de M stable par G, alors l'inclusion de B^P dans B^Q fournit l'application r_Q^P cherchée. Par exemple, si $M = k$, le foncteur L_M est le foncteur $b_p(G)$ de $Mack_k(G, 1)$ associé au foncteur de Burnside (i.e. le sous-foncteur du foncteur de Burnside tel que $b_p(H)$ soit engendré par les H/P, le groupe P étant un p-sous-groupe de H). Le $r\mu_k(G)$-module X associé est tel que $X(P) = k$ pour tout P, les applications r_Q^P étant l'identité, de même que les conjugaisons par les éléments de G. En d'autres termes, le module X est isomorphe à $\mathcal{R}(FP_k)$. Donc

Proposition 6.8. *Le module $\mathcal{R}(FP_k)$ a une résolution projective finie.*

Je vais donner à présent d'autres exemples de cette situation.

6.2.2. *Certains modules de p-permutations indécomposables.* Je rappelle (cf.[**2**]) que les modules de p-permutations indécomposables peuvent être indexés par les paires (P, E), où P est un p-sous-groupe de G et E un $kN_G(P)/P$-module projectif indécomposable (non-nul): le module $M(P, E)$ correspondant à la paire (P, E) est le seul module de p-permutations indécomposable de vortex P tel que $M(P, E)[P] = E$. La multiplicité de $M(P, E)$ comme facteur direct d'un module de p-permutations N est égale à la multiplicité de E comme facteur direct de $N[P]$. Cette dernière est donnée par le

Lemme 6.9. *Soit N un kG-module, et E un kG-module projectif. La multiplicité de E comme facteur direct de N est égale à*

$$\dim_k Tr_1^G \mathrm{Hom}_k(N, E/J(E))/\dim_k \mathrm{End}_{kG}(E/J(E))$$

En effet, $\dim_k Tr_1^G \mathrm{Hom}_k(N, E/J(E))$ est la dimension de l'ensemble des kG-homomorphismes f de N dans $E/J(E)$ qui factorisent par un module projectif, i.e. qui s'écrivent $f = \pi g$, où π est la projection de E sur $E/J(E)$ (car E est l'enveloppe projective de $E/J(E)$). Comme π est essentiel, le morphisme g est alors surjectif si f est non-nul, donc surjectif. Alors E est facteur direct de N. Inversement, si N s'écrit $N = E^n \oplus M$, le module E n'étant pas facteur direct de M, alors $\dim_k Tr_1^G \mathrm{Hom}_k(M, E/J(E))$ est nul, et $\dim_k Tr_1^G \mathrm{Hom}_k(N, E/J(E))$ est égal à $n\dim_k Tr_1^G \mathrm{Hom}_k(E, E/J(E))$, donc à $n\dim_k \mathrm{End}_{kG}(E/J(E))$.

Proposition 6.10. *Soit P (resp. Q) un p-sous-groupe de G, et E (resp. F) un $kN_G(P)/P$-module (resp. un $kN_G(Q)/Q$)-module) projectif indécomposable. Si $M(P, E)$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F$, alors il existe $x \in G$ tel que $Q^x \cap O_p(N_G(P)) = P$, et en particulier*

$$Q \cap O_p(G) \subseteq {}^xP \subseteq Q$$

Corollaire 6.11. *Si $Q \subseteq O_p(G)$, alors le module $\mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F$ est indécomposable (égal à $M(Q, F)$), et le foncteur $L_{M(Q,F)}$ est isomorphe à $\mathcal{I}(L_{Q,F})$.*

En effet (cf. [**1**] lemme 3), si $N = \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F$, alors

$$N[P] = \sum_{x \in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)/N_G(Q)} \mathrm{Ind}_{N_G(P,{}^xQ)/P}^{N_G(P)/P}\ {}^xF$$

De plus supposant pour simplifier $x = 1$, donc $P \subset Q$

$$\dim_k Tr_1^{N_G(P)/P} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Ind}_{N_G(P,Q)/P}^{N_G(P)/P} F, E/J(E)) = \dots$$

$$\ldots = \dim_k Tr_1^{N_G(P,Q)/P} \mathrm{Hom}_k(F, E/J(E))$$

Or $N_Q(P)/P$ opère trivialement sur F, donc

$$\dim_k Tr_1^{N_G(P,Q)/P} \mathrm{Hom}_k(F, E/J(E)) = \ldots$$

$$\ldots = \dim_k Tr_{N_Q(P)/P}^{N_G(P,Q)/P} \mathrm{Hom}_{N_Q(P)/P}(F, Tr_1^{N_Q(P)/P}(E/J(E))$$

Mais $O_p(N_G(P)/P)$ opère trivialement sur le $kN_G(P)/P$ module simple $E/J(E)$. Cette expression est donc nulle si $N_Q(P) \cap O_p(N_G(P))$ est différent de P, donc si $Q \cap O_p(N_G(P)) \neq P$.

Comme $N_G(P)$ normalise $PO_p(G)$, j'ai $N_{PO_p(G)}(P) \subseteq O_p(N_G(P))$, et je dois donc avoir $Q \cap N_{PO_p(G)}(P) = P$, i.e. $Q \cap PO_p(G) = P$, ou encore $Q \cap O_p(G) \subseteq P$, ce qui prouve la proposition.

La première partie du corollaire en découle puisque le seul facteur de vortex Q de N est $M(Q, F)$, avec multiplicité 1. D'autre part le foncteur $\mathcal{I}(L_{Q,F})$ est projectif, et sa valeur sur le sous-groupe trivial est $\mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F = M(Q, F)$.

Proposition 6.12. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout p-sous-groupe de G et tout $kN_G(P)/P$-module projectif indécomposable, le module $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ est indécomposable.*
2. *Pour tout module de p-permutations indécomposable M, il existe un p-sous-groupe P et un $kN_G(P)/P$-module projectif indécomposable E tels que M soit isomorphe à $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$.*
3. *Le groupe G a un p-Sylow normal.*
4. *Tout $r\mu_k(G)$-module ayant une résolution projective finie est projectif.*

Si l'assertion 1) est vraie, comme $M(P, E)$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ qui est indécomposable, il lui est isomorphe, et l'assertion 2) est vraie.

Il est clair que l'assertion 2 entraîne l'assertion 3: en effet, si le module k est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$, alors en prenant les dimensions, je vois que
$[G : N_G(P)] \dim_k E = 1$, donc que P est un sous-groupe normal de G. Comme p ne divise pas la dimension du $kN_G(P)/P$-module projectif E, ce dernier groupe est un p'-groupe, et P est un p-sous-groupe de Sylow de G.

De même, si G a un p-Sylow normal, égal à $O_p(G)$, alors tous les p-sous-groupes de G sont contenus dans $O_p(G)$, et l'assertion 1) est vraie par la proposition précédente.

L'assertion 4) entraîne l'assertion 3) car je sais que $\mathcal{R}(FP_k)$ a une résolution projective finie. C'est donc un $r\mu_k(G)$-module projectif, nécessairement indécomposable puisque $\mathcal{R}(FP_k)(1) = k$. Il existe donc P et E tels que $\mathcal{R}(FP_k)$ soit isomorphe à $L_{P,E}$. Alors k est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$, et G a un p-Sylow normal par le raisonnement ci-dessus.

Pour prouver que l'assertion 1) entraîne l'assertion 4), j'utiliserai le lemme suivant:

Lemme 6.13. *Soit P un p-sous-groupe de G et E un $kN_G(P)/P$-module projectif tel que le module $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ soit indécomposable. Soit X un $r\mu_k(G)$-module ayant une résolution projective finie. Si $M(P, E) = \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ est facteur direct de de $X(1)$, alors il existe un sous-module de X isomorphe à $L_{P,E}$.*

Soit en effet α une injection directe de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ dans $X(1)$: l'application α est déterminée par un $N_G(P)$-homomorphisme de E dans $X(1)$, i.e. par un

$N_G(P)/P$-homomorphisme β de E dans $X(1)^P$. En composant cette application avec la projection Br_P sur $X(1)[P]$, puis avec l'isomorphisme σ inverse de $Br_P r_1^P$, j'obtiens l'application $\phi = \sigma Br_P \beta$ de E dans $X(P)$, qui donne par adjonction un morphisme Φ de $L_{P,E}$ dans X. Le morphisme $\Phi(1)$ est défini par

$$\Phi(1)(x \otimes e) = x r_1^P \sigma Br_P \beta(e)$$

alors que α est définie par

$$\alpha(x \otimes e) = x\beta(e)$$

Soit alors γ un morphisme de $X(1)$ dans $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ tel que $\gamma\alpha = Id$. En particulier, j'ai $\gamma\beta(e) = 1 \otimes e$. Le morphisme $\gamma\Phi(1)$ est un endomorphisme du module indécomposable $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$. Il est donc inversible ou nilpotent. Mais

$$\gamma\Phi(1)(1 \otimes e) = \gamma r_1^P \sigma Br_P \beta(e)$$

et

$$Br_P r_1^P \sigma Br_P \beta(e) = Br_P \beta(e)$$

par définition de σ. Donc $r_1^P \sigma Br_P \beta(e) - \beta(e) \in Ker Br_P$, donc

$$\gamma\Phi(1)(1 \otimes e) - 1 \otimes e \in Ker Br_P$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\gamma\Phi(1)[P] = Id_E$$

prouvant que $\gamma\Phi(1)$ n'est pas nilpotent, donc qu'il est inversible. Donc $\Phi(1)$ est une injection directe, ce qui prouve que $\Phi(1)[Q]$ est injectif pour tout Q, donc que Φ est injectif, ce qui prouve le lemme.

Alors si je suis dans les conditions de l'assertion 1) de la proposition, et si X est un contre-exemple minimal à l'assertion 4), soit $M(P,E) = \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ un facteur direct indécomposable de $X(1)$, et L un sous-module de X isomorphe à $L_{P,E}$. Le quotient Y de X par L a une résolution projective finie: en effet, un module Y a une résolution projective finie si et seulement si il existe un entier n tel que $Ext^m(Y,Z) = 0$ pour tout Z et tout $m \geq n$. Alors si

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

est une suite exacte, la suite exacte longue des Ext associée montre que si deux des modules A, B, C ont une résolution projective finie, le troisième aussi.

Alors la minimalité de X entraîne que Y est projectif, donc facteur direct de X, qui est donc somme directe de deux modules projectifs, donc projectif, ce qui contredit l'hypothèse faite sur X et termine la démonstration de la proposition.

6.2.3. *Intersections quasi-triviales.* Je dirai qu'un p-sous-groupe de G est *à intersections quasi-triviales* si pour tout $x \in G$, ou bien $P = P^x$, ou bien $P \cap P^x \subseteq O_p(G)$. Dans le cas où $O_p(G) = (1)$, cette définition est celle d'un sous-groupe à intersections triviales. Dans ces conditions:

Proposition 6.14. *Soit P un p-sous-groupe de G à intersections quasi-triviales, et M un kG-module de p-permutations indécomposable de vortex P. Alors il existe un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X) = L_M$.*

En effet, si $M(Q,F)$ est un facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$, alors il existe $x \in G$ tel que $P^x \cap O_p(N_G(Q)) = Q$. Alors si $Q \not\subseteq O_p(G)$, le groupe Q est contenu dans un seul conjugué P^x de P, donc $N_G(Q)$ normalise P^x, ce qui prouve que $N_{P^x}(Q) \subseteq O_p(N_G(Q))$. Alors nécessairement $P^x = Q$. Le module $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ est donc somme directe de $M(P,E)$ et de modules indécomposables de vortex contenus dans $O_p(G)$.

Soit alors M un kG-module de p-permutations indécomposable de vortex P. Je note E le $kN_G(P)/P$-module projectif $M[P]$. Si P est contenu dans $O_p(G)$, alors $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$ est indécomposable, égal à $M(P,E)$, et le $r\mu_k(G)$-module $X = L_{P,E}$ est tel que $\mathcal{I}(X)$ soit projectif, et $X(1) = \mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E = M(P,E)$. Donc X répond à la question pour le module $M = M(P,E)$.

Si P n'est pas contenu dans $O_p(G)$, soit X un quotient minimal de $L_{P,E}$ tel que X ait une résolution projective finie, et que $X(P) = E$. Un tel quotient existe, puisque $L_{P,E}(P) = E$.

Comme X est quotient de $L_{P,E}$, et comme X a une résolution projective finie, je sais que $X(1)$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E = L_{P,E}(1)$.

Alors si $M(Q,F)$ est un facteur direct indécomposable de $X(1)$, ou bien Q est conjugué de P, ou bien Q est contenu dans $O_p(G)$. Dans ce cas, le module $\mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F$ est indécomposable, égal à $M(Q,F)$, et l'injection directe de $M(Q,F)$ dans $X(1)$ fournit une injection de $L_{Q,F}$ dans X, donc une suite exacte

$$0 \to L_{Q,F} \to X \to Y \to 0$$

Alors Y est un quotient de $L_{P,E}$, puisque X en est un, et de plus $Y(P)$ est égal à E, puisque $L_{Q,F}(P) = 0$. Comme Y a une résolution projective finie, ceci contredit l'hypothèse faite sur X, ce qui prouve que Q est conjugué de P, donc que $F = E$, et que $X(1)$ est indécomposable de vortex P, tel que $X(1)[P] = E$. Le module X répond donc à la question, ce qui prouve la proposition.

Proposition 6.15. *Si les p-Sylows de G sont à intersections triviales, alors:*

1. *Pour tout p-sous-groupe P de G et tout $kN_G(P)/P$-module projectif E, il existe un $kN_G(P \cap O_p(G))/(P \cap O_p(G))$-module projectif F tels que*

$$\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E = M(P,E) \oplus \mathrm{Ind}_{N_G(P \cap O_p(G))}^G F$$

2. *Pour tout kG-module de p-permutations M, il existe un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X) = L_M$.*

En effet, si les p-Sylows de $G/O_p(G)$ sont à intersections triviales, alors les p-Sylows de G sont à intersections quasi-triviales. Si P est un p-sous-groupe de G non contenu dans $O_p(G)$, si S est un p-Sylow de G contenant P, alors S est le seul p-Sylow de G contenant P.

Alors si $M(Q,F)$ est un facteur direct indécomposable de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$, il existe $x \in G$ tel que $P^x \cap O_p(N_G(Q)) = Q$, et $P^x \cap O_p(G) \subseteq Q$. Si Q n'est pas contenu dans $O_p(G)$, alors S^x est le seul p-Sylow de G contenant Q.En particulier $N_G(Q) \subseteq N_G(S^x)$, et $N_{S^x}(Q) \subseteq O_p(N_G(Q))$. Donc $N_{P^x}(Q) \subseteq O_p(N_G(Q))$, ce qui prouve que $Q = P^x$. Et si Q est contenu dans $O_p(G)$, alors $Q = P^x \cap O_p(G)$, ce qui prouve l'assertion 1).

Soit alors M un module de p-permutations indécomposable de vortex P, et $E = M[P]$. Soit comme ci-dessus X un quotient minimal de $L_{P,E}$ ayant une résolution projective finie, et tel que $X(P) = E$.

En particulier, le module $X(1)$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$. Donc si $P \subseteq O_p(G)$, alors $X(1)$ est égal à $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E = M(P,E)$, et X répond aux conditions de l'assertion 2).

Si P n'est pas contenu dans $O_p(G)$, soit $M(Q,F)$ un facteur direct indécomposable de $X(1)$. Alors $M(Q,F)$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{N_G(P)}^G E$. Donc si Q n'est pas conjugué de P, alors $Q \subseteq O_p(G)$, et $M(Q,F) = \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G F$ est facteur direct de $X(1)$. Le module $L_{Q,F}$ est alors un sous-module de X, et le quotient Y est un quotient de $L_{P,E}$ plus petit que X, ayant une résolution projective finie, et tel que $Y(P) = X(P) = E$, puisque $L_{Q,F}(P) = 0$. Cela contredit la définition de X, et prouve que $Q = P$, donc que $F = E$, et que $X(1)$ est indécomposable. Comme $X(1)[P] = X(P) = E$, ceci prouve que $X(1)$ est isomorphe à M, d'où l'assertion 2).

6.2.4. *Le cas des groupes cycliques.* Soit M est un module de p-permutations indécomposable de vortex P, alors M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_P^G k$. Ceci revient à dire qu'il existe une forme linéaire ϕ sur M invariante par P, et un vecteur f de M^P, tels que

$$Id_M = Tr_P^G(\phi \otimes f)$$

en notant $\phi \otimes f$ l'endomorphisme de M défini par

$$(\phi \otimes f)(v) = \phi(v)f$$

Soit alors Q un p-sous-groupe de G. Je définis un endomorphisme α_Q de M en posant

$$\alpha_Q(v) = \sum_{x \in T_G(Q,P)/P} \phi(x^{-1}v)xf$$

de sorte que α_1 est l'application identique. Alors:

LEMME 6.16. *Avec ces notations:*

1. *Si* $Q \in \underline{s}_p(G)$ *et* $x \in G$, *alors* $x\alpha_Q x^{-1} = \alpha_{^xQ}$.
2. *L'image de* α_Q *est contenue dans* M^Q, *et son noyau contient* $[Q,M]$.
3. *Si* $A \supseteq B \subseteq C$, *alors* $\alpha_A\alpha_B\alpha_C = \alpha_A\alpha_C$
4. *En particulier, pour tout p-sous-groupe* Q *de* G, *j'ai*

$$\alpha_Q^3 = \alpha_Q^2$$

et α_Q^2 *est un projecteur dont l'image est isomorphe à* $M[Q]$.

L'assertion 1) tient au fait que $T_G({}^xQ,P) = T_G(Q,P)x$. Pour l'assertion 2), j'observe que si $q \in Q$, alors

$$q\alpha_Q(v) = q \sum_{x \in T_G(Q,P)/P} \phi(x^{-1}v)xf = \sum_{x \in T_G(Q,P)/P} \phi(x^{-1}v)xq^x f = \alpha_Q(v)$$

puisque f est invariant par P. La seconde partie de l'assertion 2) se déduit alors de l'assertion 1), puisque $\alpha_Q(qv) = q\alpha_Q(v) = \alpha_Q(v)$.
Sous les hypothèses de l'assertion 3), soit $v \in M^B$. Puisque α_1 est l'identité, je peux écrire

$$v = \sum_{x \in B\backslash G/P} \sum_{y \in B/B \cap {}^xP} \phi(x^{-1}y^{-1}v)yxv$$

ou encore puisque v est invariant par B

$$v = \sum_{x \in B\backslash G/P} \phi(x^{-1}v)Tr_{B\cap {}^xP}^B(xv)$$

Or $\alpha_A(Tr_{B\cap {}^xP}^B(xv)) = 0$ si $B \not\subseteq {}^xP$, et donc

$$\alpha_A(v) = \alpha_A\alpha_B(v) \text{ si } v \in M^B$$

et comme l'image de α_C est contenue dans M^C, donc dans M^B, l'assertion 3) est démontrée.

La première partie de l'assertion 4) s'en déduit en prenant $A = B = C = Q$. La seconde résulte du fait que pour $v \in M^Q$, le vecteur $v - \alpha_Q(v)$ est dans le noyau de Br_Q, lui même contenu dans le noyau de α_Q.

Dans le cas où P est cyclique, j'en déduis la

PROPOSITION 6.17. *Soit P un p-sous-groupe cyclique de G, et M un kG-module de p-permutations indécomposable de vortex P. Alors il existe un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X) = L_M$.*
Si les p-Sylows de G sont cycliques, alors pout tout module de p-permutations indécomposable M il existe un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X) = L_M$.

Avec les notations précédentes, je pose, pour tout p-sous-groupe Q de G

$$\beta_Q = \alpha_{\Phi^n(Q)}\alpha_{\Phi^{n-1}(Q)}\ldots\alpha_{\Phi(Q)}\alpha_Q^2$$

en notant $\Phi(Q)$ le sous-groupe de Frattini de Q, l'entier n étant choisi tel que $\Phi^{n+1}(Q) = (1)$ (la définition de β_Q ne dépend pas d'un tel entier n, puisque $\alpha_1 = Id$). Il est clair que si $x \in G$, alors

$$x\beta_Q x^{-1} = \beta_{^xQ}$$

De plus, si S est un sous-groupe de Q, il existe k tel que $S = \Phi^k(Q)$, et

$$\alpha_S\beta_Q = \alpha_{\Phi^k(Q)}\alpha_{\Phi^n(Q)}\alpha_{\Phi^{n-1}(Q)}\ldots\alpha_{\Phi(Q)}\alpha_Q^2$$

donc

$$\alpha_S\beta_Q = \alpha_{\Phi^k(Q)}\alpha_{\Phi^{k+1}(Q)}\ldots\alpha_Q^2$$

ce qui donne

$$\beta_S\beta_Q = \beta_Q$$

Il en résulte que β_Q est un projecteur. De plus, il est clair que $\beta_Q\alpha_Q = \beta_Q$, et que $\alpha_Q\beta_Q = \alpha_Q^2$ (c'est le cas $S = Q$, donc $k = 0$, de l'égalité ci-dessus). En particulier, les projecteurs β_Q et α_Q^2 ont même noyau, donc des images isomorphes à $M[Q]$. De plus si S est un sous-groupe de Q, alors $\beta_S\beta_Q = \beta_Q$, et l'image de β_Q est contenue dans celle de β_S.

En notant r_S^Q cette inclusion, j'obtiens les applications cherchées de $M[Q]$ dans $M[S]$: je définis ainsi un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X)$ soit projectif et $\mathcal{I}(X)(1) = M$, donc $\mathcal{I}(X)$ est isomorphe à L_M, ce qui prouve la proposition. Le corollaire s'en déduit trivialement.

6.2.5. *Un contre-exemple.* Soit G le groupe symétrique S_5, et k le corps à deux éléments. Je vais construire un kG-module M pour lequel il sera impossible de trouver un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X)$ soit isomorphe à L_M.

Soit M un espace vectoriel de dimension 6 sur k. Je fais opérer les générateurs standard de S_5 sur M par la correspondance ρ suivante:

$$\rho((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho((23)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho((34)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho((45)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\rho((12))$, $\rho((23))$, et $\rho((34))$ permutent les vecteurs de base de M suivant la correspondance

$$\rho((12)) \mapsto (23)(45) \qquad \rho((23)) \mapsto (12)(56) \qquad \rho((34)) \mapsto (24)(35)$$

Il est alors clair que la restriction de ρ au groupe S_4 engendré par (12), (23), et (34) est une représentation de permutations de S_4.

Un calcul élémentaire montre que $\rho((45))$ commute à $\rho((12)$ et $\rho((23))$, et que le produit $\rho((34))\rho((45))$ est d'ordre 3. Il en résulte que ρ est une représentation de S_5, ou que M est un kS_5 module.

Comme la restriction de M à S_4 est un module de permutations, et comme S_4 contient un 2-Sylow de S_5, le module M est un kS_5-module de 2-permutations.

Soit S le 2-Sylow de S_5 engendré par (12), (34) et (13)(24). Alors S stabilise la base canonique $B = \{e_1, \ldots, e_6\}$ de M. Comme

$$(13)(24) = (23)(34)(12)(23)$$

l'élément (13)(24) de S opère sur B par la permutation

$$(12)(56)(24)(35)(23)(45)(12)(56) = (16)(34)$$

Les orbites de S sur B sont donc $\{e_1, e_6\}$ et $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Le stabilisateur de e_1 dans S est le groupe P engendré par (12) et (34), et le stabilisateur de e_2 dans S est le groupe T engendré par (13)(24). Il en résulte que

$$\mathrm{Res}_S^{S_5} M = \mathrm{Ind}_P^S k \oplus \mathrm{Ind}_T^S k$$

Les facteurs directs indécomposables de M sont donc de vortex contenus dans P ou dans T à conjugaison près. Le module M n'a aucun facteur direct projectif, puisque sa dimension est inférieure à la 2-composante de l'ordre de S_5. D'autre part, le module $M[T]$ a une base en bijection avec $B^T = \{e_2, e_5\}$. Comme $N_{S_5}(T)/T$ est d'ordre 4, il en résulte que $M[T]$ n'a aucun facteur direct $kN_{S_5}(T)/T$-projectif. Le module M n'a donc que des facteurs directs indécomposables de vortex non-triviaux contenus dans P.

Le module $M[P]$ a une base en bijection avec B^P, composée des vecteurs e_1 et e_6. Le normalisateur de P dans S_5 est égal à S, et le groupe S échange e_1 et e_6. Il en résulte que le module $M[P]$ est $kN_{S_5}(P)/P$-projectif indécomposable, donc que M a un facteur direct isomorphe à $M(P, E_k)$, en notant E_k l'enveloppe $kN_{S_5}(P)/P$-projective du module trivial.

Soit alors Q le sous-groupe de P engendré par (12). Le module $M[Q]$ a une base en bijection avec B^Q, c'est-à-dire $\{e_1, e_6\}$. Le normalisateur de Q, isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times S_3$, est engendré par Q et les éléments (34) et (45), qui opèrent trivialement sur le quotient de M par le sous-espace engendré par $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Donc $N_{S_5}(Q)/Q$ opère trivialement sur $M[Q]$, qui n'a donc aucun facteur direct projectif comme $kN_{S_5}(Q)/Q$-module. Il en résulte que M n'a aucun facteur direct de vortex Q.

Le seul sous-groupe propre non-trivial de P qui ne soit pas conjugué de Q est le groupe U engendré par (12)(34), qui opère sur B par la permutation (25)(34).

Donc $M[U]$ est de dimension 2. Comme $N_{S_5}(U)/U$ est d'ordre 4, le module $M[U]$ n'a aucun facteur direct projectif comme $kN_{S_5}(U)/U$-module, et le module M n'a aucun facteur direct de vortex U.

Le module M est donc indécomposable de vortex P. Comme $M[P]$ est l'enveloppe projective du module trivial, le module M est le module de Scott de S_5 pour le sous-groupe P (cf. [**2**]).

Alors s'il est possible de trouver des applications de restriction convenables, en particulier, l'application r_1^P doit être injective, ainsi que l'application r_Q^P, puisque $r_1^P = r_1^Q r_Q^P$. Comme $M[P]$ et $M[Q]$ ont la même dimension, l'application r_Q^P doit être surjective. Alors r_1^P et r_1^Q ont la même image W, qui doit être un sous-espace de M^P invariant par le groupe H engendré par $N_{S_5}(P)$ et $N_{S_5}(Q)$.

Le groupe H est un sous-groupe transitif de S_5 qui contient une transposition. Donc $H = S_5$. D'autre part, un vecteur v de M^P est de la forme

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ b \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Le transformé de v par $\rho((23))$ est le vecteur

$$\rho((23))(v) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ b \\ b \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

Donc si $v \in W$, alors $\rho((23))(v) \in W$ et alors $a = b = c$. Le seul sous-espace de M^P invariant par S_5 est donc de dimension 1, engendré par le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est le module M^{S_5}. L'espace W ne peut pas être de dimension 2, et il est donc impossible de trouver un $r\mu_k(G)$-module X tel que $\mathcal{I}(X) = L_M$.

7. Complexes de foncteurs de Mackey projectifs

Je supposerai ici que l'anneau R est un anneau local complet, dont le corps résiduel k est de caractéristique p.

7.1. Complexes scindés. Soit A un anneau et L^* un complexe de A-modules, dont la différentielle d est de degré 1. Dans [**7**], Webb donne la définition suivante d'un complexe *scindé*: le complexe L^* est scindé si il existe des applications α_n de L^n dans L^{n-1} telles que pour tout n,

$$d^n \alpha_{n+1} d^n = d^n$$

LEMME 7.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe L^* est scindé.*
2. *Le complexe L^* est homotope à un complexe à différentielles nulles.*

En effet, si M^* est un complexe à différentielles nulles, et f une équivalence d'homotopie de L^* dans M^*, d'inverse g, alors il existe des applications α_n de L^n dans L^{n-1} telles que

$$Id - g_n f_n = d^{n-1}\alpha_n + \alpha_{n+1}d^n$$

Alors $d^n\alpha_{n+1}d^n = d^n - d^n g_n f_n$, et $d^n g_n$ est nul puisque g est un morphisme de complexes et puisque la différentielle de M^* est nulle.

Inversement, si L^* est scindé, soit $M^n = H^n(L^*)$ son n-ième groupe d'homologie. Je considère M^* comme un complexe à différentielles nulles. Soit Z^n le noyau de d^n, soit i_n l'injection de Z^n dans L^n, et p_n la projection de Z^n sur M^n. L'image de $Id - \alpha_{n+1}d^n$ est dans Z^n par hypothèse, et je pose

$$f_n = p_n(Id - \alpha_{n+1}d^n)$$

Inversement, l'application $Id - d^{n-1}\alpha_n$ envoie Z^n dans lui-même, et sa restriction à Z^n factorise par M^n, sous la forme

$$Id - d^{n-1}\alpha_n = h_n p_n$$

et je note g_n la composée de h_n et i_n. Il est alors clair que si $u = p_n(v) \in M^n$

$$f_n g_n(u) = p_n(Id - \alpha_{n+1}d^n)i_n h_n p_n(v) = p_n(Id - \alpha_{n+1}d^n)(Id - d^{n-1}\alpha_n)(v)$$

ou encore, puisque $d^n(v) = 0$

$$f_n g_n(u) = p_n(v - d^{n-1}\alpha_n(v)) = p_n(v) = u$$

Inversement, si $w \in L^n$, alors

$$g_n f_n(w) = i_n h_n p_n(Id - \alpha_{n+1}d^n)(w) = i_n(Id - d^{n-1}\alpha_n)(Id - \alpha_{n+1}d^n)(w)$$

soit

$$g_n f_n = Id - \alpha_{n+1}d^n - d^{n-1}(\alpha_n - \alpha_n\alpha_{n+1}d^n)$$

et en posant $\beta_n = \alpha_n - \alpha_n\alpha_{n+1}d^n$, j'ai bien

$$g_n f_n = Id - \beta_{n+1}d^n - d^{n-1}\beta_n$$

ce qui montre que L^* est homotope à M^*.

Il résulte de ce lemme que L^* est homotope au complexe nul si et seulement si L^* est acyclique et scindé au sens de la définition ci-dessus.

COROLLAIRE 7.2. *Soit L^* un complexe de A-modules. Si pour tout entier n, il existe un complexe M^* (dépendant éventuellement de n) homotope à L^* et tel que $M^n = 0$, alors L^* est homotope au complexe nul.*

En effet dans ces conditions, le complexe L^* est certainement acyclique, puisque $H^n(L^*) = H^n(M^*) = 0$. De plus, si f est une équivalence d'homotopie de L^* dans M^*, d'inverse g, alors il existe des applications α_m de L^m dans L^{m-1} et β_m de M^m dans M^{m-1} telles que pour tout m

$$Id - g_m f_m = \alpha_{m+1}d^m + d^{m-1}\alpha_m$$

En particulier, je vois que $d^n - d^n g_n f_n = d^n\alpha_{n+1}d^n$, et comme $M^n = 0$, j'ai $d^n g_n = 0$. Alors le complexe L^* est scindé, donc il est homotope au complexe nul.

7.2. Complexes scindés de foncteurs de Mackey projectifs. Le lemme 6.3 et la proposition 6.4 peuvent se généraliser sous la forme suivante:

PROPOSITION 7.3. *Soit L^* un complexe de foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_R(G,1)$, tel qu'il existe n avec $L^n = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe L^* est acyclique et scindé.*
2. *Pour tout p-sous-groupe P de G, le complexe $\overline{L}^*(P)$ est acyclique.*

Il est clair que l'assertion 1) entraîne l'assertion 2). Inversement, je peux par exemple supposer que L^{-1} est nul. Le lemme 6.3 montre alors que d^0 est une injection directe, ce qui revient à dire que le complexe L^* est homotope au complexe

$$\ldots L^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} 0 \to 0 \to 0 \to L^1/L^0 \xrightarrow{d'^1} L^2 \to \ldots$$

Le lemme 6.3 montre aussi que d^{-3} est une surjection scindée. Par récurrence, il en résulte que le complexe L^* est homotope à un complexe ayant un nombre arbitraire de modules nuls consécutifs autour de L_0, et le corollaire 7.2 permet de conclure.

De même:

PROPOSITION 7.4. *Soit M^* un complexe de RG-modules de p-permutations, tel qu'il existe n avec $M^n = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe M^* est acyclique et scindé.*
2. *Pour tout p-sous-groupe de G, le complexe $M^*[P]$ est acyclique.*

Si K^* et L^* sont deux complexes de modules sur un anneau quelconque, à tout morphisme f de K^* dans L^* est associé un troisième complexe, le cône de f, noté $C^*(K,L,f)$ ayant les propriétés suivantes:

- Le complexe $C^*(K,L,f)$ est acyclique si et seulement si $H^n(f)$ est un isomorphisme pour tout n (i.e. si f est un *homologisme*)
- Le complexe $C^*(K,L,f)$ est acyclique et scindé si et seulement si f est une équivalence d'homotopie.
- Le module $C^n(K,L,f)$ est la somme directe de K^n et de L^{n-1}.

La troisième propriété permet de voir que si K^* et L^* sont des complexes de foncteurs de Mackey dans $Mack_R(G,1)$, il en est de même de $C^*(K,L,f)$. De même, si K^* et L^* sont des complexes de modules de p-permutations, il en est de même de $C^*(K,L,f)$. Les propositions et remarques ci-dessus donnent alors les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 7.5. *Soient K^* et L^* des complexes de foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_R(G,1)$, tels qu'il existe n tel que $K^n = L^n = 0$ et $K^{n-1} = L^{n-1} = 0$. Soit f un morphisme de K^* dans L^*. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le morphisme f est une équivalence d'homotopie.*
2. *Pour tout p-sous-groupe P de G, le morphisme $\overline{f}(P)$ est un homologisme.*

PROPOSITION 7.6. *Soient M^* et N^* des complexes de kG-modules de p-permutations, tels qu'il existe m tel que $M^n = N^n = 0$ et $M^{n-1} = N^{n-1} = 0$. Soit f un morphisme de M^* dans N^*. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le morphisme f est une équivalence d'homotopie.*
2. *Pour tout p-sous-groupe P de G, le morphisme $f[P]$ est un homologisme.*

7.3. Complexes de p-permutations. Je vais essayer de voir comment se transforment les résultats précédents lorsque l'hypothèse "pour tout P" est remplacée par "pour tout P non-trivial": la conséquence de ce changement sera le remplacement des modules nuls par des modules projectifs, des foncteurs de Mackey nuls par des foncteurs de Mackey projectifs de vortex trivial, des complexes acycliques et scindés par des complexes homotopes à des complexes de modules projectifs.

Je supposerai que R est un corps k. J'appelle *complexe de p-permutations* un complexe de kG-modules de p-permutations.

Je vais chercher ici à quelles conditions un tel complexe est homotope à un complexe de kG-modules projectifs. Je peux tout d'abord me ramener au cas où G est un p-groupe:

Lemme 7.7. *Soit L^* un complexe de kG-modules de type fini, et S un p-Sylow de G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe L^* est homotope à un complexe de kG-modules projectifs.*
2. *La restriction de L^* à S est homotope à un complexe de kS-modules projectifs.*

Il est clair que l'assertion 1) entraine l'assertion 2). Inversement, soit E^* un complexe de kS-modules projectifs, et a une équivalence d'homotopie de E^* dans $\mathrm{Res}_S^G L^*$, d'inverse b. Alors le complexe $\mathrm{Ind}_S^G E^*$ est un complexe de kG-modules projectifs, et les morphismes a et b fournissent par adjonction des morphismes A et B entre $\mathrm{Ind}_S^G E^*$ et L^*. Il est facile de voir que le morphisme AB est homotope à $[G:S]Id$. Le lemme résulte alors du lemme suivant:

Lemme 7.8. *Soient M^* et L^* des complexes de kG-modules de type fini. Soit A un morphisme de M^* dans L^* et B un morphisme de L^* dans M^* tels que AB soit homotope à l'identité de L^*. Alors L^* est homotope à un facteur direct de M^*.*

En effet, soit $L_1^* = \cap_n (AB)^n(L^*)$, et $L_2^* = \sum_n Ker(AB)^n$. Alors L_1^* et L_2^* sont des sous-complexes de L^*, stables par AB, et L^* s'identifie à la somme directe des complexes L_1^* et L_2^*. La restriction de AB à L_1^* et L_2^* est homotope à l'identité. Comme en chaque degré n, la restriction de AB à L_2^n est nilpotente, il en résulte que pour tout n, il existe un complexe K^* homotope à L_2^*, tel que $K^n = 0$. Alors le complexe L_2^* est homotope au complexe nul, et le complexe L^* est homotope au complexe L_1^*.

D'autre part, le complexe L_1^* est isomorphe au complexe $B(L_1^*)$, lui-même homotope à $\cap_n (BA)^n(M^*)$, qui est facteur direct de M^*. Ceci prouve le lemme.

Les lemmes précédents permettent de démontrer la

Proposition 7.9. *Soit L^* un complexe de kG-modules de p-permutations, tel qu'il existe un entier n pour lequel L^n est projectif. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe L^* est homotope à un complexe de kG-modules projectifs.*
2. *Pour tout p-sous-groupe P non-trivial de G, le complexe $L^*[P]$ est acyclique.*

Il est clair que l'assertion 1) entraîne l'assertion 2). Pour montrer la réciproque, j'ai besoin d'une notation:

Si X et Y son des kG-modules, je noterai $J_{kG}(X,Y)$ l'ensemble des kG-homomorphismes f de X dans Y tels que pour tout kG-homomorphisme g de Y dans X, le morphisme gf soit nilpotent. Par exemple, $J_{kG}(X,X)$ est le radical de Jacobson de $\mathrm{End}_{kG}(X)$. Il est facile de voir d'autre part que cette définition est bi-additive en X et Y: l'isomorphisme canonique entre $\mathrm{Hom}_{kG}(X, Y \oplus Z)$ et $\mathrm{Hom}_{kG}(X,Y) \oplus \mathrm{Hom}_{kG}(X,Z)$ induit en effet un isomorphisme entre $J_{kG}(X, Y \oplus Z)$ et $J_{kG}(X,Y) \oplus J_{kG}(X,Z)$. De même, si X^* et Y^* sont les duaux respectifs de X et Y, alors $\phi \in J_{kG}(X,Y)$ si et seulement si $\phi^* \in J_{kG}(Y^*, X^*)$: en effet, le morphisme $\psi^*\phi^*$ est nilpotent si et seulement si le morphisme $\phi^*\psi^* = (\psi\phi)^*$ l'est.

Par le lemme précédent, je peux supposer que G est un p-groupe. Soit alors n un entier quelconque, et ϕ un morphisme de L^{n+1} dans L^n, tel que ϕd^n ne soit pas nilpotent. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots L^{n-1} & \rightarrow & L^n & \xrightarrow{d^n} & L^{n+1} & \rightarrow & L^{n+2}\ldots \\
0\downarrow & & \phi d^n \downarrow & \overset{\phi}{\swarrow} & \downarrow d^n\phi & & \downarrow 0 \\
\ldots L^{n-1} & \rightarrow & L^n & \xrightarrow{d^n} & L^{n+1} & \rightarrow & L^{n+2}\ldots
\end{array}$$

définit alors un endomorphisme γ de L^* homotope à 0. Je peux alors remplacer L^* par son facteur direct $\cap_m (Id+\gamma)^m(L^*)$, qui lui est homotope. Les seules modules que je modifie par cette opération sont L^n et L^{n+1}, qui sont remplacés par des facteurs directs L'^n et L'^{n+1}. Les différentielles d^{n-1}, d^n et d^{n+1} deviennent respectivement d'^{n-1}, d'^n et d'^{n+1}. Si $d^{n-1} \in J_{kG}(L^{n-1}, L^n)$, alors $d'^{n-1} \in J_{kG}(L'^{n-1}, L'^n)$. De même, si $d^{n+1} \in J_{kG}(L^{n+1}, L^{n+2})$, alors $d'^{n+1} \in J_{kG}(L'^{n+1}, L'^{n+2})$.

Je peux donc supposer que $d_n \in J_{kG}(L^n, L^{n+1})$ pour tout n.

Soit alors k un entier tel que L^k soit un kG-module projectif. Si l'un des modules L^n, pour $n > k$, n'est pas projectif, soit n le plus petit entier supérieur à k tel que L^n ne soit pas projectif.

Soit de plus Q un sous-groupe maximal de G qui soit vortex d'un facteur direct indécomposable de L^n. Le seul kG-module de p-permutations indécomposable de vortex Q est $\mathrm{Ind}_Q^G k$, car G est un p-groupe. Le module M est alors somme de sa partie A de vortex Q, isomorphe à une somme d'un certain nombre de copies de $\mathrm{Ind}_Q^G k$, et d'un module X tel que $X[Q]=0$. Le module L^{n+1} est quant à lui somme de sa partie B de vortex Q, d'un module Z tel que $Z[Q]=0$, et d'un module Y n'ayant que des facteurs directs de vortex strictement plus grands que Q.

Alors d^n peut être représenté par une matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_{B,A} & \phi_{B,X} \\ \phi_{Y,A} & \phi_{Y,X} \\ \phi_{Z,A} & \phi_{Z,X} \end{pmatrix}$$

Le morphisme $d^n[Q]$ peut alors être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_{B,A}[Q] \\ \phi_{Y,A}[Q] \end{pmatrix}$$

Alors si $Q \neq (1)$, comme le complexe $L^*[Q]$ est acyclique, et comme $L^{n-1}[Q]=0$, l'application $d^n[Q]$ doit être injective.

Le morphisme $\phi_{B,A}$ est une matrice à coefficients dans $\mathrm{End}_{kG}(\mathrm{Ind}_Q^G k)$, dont chaque coefficient est en fait dans $J(\mathrm{End}_{kG}(\mathrm{Ind}_Q^G k))$, donc annule le socle de $\mathrm{Ind}_Q^G k$ (isomorphe à k), puisque $\phi \in J_{kG}(M,N)$. Donc $\phi_{B,A}$ annule le socle de A.

Or ce socle s'envoie *sur* le socle de $A[Q]$. Donc $\phi_{Y,A}[Q]$ restreinte à ce socle doit être injective, donc $\phi_{Y,A}[Q]$ doit être injective. Alors $A[Q]$, qui est projectif comme $N_G(Q)/Q$ module, s'injecte dans $Y[Q]$, donc $A[Q]$ est facteur direct de $Y[Q]$. Mais comme Y n'a que des facteurs directs de vortex strictement plus grands que Q, c'est impossible, et cette contradiction prouve que $Q = (1)$, donc que L^n est projectif.

Donc L^n est projectif pour tout $n \geq k$. Je peux alors appliquer le même raisonnement au complexe dual $\mathrm{Hom}_k(L^*, k)$ pour montrer que L_n est projectif pour tout $n \leq k$, donc que L^* est un complexe de modules projectifs. D'où la proposition.

Elle admet le corollaire suivant, qui précise un résultat de Webb (cf.[**8**]):

COROLLAIRE 7.10. *Soit Δ un complexe simplicial sur lequel agit le groupe G. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Le complexe de chaines $C(\Delta)$ de Δ sur k est homotope à un complexe de kG-modules projectifs.*
2. *Pour tout sous-groupe d'ordre p de G, l'ensemble Δ^P est acyclique modulo p.*

En effet, un argument classique montre que si l'assertion 2) est vraie, alors Δ^P est acyclique modulo p pour tout p-sous-groupe P non-trivial de G. D'autre part, le complexe $C(\Delta)[P]$ est le complexe de chaines de Δ^P.

7.4. Complexes de foncteurs de Mackey projectifs. Je suppose ici encore que R est un corps k de caractéristique p. Les propositions 18 et 20 ont la conséquence suivante:

PROPOSITION 7.11. *Soit X^* un complexe de foncteurs de Mackey projectifs dans $Mack_k(G,1)$, tel qu'il existe un entier n pour lesquels $X^n = X^{n+1} = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Il existe un complexe L^* de kG-modules projectifs tels que X^* soit homotope au complexe FQ_{L^*}.*
2. *Pour tout p-sous-groupe non-trivial P de G, le complexe $\overline{X}^*(P)$ est acyclique.*
3. *Le complexe $X^*(1)$ est homotope à un complexe de modules projectifs.*
4. *Le complexe X^* est homotope au complexe $FQ_{X^*(1)}$.*

En effet, si M est un kG-module et Y est un foncteur de Mackey de la forme FQ_M, il est facile de voir que $\overline{Y}(P)$ est nul pour tout P non-trivial, car les traces t_R^P sont surjectives pour $R \neq P$. Il est alors clair que l'assertion 1) entraîne l'assertion 2). De même, l'assertion 4) entraîne l'assertion 2).

De même, l'assertion 2) entraîne que le complexe $X^*(1)$ vérifie les hypothèses de l'assertion 2) de la proposition 7.9. Il existe alors un complexe L^* de kG-modules projectifs tel que $X^*(1)$ soit homotope à L^*. Donc l'assertion 2) entraîne l'assertion 3).

Il est clair que l'assertion 3) entraîne l'assertion 2), puisque $\overline{X}^*(P)$ s'identifie à $X^*(1)[P]$.

Soit alors L^* un complexe de modules projectifs homotope au complexe $X^*(1)$. Je peux, quitte à remplacer L^* par un facteur direct, supposer que $L^n = L^{n+1} = 0$. Soit alors a une équivalence d'homotopie de L^* dans $X^*(1)$. Le morphisme a fournit par adjonction un morphisme A du complexe FQ_{L^*} dans le complexe X^*: le morphisme $A^n(H)$ de $(L^n)_H$ dans $X^n(H)$ est donné par

$$A^n(v) = t_1^H a^n(v)$$

Le complexe $X^*(1)[P]$ est homotope au complexe $\overline{X}^*(P)$, et au complexe $L^*[P]$, qui est nul si $P \neq (1)$. Le complexe $\overline{X}^*(P)$ est donc acyclique et scindé dans ce cas. Le complexe $\overline{FQ^*_L}(P)$ est nul si $P \neq (1)$. Alors le morphisme $\overline{A}(P)$ est trivialement un homologisme si $P \neq (1)$. Comme le morphisme $\overline{A}(1)$ est égal à $A(1)$, donc à a, c'est une équivalence d'homotopie, donc un homologisme.

Alors les complexes FQ_{L^*} et X^* vérifient les hypothèses de l'assertion 2 de la proposition 7.5, et A est une équivalence d'homotopie, ce qui prouve que l'assertion 3) entraîne l'assertion 1). Les assertions 1), 2) et 3) sont donc équivalentes.

Alors si l'assertion 1) est vraie, i.e. si X^* est homotope au complexe FQ_{L^*}, le complexe $X^*(1)$ est homotope au complexe $FQ_{L^*}(1)$, i.e. au complexe L^*, donc le complexe $FQ_{X^*(1)}$ est homotope au complexe FQ_{L^*}, donc aussi au complexe X^*. Donc l'assertion 1) entraîne l'assertion 4), et la proposition est démontrée.

Je vais utiliser ce résultat pour préciser un théorème de Webb (cf.[**8**] Theorem 1) dans un cas particulier. Pour cela, j'ai besoin d'une notation: si le groupe G opère sur l'ensemble X, alors X peut-être décomposé en orbites par G, qui sont des ensembles de la forme G/H. Alors si M est un foncteur de Mackey, Webb note M_X le foncteur de Mackey défini par

$$M_{X \coprod Y} = M_X + M_Y \qquad M_{G/H} = \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G M$$

D'autre part, si Δ est un complexe simplicial, alors Δ_i désigne l'ensemble des simplexes de Δ de dimension i (ou de cardinal $i+1$). Le théorème de Webb est alors le suivant:

Théorème 7.12. *(Webb): Soit Δ un complexe simplicial sur lequel opère le groupe G. Soient $Y \subset X$ des ensembles de sous-groupes de G fermés pour l'inclusion et stables par G. Alors si*

1. *Pour tout simplexe s de Δ, les sommets de s sont dans des orbites différentes par G.*
2. *Le foncteur M est projectif par rapport à X.*
3. *Pour tout $H \in X - Y$, le complexe Δ^H est contractile.*
4. *Pour tout $H \in Y$, le module $M(H)$ est nul.*

il existe une suite exacte et scindée de foncteurs de Mackey

$$0 \to M \to M_{\Delta_0} \to \ldots \to M_{\Delta_i} \to \ldots \to 0$$

Je vais m'intéresser ici au cas où X est l'ensemble des p-sous-groupes de G, et $Y = (1)$. Alors un foncteur de Mackey projectif par rapport à X est un foncteur dans $Mack_k(G,1)$. En notant $C_i(\Delta)$ le kG-module de base Δ_i,

Proposition 7.13. *Soit M un foncteur de Mackey dans $Mack_k(G,1)$, et Δ un complexe simplicial sur lequel opère G. Si:*

1. *Pour tout simplexe s de Δ, les sommets de s sont dans des orbites différentes par G,*
2. *Pour tout p-sous-groupe P d'ordre p de G, le complexe Δ^P est acyclique modulo p,*

Alors le complexe

$$0 \to M \to M_{\Delta_0} \to \ldots \to M_{\Delta_i} \to \ldots \to 0$$

est homotope au complexe

$$0 \to FQ_{M(1)} \to FQ_{M(1)\otimes C_0(\Delta)} \to \ldots \to FQ_{M(1)\otimes C_i(\Delta)} \to \ldots \to 0$$

Pour démontrer cette proposition, je vais appliquer la proposition 7.11 au complexe b^*

$$0 \to (b_p) \to (b_p)_{\Delta_0} \to \ldots \to (b_p)_{\Delta_i} \to \ldots \to 0$$

où je note b_p le foncteur $z(f_1^G)b_G$. C'est un foncteur projectif dans $Mack_k(G,1)$, et comme le complexe ci-dessus est fini, il est nul en deux degrés consécutifs. La valeur en (1) de ce complexe est le complexe de chaines de Δ, qui est homotope à un complexe de modules projectifs par le corollaire de la proposition 7.9. La proposition 7.11 permet alors de conclure que le complexe b^* est homotope au complexe $FQ_{b^*(1)} = FQ_{C^*(\Delta)}$.

Mais pour tout foncteur de Mackey M dans $Mack_k(G,1)$, le foncteur $H(b_p, M)$ est identique au foncteur M. Alors le foncteur $H((b_p)_{\Delta_i}, M)$, égal à $H(b_p, M_{\Delta_i})$, est égal à M_{Δ_i}. Alors si N désigne le foncteur dual de M, le complexe

$$0 \leftarrow H((b_p), N) \leftarrow H((b_p)_{\Delta_0}, N) \leftarrow \ldots \leftarrow H((b_p)_{\Delta_i}, N) \leftarrow \ldots \leftarrow 0$$

est égal au complexe

$$0 \leftarrow N \leftarrow N_{\Delta_0} \leftarrow \ldots \leftarrow N_{\Delta_i} \leftarrow \ldots \leftarrow 0$$

et ce complexe est homotope au complexe $H(FQ_{C_*(\Delta)}, N)$. Il est clair d'autre part que pour tout kG-module V, le foncteur $H(FQ_V, N)$ est identique au foncteur $FP_{\mathrm{Hom}_k(V,N(1))}$. Comme le dual de ce foncteur est le foncteur $FQ_{\mathrm{Hom}_k(N(1),V)}$, est comme $\mathrm{Hom}(N(1), C_i(\Delta))$ est identique à $C_i(\Delta) \otimes M(1)$, le dual du complexe ci-dessus, qui est le complexe

$$0 \to M \to M_{\Delta_0} \to \ldots \to M_{\Delta_i} \to \ldots \to 0$$

est bien homotope au complexe

$$0 \to FQ_{M(1)} \to FQ_{M(1)\otimes C_0(\Delta)} \to \ldots \to FQ_{M(1)\otimes C_i(\Delta)} \to \ldots \to 0$$

ce qui prouve la proposition.

REMARQUE 7.14. L'hypothèse 1) n'intervient pas dans la démonstration, mais elle est nécessaire pour la construction du complexe considéré (cf.[**8**]).

References

1. Serge Bouc, *Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, et modules de Steinberg généralisés*, J. of Algebra **139** (1991), no. 2, 395–445.
2. Michel Broué, *On scott modules and p-permutation modules: an approach through the brauer morphism*, Proc.AMS **93** (1985), no. 3, 401–408.
3. Lluis Puig, *Pointed groups and construction of characters*, Math. Z. **176** (1981), 265–292.
4. Daniel Quillen, *Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups*, Adv. in Maths **28** (1978), no. 2, 101–128.
5. Jacques Thévenaz and Peter Webb, *Simple Mackey functors*, Proceedings of the 2nd International group theory conference Bressanone 1989, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 23, 1990, Serie II, pp. 299–319.
6. ———, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 6, 1865–1961.
7. Peter Webb, *Subgroup complexes*, The Arcata conference on representations of finite groups, vol. 47, AMS Proceedings of Symposia in pure mathematics, 1987.
8. ———, *A split exact sequence for Mackey functors*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 34–69.

S. BOUC, EQUIPE DES GROUPES FINIS, UFR DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS 7-DENIS DIDEROT, 2 PLACE JUSSIEU, 75251. PARIS CEDEX 05, FRANCE

E-mail address: bouc@mathp7.jussieu.fr