CONSTRUCTION DE FONCTEURS ENTRE CATEGORIES DE G-ENSEMBLES

Serge Bouc

1 Le produit $\circ_G$

1.1 Définition

Les groupes et les ensembles considérés ici sont supposés finis. Si G est un groupe, soit G-**ens** la catégorie des G-ensembles, i.e. des ensembles dotés d'une action du groupe G. Cette catégorie est l'une des plus simples parmi les catégories de représentations du groupe G.

Si H est un autre groupe, il est naturel d'étudier les foncteurs de G-**ens** dans H-**ens** pour en déduire certaines ressemblances entre G et H. Je me restreindrai ici aux foncteurs F de G-**ens** dans H-**ens** possédant les deux propriétés suivantes:

1. Le foncteur F commute aux réunions disjointes: si X et Y sont deux G-ensembles, soient i_X et i_Y les injections de X et Y dans la réunion disjointe $X \coprod Y$. L'hypothèse est alors que l'application $F(i_X) \coprod F(i_Y)$ de $F(X) \coprod F(Y)$ dans $F(X \coprod Y)$ est une bijection, quels que soient X et Y.

2. Le foncteur F commute aux diagrammes cartésiens ("pull-back"): si

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\gamma} & Y \\ \delta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ Z & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

   est un diagramme cartésien (i.e. si T est la limite projective du système formé par Y, Z et X), alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(T) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(Y) \\ F(\delta) \downarrow & & \downarrow F(\alpha) \\ F(Z) & \xrightarrow{F(\beta)} & F(X) \end{array}$$

   est un diagramme cartésien.

Ces conditions expriment aussi le fait que F commute avec certaines limites inductives et projectives finies. Elles apparaissent naturellement lorque l'on cherche quels foncteurs de G-**ens** dans H-**ens** produisent par composition des foncteurs entre les catégories de foncteurs de Mackey correspondantes.

Il est possible de classifier complètement les foncteurs de G-**ens** dans H-**ens** possédant ces deux propriétés: ils sont associés à un ensemble A muni d'une double action, ou H-ensemble-G (le groupe H agit à gauche, le groupe G agit à droite, et ces deux actions commutent au sens où $h.(a.g) = (h.a).g$ pour tout $g \in G$, $a \in A$, $h \in H$). Alors si K est un troisième groupe, la composition des foncteurs induit un produit sur les ensembles munis d'une double action, défini de la façon suivante:

Soient G, H, K trois groupes. Soit A un H-ensemble-G, et B un K-ensemble-H. Si $b \in B$ (resp. $a \in A$), je note ${}_bH$ (resp. H_a) son stabilisateur à droite (resp. à gauche) dans H, et $b.H$ ou bH (resp. $H.a$ ou Ha) son orbite par H. Je note aussi B/H (resp. $H\backslash A$) l'ensemble des orbites de H.
Le groupe H agit à droite sur l'ensemble des couples (b, a) tels que ${}_bH.a \subseteq a.G$ par $(b, a).h = (b.h, h^{-1}.a)$: en effet si ${}_bH.a \subseteq a.G$, alors

$$_{b.h}H.h^{-1}.a = h^{-1}.{}_bHh.h^{-1}.a = h^{-1}.{}_bH.a \subseteq h^{-1}a.G$$

Je pose alors

$$B \circ_H A = \{(b, a) \in B \times A \mid {}_bH.a \subseteq a.G\}/H$$

C'est un K-ensemble-G par

$$k.(b, a)H.g = (k.b, a.g)H$$

En effet si ${}_bH.a \subseteq a.G$, alors

$$_{k.b}H.a.g = {}_bH.a.g \subseteq a.Gg = a.G = a.g.G$$

Cette construction est fonctorielle en A: si f est un morphisme de H-ensembles-G de A dans A', soit $B \circ_H f$ l'application définie par

$$(B \circ_H f)((b, a)H) = (b, f(a))H$$

C'est une application de $B \circ_H A$ dans $B \circ_H A'$: si ${}_bH.a \subseteq a.G$, alors

$$_bH.f(a) = f({}_bH.a) \subseteq f(a.G) = f(a).G$$

En particulier, si A est un H-ensemble-G, je lui associe un foncteur $A \circ_G -$ de G-**ens** dans H-**ens**, défini ainsi: si X est un G-ensemble, ou G-ensemble-$\{1\}$, alors je peux construire $A \circ_G X$, qui est un H-ensemble-$\{1\}$, ou H-ensemble. De même, si f est un morphisme du G-ensemble X dans le G-ensemble Y,alors $A \circ_G f$ est un morphisme du H-ensemble $A \circ_G X$ dans le H-ensemble $A \circ_G Y$.
Remarque: Comme l'orbite à droite de $x \in X$ par le groupe trivial est réduite à x, l'ensemble $A \circ_G X$ n'est autre que le quotient de l'ensemble des couples $(a, x) \in A \times X$ tels que ${}_aG \subseteq G_x$ par l'action de G.

1.2 Classification de foncteurs

Avec ces définitions, je peux énoncer plus précisément les considérations précédentes:

Théorème 1: Soient G et H des groupes (finis), et F un foncteur de G-ens dans H-ens possédant les propriétés 1) et 2). Alors il existe un H-ensemble-G unique E_F, tel que F soit isomorphe au foncteur $E_F \circ_G -$. Inversement, si A est un H-ensemble-G, alors le foncteur $A \circ_G -$ de G-ens dans H-ens possède les propriétés 1) et 2).

Je démontrerai d'abord la seconde assertion.

1.2.1 La seconde assertion

Elle est facile à vérifier: soit A un H-ensemble-G. Il est clair que le foncteur $A \circ_G -$ commute aux réunions disjointes. De plus, si

$$\begin{array}{ccccc} & & \gamma & & \\ & T & \rightarrow & Y & \\ \delta & \downarrow & & \downarrow & \alpha \\ & & \beta & & \\ & Z & \rightarrow & X & \end{array}$$

est un diagramme cartésien, je dois montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & A \circ_G \gamma & & \\ & A \circ_G T & \rightarrow & A \circ_G Y & \\ A \circ_G \delta & \downarrow & & \downarrow & A \circ_G \alpha \\ & & A \circ_G \beta & & \\ & A \circ_G Z & \rightarrow & A \circ_G X & \end{array}$$

l'est aussi. Or si $(a, y) \in A \circ_G Y$ et $(b, z) \in A \circ_G Z$ sont tels que

$$A \circ_G \alpha((a, y)) = A \circ_G \beta((b, z)) \text{ dans } A \circ_G X$$

alors $(a, \alpha(y)) = (b, \beta(z))$ dans $A \circ_G X$, et il existe $g \in G$ tel que $ag = b$ et $g^{-1}\alpha(y) = \alpha(g^{-1}y) = \beta(z)$. Alors il existe $t \in T$ unique tel que $g^{-1}y = \gamma(t)$ et $z = \delta(t)$. L'élément (b, t) est dans $A \circ_G T$: en effet, si $x \in G$ est tel que $b.x = b$, alors comme $(b, z) \in A \circ_G Z$, j'ai aussi $x.z = z$, donc $\delta(x.t) = \delta(t)$. D'autre part, j'ai aussi $a.gx = a.g$, soit $a.{}^g x = a$, et comme $(a, y) \in A \circ_G Y$, j'ai aussi ${}^g x.y = y$, ou encore $x.g^{-1}y = g^{-1}y$, soit $\gamma(xt) = \gamma(t)$. L'unicité de t impose alors $x.t = t$, et $(b, t) \in A \circ_G T$.

De plus, j'ai bien

$$A \circ_G \gamma((b, t)) = (b, \gamma(t)) = (ag, g^{-1}y) = (a, y)$$

et

$$A \circ_G \delta((b,t)) = (b, \delta(t)) = (b, z)$$

Inversement, si $(b', t') \in A \circ_G T$ est tel que $A \circ_G \gamma((b',t')) = A \circ_G \gamma((b,t))$ et $A \circ_G \delta((b',t')) = A \circ_G \delta((b,t))$, alors il existe s et s' dans G tels que

$$b' = bs \ , \ s^{-1}\gamma(t) = \gamma(t') \ , \ b' = bs' \ , \ s'^{-1}\delta(t) = \delta(t')$$

Alors posant $u = ss'^{-1}$, j'ai $bu = b$ et $s = us'$. Comme $(b,t) \in A \circ_G T$, j'ai aussi $ut = t$, et alors

$$\delta(t) = \delta(ut) = u\delta(t) = u\delta(s't') = \delta(us't') = \delta(st')$$

Comme $\gamma(t) = \gamma(st')$, j'ai donc $t = st'$, et $(b', t') = (bs, s^{-1}t) = (b,t)$, et le diagramme ci-dessus est cartésien.

1.2.2 Réduction au cas transitif

Notation: Je noterai pt l'ensemble réduit à un élément, sur lequel G opère (trivialement). Je suppose donné un foncteur F de G-**ens** dans H-**ens** possédant les propriétés 1) et 2). Alors $F(pt)$ est un H-ensemble, et je vais me ramener au cas où il est transitif.
Soient F_1 et F_2 des foncteurs de G-**ens** dans H-**ens**. Je peux définir leur réunion disjointe $F = F_1 \coprod F_2$ en posant pour tous G-ensembles X et Y et tout morphisme ϕ de X dans Y

$$F(X) = F_1(X) \coprod F_2(X)$$

$$F(\phi) = F_1(\phi) \coprod F_2(\phi)$$

Il est alors facile de voir que si F_1 et F_2 possèdent les propriétés 1) et 2), il en est de même de F.

Ceci étant, si X est un G-ensemble, il existe un unique morphisme p_X de X dans pt. Alors si ω est une orbite de H sur $F(pt)$, et X un G-ensemble, soit $F_\omega(X)$ l'image réciproque de ω dans $F(X)$ par $F(p_X)$. L'ensemble $F_\omega(X)$ est un sous-H-ensemble de $F(X)$, car si $F(p_X)(u) \in \omega$, alors $h.F(p_X)(u) = F(p_X)(h.u) \in \omega$. De plus, si Y est un G-ensemble, et f un morphisme de X dans Y, alors puisque $p_Y.f = p_X$, j'ai $F(p_Y).F(f) = F(p_X)$, et $F(f)(F_\omega(X)) \subseteq F_\omega(Y)$.
En notant $F_\omega(f)$ la restriction de $F(f)$ à $F_\omega(X)$, je définis un foncteur F_ω de G-**ens** dans H-**ens**, et le foncteur F est réunion disjointe des foncteurs F_ω, lorsque ω décrit $H\backslash F(pt)$. Si je montre que F_ω possède les propriétés 1) et 2), je pourrai alors supposer que $F(pt)$ est un H-ensemble transitif.

Soient donc X et Y des G-ensembles. Les injections i_X et i_Y de X et Y dans $X \coprod Y$ sont telles que $F(i_X) \coprod F(i_Y)$ est une bijection de $F(X) \coprod F(Y)$ dans $F(X \coprod Y)$. La propriété 1) pour les F_ω résulte alors du fait que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_\omega F_\omega(X) \coprod \coprod_\omega F_\omega(Y) & \rightarrow & F(X) \coprod F(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_\omega F_\omega(X \coprod Y) & \rightarrow & F(X \coprod Y) \end{array}$$

les flèches horizontales et la flèche verticale de droite sont des bijections. Il en est donc de même de la flèche de gauche.
La propriété 2) résulte quant à elle du fait que dans le diagramme

$$\begin{array}{cccc} & F(T) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(Y) & \\ F(\delta) & \downarrow & & \downarrow & F(\alpha) \\ & F(Z) & \xrightarrow{F(\beta)} & F(X) & \end{array}$$

si $x \in F_\omega(X) \subseteq F(X)$, si $y \in F(Y)$ et $z \in F(Z)$ sont tels que

$$F(\alpha)(y) = F(\beta)(z) = x$$

alors $F(p_X)(x) = F(p_Y)(y) = F(p_Z)(z) \in \omega$, donc que x, y et z sont dans $F_\omega(X)$, $F_\omega(Y)$, et $F_\omega(Z)$ respectivement. De plus il existe alors $t \in F(T)$ unique tel que $y = F(\gamma)(t)$ et $z = F(\delta)(t)$. Le même raisonnement montre que $t \in F_\omega(T)$, et que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & F_\omega(T) & \xrightarrow{F_\omega(\gamma)} & F_\omega(Y) & \\ F_\omega(\delta) & \downarrow & & \downarrow & F_\omega(\alpha) \\ & F_\omega(Z) & \xrightarrow{F_\omega(\beta)} & F_\omega(X) & \end{array}$$

est cartésien.

1.2.3 Sous-groupes minimaux

Si $F(G/G) = F(pt)$ est vide, l'existence du morphisme $F(p_X)$ de $F(X)$ dans $F(pt)$ prouve que $F(X)$ est vide pour tout X, et dans ce cas F est isomorphe à $\emptyset \circ_G -$.
Je peux donc supposer que $F(pt)$ est un H-ensemble transitif non-vide, donc isomorphe à H/L, pour un sous-groupe L convenable de H. Dans ces conditions, un *sous-groupe minimal pour* F sera par définition un sous-groupe K de G minimal tel que $F(G/K) \neq \emptyset$.

Si X est un G-ensemble, et K un sous-groupe de G, alors l'ensemble des homomorphismes de G-ensembles de G/K dans X s'identifie à l'ensemble X^K des points fixes de K sur X, par l'application qui à $x \in X^K$ associe le morphisme m_x défini par

$$m_x(yK) = yx$$

En particulier, l'ensemble des endomorphismes de G/K s'identifie à $N_G(K)/K$. Si $n \in N_G(K)$, je noterai aussi m_n l'endomorphisme de G/K qui s'en déduit. Alors pour $n \in N_G(K)$ et $x \in X$, j'ai

$$m_{nx}(yK) = ynx = m_x(ynK) = m_x m_n(yK)$$

c'est-à-dire

$$m_{nx} = m_x m_n$$

En particulier, si $x \in X^K$, le couple (x, K) est un point fixe de K sur l'ensemble $X \times G/K$, et j'ai une application $m_{(x,K)}$ de G/K dans $X \times G/K$, définie par

$$m_{(x,K)}(yK) = (yx, yK)$$

Avec ces notations:

Lemme 1: Soient G et H des groupes, et F un foncteur (non-vide) de G-ens dans H-ens possédant les propriétés 1) et 2), tel que $F(pt)$ soit un H-ensemble transitif. Soit K un sous-groupe minimal pour F, et X un G-ensemble. Alors l'application ϕ_X de $X^K \times F(G/K)$ dans $F(X \times G/K)$ définie par

$$\phi_X((x, u)) = F(m_{(x,K)})(u)$$

est un isomorphisme de H-ensembles, l'action de H sur X^K étant triviale.

Pour prouver ce lemme, je remarque que les foncteurs $X \mapsto X^K \times F(G/K)$ et $X \mapsto F(X \times G/K)$ commutent aux réunions disjointes si F possède la propriété 1), et il suffit donc de supposer que X est un G-ensemble transitif, de la forme G/K', pour un sous-groupe K' de G.
Dans ces conditions, j'ai un isomorphisme

$$G/K' \times G/K \approx \coprod_{x \in K \backslash G/K'} G/(K \cap {}^xK')$$

défini (de droite à gauche) par les applications

$$y(K \cap {}^xK') \in G/(K \cap {}^xK') \overset{m_{(xK',K)}}{\mapsto} (yxK', yK) \in G/K' \times G/K$$

De plus, comme K est minimal pour le foncteur F, l'ensemble $F(G/(K \cap {}^xK'))$ est vide si $K \not\subseteq {}^xK'$, i.e. si xK' n'est pas un point fixe de K sur G/K'. L'image par F de l'isomorphisme ci-dessus est alors l'isomorphisme $\coprod_{x \in (G/K')^K} F(m_{(xK',K)})$ de $\coprod_{x \in (G/K')^K} F(G/K) \approx (G/K')^K \times F(G/K)$ dans $F(G/K' \times G/K)$. D'où le lemme.

Comme F possède la propriété 2), l'image par F du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & X \times G/K & \xrightarrow{p_2} & G/K & \\ p_1 & \downarrow & & \downarrow & p_{G/K} \\ & X & \xrightarrow{p_X} & pt & \end{array}$$

est le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & F(X \times G/K) & \xrightarrow{F(p_2)} & F(G/K) & \\ F(p_1) & \downarrow & & \downarrow & F(p_{G/K}) \\ & F(X) & \xrightarrow{F(p_X)} & F(pt) & \end{array}$$

L'application λ de $X^K \times F(G/K)$ dans $F(X)$ composée de $F(p_1)$ avec l'isomorphisme ϕ_X du lemme ci-dessus est donnée par

$$\lambda((x,u)) = F(p_1)(F(m_{(x,K)})(u)) = F(p_1 m_{(x,K)})(u)$$

et de plus

$$p_1 m_{(x,K)}(yK) = p_1(yx, yK) = yx = m_x(yK)$$

ce qui prouve que

$$\lambda((x,u)) = F(m_x)(u)$$

L'application μ de $X^K \times F(G/K)$ dans $F(G/K)$ composée de $F(p_2)$ avec l'isomorphisme ϕ_X est donnée par

$$\mu(x,u)) = F(p_2)(F(m_{(x,K)}(u)) = F(p_2 m_{(x,K)})(u)$$

et

$$p_2 m_{(x,K)}(yK) = p_2(yx, yK) = yK$$

donc

$$\mu((x,u)) = F(Id)(u) = u$$

et μ n'est autre que la seconde projection.

J'en déduis le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} & X^K \times F(G/K) & \xrightarrow{\mu} & F(G/K) & \\ \lambda & \downarrow & & \downarrow & F(p_{G/K}) \\ & F(X) & \xrightarrow{F(p_X)} & F(pt) & \end{array}$$

Alors $X^K \times F(G/K)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(a,b) \in F(G/K) \times F(X)$ tels que $F(p_{G/K})(a) = F(p_X)(b)$. Cette remarque permet le calcul du cardinal

$$|X^K \times F(G/K)| = \sum_{w \in F(pt)} |F(p_X)^{-1}(w)||F(p_{G/K})^{-1}(w)|$$

De plus $|F(p_X)^{-1}(w)|$ et $|F(p_{G/K})^{-1}(w)|$ sont indépendants de $w \in F(pt)$ car ils sont invariants par H qui est transitif sur $F(pt)$. Donc pour $w \in F(pt)$, j'ai

$$|X^K \times F(G/K)| = |F(pt)||F(p_X)^{-1}(w)||F(p_{G/K})^{-1}(w)|$$

De plus

$$|F(G/K)| = |F(pt)||F(p_{G/K})^{-1}(w)| \text{ et } |F(X)| = |F(pt)||F(p_X)^{-1}(w)|$$

Il en résulte que

$$|X^K||F(G/K) = \frac{|F(X)||F(G/K)|}{|F(pt)|}$$

et comme $F(G/K)$ est non-vide par hypothèse, il vient

$$|F(X)| = |X^K||F(pt)|$$

Cette égalité entraîne en particulier que le groupe K est unique à conjugaison près par G: en effet, si K' est un sous-groupe tel que $F(G/K') \neq \emptyset$, alors $(G/K')^K \neq \emptyset$, et $K \subseteq_G K'$.

1.2.4 Existence de E_F

Exprimant à présent le fait que le diagramme précédent est cartésien, j'en déduis que l'application $\lambda \times \mu$ de $X^K \times F(G/K)$ dans l'ensemble des couples $(v,u) \in F(X) \times F(G/K)$ tels que $F(p_X)(v) = F(p_{G/K})(u)$ est bijective.
En particulier si (x,u) et (x',u') sont deux couples de $X^K \times F(G/K)$ qui ont même image par λ et μ, ils sont égaux. Donc si

$$(F(m_x)(u), u) = (F(m_{x'})(u'), u')$$

alors $u = u'$ et $x = x'$. Ceci revient à dire que l'application $x \mapsto F(m_x)(u)$ est une injection de X^K dans $F(X)$, ce pour tout $u \in F(G/K)$.
De même, si $(v,u) \in F(X) \times F(G/K)$ est tel que $F(p_X)(v) = F(p_{G/K})(u)$, alors il existe $(x,w) \in X^K \times F(G/K)$ tel que $v = F(m_x)(w)$ et $u = w$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in X^K$ tel que $v = F(m_x)(u)$.

Soit alors $u \in F(G/K)$ fixé et

$$L_u = \{(h,n) \in H \times N_G(K) \mid hu = F(m_n)(u)\}$$

L'ensemble L_u est un sous-groupe de $H\times G$: en effet si (h,n) et (h',n') sont dans L_u, alors

$$h'hu = h'F(m_n)(u) = F(m_n)(h'u) = F(m_n)F(m_{n'})(u) = F(m_{n'n})(u)$$

Je peux alors considérer $(H\times G)/L_u$ comme un H-ensemble-G, et définir une application θ_X de $(H\times G)/L_u \circ_G X$ dans $F(X)$ de la façon suivante: l'élément $((h,g)L_u,x)$ de $(H\times G)/L_u\circ_G X$ est égal à $((h,1)L_u.g^{-1},x) = ((h,1)L_u,g^{-1}x)$. Ce dernier est dans $(H\times G)/L_u\circ_G X$ si $g^{-1}x$ est invariant par le stabilisateur de $(h,1)L_u$ dans G. Ce stabilisateur est égal à

$$k_2(L_u) = \{g\in G \mid (1,g)\in L_u\}$$

Mais $(1,g)\in L_u$ si et seulement si $F(m_g)(u) = u = F(m_1)(u)$. Comme l'application qui à $g\in (G/K)^K = N_G(K)/K$ associe $F(m_g)(u)$ est injective, il en résulte que $g=1$ dans $N_G(K)/K$, i.e. que $g\in K$. Donc $k_2(L_u)=K$.

Alors $((h,g)L_u,x)$ est dans $(H\times G)/L_u\circ_G X$ si et seulement si $g^{-1}x$ est dans X^K. Je peux alors considérer le morphisme $m_{g^{-1}x}$ de G/K dans X et poser

$$\theta_X(((h,g)L_u,x)) = hF(m_{g^{-1}x})(u)$$

Je dois vérifier d'abord que cette application est bien définie: si $g'\in G$, alors

$$\theta_X(((h,g)L_ug'^{-1},g'x)) = \theta_X(((h,g'g)L_u,g'x)) = \ldots$$

$$\ldots = hF(m_{(g'g)^{-1}g'x})(u) = hF(m_{g^{-1}x})(u)$$

De même, si $(l,n)\in L_u$, alors

$$hlF(m_{(gn)^{-1}x})(u) = hF(m_{n^{-1}g^{-1}x})(lu) = hF(m_{g^{-1}x})F(m_{n^{-1}})(lu) =$$

$$= hF(m_{g^{-1}x})F(m_{n^{-1}})F(m_n)(u) = hF(m_{g^{-1}x})(u)$$

L'application θ_X est injective, car si deux éléments $((h,g)L_u,x)$ et $((h',g')L_u,x')$ de $(H\times G)/L_u\circ_G X$ ont même image par θ_X, je peux supposer $g=g'=1$, et alors

$$hF(m_x)(u) = h'F(m_{x'})(u)$$

En prenant l'image par $F(p_X)$, il en résulte que

$$F(p_{G/K})(hu) = F(p_{G/K})(h'u)$$

Alors il existe $n\in (G/K)^K = N_G(K)/K$ tel que $h'u = F(m_n)(hu)$, ce qui revient à dire que $(h^{-1}h',n)\in L_u$. Alors $(h,1)L_u = (h,1)(h^{-1}h',n)L_u = (h',n)L_u$ et dans $(H\times G)/L_u\circ_G X$

$$((h,1)L_u,x) = ((h',1)L_u,n^{-1}x)$$

Alors j'ai $h'F(m_{x'})(u) = h'F(m_{n^{-1}x})(u)$, donc $F(m_{x'})(u) = F(m_{n^{-1}x})(u)$ et $x' = n^{-1}x$ puisque l'application $x \mapsto F(m_x)(u)$ est injective. Il s'ensuit que dans $(H \times G)/L_u \circ_G X$, j'ai $((h,1)L_u, x) = ((h',1)L_u, x')$, et θ_X est injective.

Pour démontrer qu'elle est surjective, il suffit alors de montrer que les ensembles $(H \times G)/L_u \circ_G X$ et $F(X)$ ont même cardinal, ce qui résultera du lemme suivant:

Lemme 2: Soient G et H des groupes, et L un sous-groupe de $H \times G$. Si X est un G-ensemble, alors $X^{k_2(L)}$ a une structure naturelle de $p_1(L)$-ensemble, et $(H \times G)/L \circ_G X$ s'identifie à $\mathrm{Ind}_{p_1(L)}^H X^{k_2(L)}$

En particulier, ce lemme entraîne que

$$|(H \times G)/L_u \circ_G X| = [H : p_1(L_u)]|X^K|$$

et comme $|F(X)| = |F(pt)||X^K|$, il suffit pour prouver le lemme 1 de montrer que $|F(pt)| = [H : p_1(L_u)]$. Or si $h \in p_1(L_u)$, alors il existe $n \in N_G(K)/K$ tel que $hu = F(m_n)(u)$, et en prenant l'image par $F(p_{G/K})$ il en résulte que $hF(p_{G/K})(u) = F(p_{G/K})(u)$. Donc $p_1(L_u)$ est contenu dans le stabilisateur H_r de l'élément $r = F(p_{G/K})(u) \in F(pt)$.

Inversement, si $hr = r$, alors $F(p_{G/K})(hu) = F(p_{G/K})(u)$ et il existe $n \in (G/K)^K = N_G(K)/K$ tel que $hu = F(m_n)(u)$, donc tel que $(h,n) \in L_u$. Donc $p_1(L_u) = H_r$, et $H/p_1(L_u)$ s'identifie à H/H_r, c'est-à-dire à $F(pt)$, ce qui prouve que θ_X est une bijection.

Pour prouver le lemme 2, je définis d'abord une action de $p_1(L)$ sur l'ensemble $X^{k_2(L)}$: si $p \in p_1(L)$, alors il existe $q \in G$ tel que $(p,q) \in L$. Un tel q est bien défini modulo multiplication à droite par un élément de $k_2(L)$. Je pose alors pour $x \in X^{k_2(L)}$

$$p.x = qx$$

et cette égalité définit l'action cherchée.
L'application a de $\mathrm{Ind}_{p_1(L)}^H X^{k_2(L)}$ dans $(H \times G)/L \circ_G X$ qui à (h,x) associe $((h,1)L, x)$ est alors bien définie, car si $p \in p_1(L)$, il existe $q \in G$ tel que $(p,q) \in L$, et alors

$$\begin{aligned}((hp^{-1},1)L, p.x) = ((hp^{-1},1)L, qx) = ((hp^{-1},1)Lq, x) = \\ = ((hp^{-1},q^{-1})L, x) = ((h,1)L, x)\end{aligned}$$

Inversement, l'application b de $(H \times G)/L \circ_G X$ dans $\mathrm{Ind}_{p_1(L)}^H X^{k_2(L)}$ qui à $((h,1)L, x)$ associe (h,x) est également bien définie, car si $((h,1)L, x) = ((h',1)L, x')$, il existe $g \in G$ tel que $x' = gx$ et $(h',1)L = (h,1)Lg^{-1}$, i.e. $(h'^{-1}h, g) \in L$. Alors dans $\mathrm{Ind}_{p_1(L)}^H X^{k_2(L)}$, j'ai

$$(h', x') = (h', gx) = (h', h'^{-1}h.x) = (h'h'^{-1}h, x) = (h, x)$$

Il est alors clair que a et b sont des bijections inverses l'une de l'autre, et qu'elles sont compatibles avec l'action de H, ce qui prouve le lemme 2.

L'application θ_X est une bijection pour tout X, qui est clairement un morphisme de H-ensembles. Je dispose ainsi pour tout G-ensemble X d'un isomorphisme de H-ensembles de $(H \times G)/L_u \circ_G X$ dans $F(X)$. Ces isomorphismes sont en fait fonctoriels en X, et définissent un isomorphisme de foncteurs de $(H \times G)/L_u \circ_G -$ sur F: en effet, si Y est un G-ensemble, et f un morphisme de X dans Y. Je dois montrer que $F(f)\theta_X = \theta_Y(H \times G/L_u) \circ_G f$. Or

$$F(f)\theta_X((h,g)L_u, x)) = F(f)(hF(m_{g^{-1}x})(u)) = hF(fm_{g^{-1}x})(u)$$

De plus

$$fm_{g^{-1}x}(yK) = f(yg^{-1}x) = yg^{-1}f(x) = m_{g^{-1}f(x)}(yK)$$

donc $fm_{g^{-1}x} = m_{g^{-1}f(x)}$ et

$$F(f)\theta_X((h,g)L_u, x)) = hF(m_{g^{-1}f(x)})(u) = \theta_Y(((h,g)L, f(x))$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi tout foncteur F de G-**ens** dans H-**ens** ayant les propriétés 1) et 2) est la réunion disjointe de foncteurs de la forme $E_\omega \circ_G -$ pour $\omega \in H\backslash F(pt)$. Mais comme la réunion disjointe des foncteurs $A \circ_G -$ et $B \circ_G -$ est le foncteur $(A \coprod B) \circ_G -$, il existe un H-ensemble-G que je note E_F tel que F soit isomorphe à $E_F \circ_G -$.

1.2.5 Unicité de E_F

Pour démontrer l'unicité d'un tel ensemble E_F, il suffit d'indiquer un procédé qui en fonction du foncteur F isomorphe à $A \circ_G -$ redonne A comme H-ensemble-G à isomorphisme près.

Je commence par décomposer l'ensemble $F(pt)$ en ses orbites ω sous l'action de H. Pour chaque orbite ω, je choisis un sous-groupe K_ω de G minimal parmi les sous-groupes K de G tels que $\omega \subseteq F(p_{G/K})(F(G/K))$. Un tel sous-groupe est un sous-groupe minimal pour le foncteur F_ω, donc K_ω est bien déterminé à conjugaison près par G.

Je choisis ensuite u_ω dans $F(G/K_\omega)$, qui s'envoie dans ω par $F(p_{G/K})$. Je pose enfin

$$L_\omega = \{(h,n) \in H \times N_G(K_\omega) \mid hu_\omega = F(m_n)(u_\omega)\}$$

A conjugaison près par $H \times G$, le groupe L_ω ne dépend pas des choix de K_ω et u_ω: si je change K_ω en K_ω^g, j 'ai l'isomorphisme $m_g : xK_\omega \mapsto xgK_\omega^g$ de G/K_ω sur G/K_ω^g, donc l'isomorphisme $F(m_g)$ de $F(G/K_\omega)$ sur $F(G/K_\omega^g)$. Alors si l'élément $v_\omega \in F(G/K_\omega^g)$ s'envoie dans ω par $F(p_{G/K_\omega^g})$, je peux écrire $v_\omega = F(m_g)(u'_\omega)$, pour $u'_\omega \in F(G/K_\omega)$. Alors $F(p_{G/K_\omega})(u'_\omega)$ et $F(p_{G/K_\omega})(u_\omega)$ sont dans ω, et il existe $h_0 \in H$ tel que

$$h_0 F(p_{G/K_\omega})(u_\omega) = F(p_{G/K_\omega})(h_0 u_\omega) = F(p_{G/K_\omega})(u'_\omega)$$

Alors il existe $n_0 \in N_G(K)$ tel que

$$u'_\omega = F(m_{n_0})(h_0 u_\omega)$$

Par suite, si $(h, n^g) \in H \times N_G(K^g_\omega)$ est tel que

$$hv_\omega = F(m_{n^g})(v_\omega)$$

j'ai

$$hF(m_g)F(m_{n_0})(h_0 u_\omega) = F(m_{n^g})F(m_g)F(m_{n_0})(h_0 u_\omega)$$

ou encore

$$h^{h_0}F(m_g m_{n_0})(u_\omega) = F(m_{n^g} m_g m_{n_0})(u_\omega)$$

ce qui donne

$$h^{h_0}u_\omega = F(m_{(n_0 g)^{-1}} m_{n_0 g n^g})(u_\omega) = F(m_{n_0 g n^g (n_0 g)^{-1}})(u_\omega) = F(m_{^{n_0}n})(u_\omega)$$

donc que $(h^{h_0}, {}^{n_0}n) \in L_\omega$.

Le groupe L_ω est donc bien déterminé à conjugaison près, et le H-ensemble-G

$$B = \coprod_{\omega \in H \backslash F(pt)} (H \times G)/L_\omega$$

ne dépend que de F à isomorphisme près.

Si F' est un autre foncteur, et θ un isomorphisme de F sur F', alors l'ensemble B' obtenu par la construction précédente pour F' est isomorphe comme H-ensemble-G à B: en effet, l'application θ_{pt} est alors un isomorphisme de H-ensembles de $F(pt)$ sur $F'(pt)$, et je peux identifier les ensembles d'orbites $H \backslash F(pt)$ et $H \backslash F'(pt)$.

Pour faire la construction pour F' et l'orbite ω, je peux alors choisir $K'_\omega = K_\omega$ et $u'_\omega = \theta_{G/K_\omega}(u_\omega)$.

Si $(h, n) \in L'_\omega$, j'ai $hu'_\omega = F'(m_n)(u'_\omega)$, soit

$$h\theta_{G/K_\omega}(u_\omega) = F'(m_n)\theta_{G/K_\omega}(u_\omega)$$

et donc

$$hu_\omega = \theta^{-1}_{G/K_\omega} F'(m_n)\theta_{G/K_\omega}(u_\omega) = F(m_n)(u_\omega)$$

ce qui montre que $L'_\omega = L_\omega$.

Il me reste à voir que si F est le foncteur $A \circ_G -$, alors la construction précédente redonne A comme H-ensemble-G. Je peux pour cela supposer que A est de la forme $(H \times G)/L$, donc qu'il y a une seule orbite $\omega = (H \times G)/L \circ_G pt = H/p_1(L)$. Comme $(H \times G)/L \circ_G X$ est non-vide si et seulement si $X^{k_2(L)}$ est non-vide, je vois que $K_\omega = K = k_2(L)$. Alors si $u_\omega = ((1,1)L, K)$, si $h \in H$ et $n \in N_G(K)$, j'ai

$$hu_\omega = ((h,1)L, K) \text{ et } F(m_n)(u_\omega) = ((1,1)L, nK)$$

Donc $(h,n) \in L_\omega$ si et seulement si

$$((h,1)L, K) = ((1,1)L, nK)$$

i.e. s'il existe $g \in G$ tel que $(h,1)Lg^{-1} = (h,g)L = (1,1)L$ et $gK = nK$. Alors $(h,g) \in L$ et $(h,n) = (h,g)(1,g^{-1}n) \in L$ car $g^{-1}n \in K = k_2(L)$. Donc $L_\omega \subseteq L$. Inversement, si $(h,n) \in L$, alors

$$((h,1)L, K) = ((h,n)Ln, K) = ((1,1)L, nK)$$

et $L \subseteq L_\omega$, ce qui prouve le résultat annoncé, et termine la démonstration du théorème 1.

1.3 Le foncteur identité

Soit Id Le foncteur identité de G-**ens** dans G-**ens**. Ce foncteur possède évidemment les propriétés 1) et 2). Comme $Id(pt) = pt$, il y a une seule orbite ω. Comme $Id(G/K) = G/K$ est non-vide pour tout K, le groupe trivial est minimal pour Id. De plus $Id(G/1)$ est l'ensemble G sur lequel G agit à gauche. Je peux prendre $u_\omega = u = 1 \in G$. Alors $(h,n) \in L_\omega = L$ si et seulement si $(h,n) \in G \times G$ et $h.1 = n.1$. Le groupe L est donc la diagonale de $G \times G$, et l'ensemble E_{Id} est l'ensemble G sur lequel G opère à gauche et à droite. Il est d'ailleurs trivial de vérifier directement que si A est un H-ensemble-G, alors $A \circ_G G \approx A$ et $H \circ_H A \approx A$ comme H-ensembles-G.

1.4 Associativité

Il est clair d'autre part que si F et F' sont des foncteurs possédant les propriétés 1) et 2), et s'ils sont composables, alors le foncteur composé possède aussi ces propriétés. La proposition suivante montre que

$$E_F \circ_G (E_{F'} \circ_{G'} -) = (E_F \circ_G E_{F'}) \circ_{G'} -$$

et l'ensemble $E_{F \circ F'}$ associé à $F \circ F'$ est donc égal à $E_F \circ_G E_{F'}$:

Proposition 1: Soient G, H, K et L des groupes. Soit A un H-ensemble-G, soit B un K-ensemble-H, et C un L-ensemble-K. Alors

$$C \circ_K (B \circ_H A) \approx (C \circ_K B) \circ_H A$$

comme L-ensembles-G.

Si $b \in B$ et $a \in A$, et si ${}_bHa \subseteq aG$, je noterai $b \circ_H a$ la classe du couple (b,a) dans $B \circ_H A$.

Soit alors $c \circ_K (b \circ_H a) \in C \circ_K (B \circ_H A)$. Alors pour tout $k \in K$ tel que $ck = c$, il existe $g \in G$ tel que $k(b \circ_H a) = (b \circ_H a)g$. Donc il existe $h \in H$ tel que $kb = bh$

et $a = h^{-1}ag$.
Donc
$$\forall k \in K\ ck = c\ \exists g \in G, h \in H \text{ tels que } kb = bh\ ha = ag$$
En particulier, pour tout k tel que $ck = c$, il existe $h \in H$ tel que $kb = bh$, et je peux parler de $c \circ_K b \in C \circ_K B$.
De plus si $h \in H$ est tel que $(c \circ_K b)h = c \circ_K b$, alors il existe $k \in K$ tel que $ck = c$ et $k^{-1}bh = b$.
Mais comme $ck = c$, il existe $h' \in H$ et $g \in G$ tels que $bh' = kb$ et $h'a = ag$. Alors h s'écrit $h = \alpha h'$, avec $\alpha \in {}_bH$. Donc
$$ha = \alpha h'a = \alpha ag \subseteq aG$$
car $\alpha a \subseteq aG$, puisque $\alpha \in {}_bH$ et $b \circ_H a \in B \circ_H A$. Ce raisonnement prouve que ${}_{c\circ_K b}Ha \subseteq aG$, et je peux parler de $(c \circ_K b) \circ_H a \in (C \circ_K B) \circ_H A$. Il est clair que cet élément ne dépend que de $c \circ_K (b \circ_H a)$. J'ai ainsi défini une application $c \circ_K (b \circ_H a) \mapsto (c \circ_K b) \circ_H a$ de $C \circ_K (B \circ_H A)$ dans $(C \circ_K B) \circ_H A$.

Inversement, si $(c \circ_K b) \circ_H a \in (C \circ_K B) \circ_H A$, alors pour tout h tel que $(c \circ_K b)h = c \circ_K b$, il existe $g \in G$ tel que $ha = ag$. Donc pour tout h tel qu'il existe $k \in K$ avec $ck = c$ et $k^{-1}bh = b$, il existe un tel g.
$$\forall h \in H, \exists k \in K\ ck = c\ bh = kb\ \Rightarrow \exists g \in G\ ha = ag$$
Mais si $h \in H$ est tel que $bh = b$, alors il existe $k \in K$ tel que $ck = c$ et $bh = kb$, par exemple $k = 1$. Donc il existe $g \in G$ tel que $ha = ag$, et je peux parler de $b \circ_H a \in B \circ_H A$.
De plus, si $k \in K$ est tel que $ck = c$, alors comme $c \circ_K b \in C \circ_K B$, il existe $h \in H$ tel que $kb = bh$. Cet élément h est tel qu'il existe $k \in K$ avec $ck = c$ et $kb = bh$. Donc il existe $g \in G$ tel que $ha = ag$. Alors
$$k(b \circ_H a) = kb \circ_H a = bh \circ_H a = b \circ_H ha = b \circ_H ag = (b \circ_H a)g$$
ce qui prouve que $c \circ_K (b \circ_H a) \in C \circ_K (B \circ_H A)$, et il est clair que cet élément ne dépend que de $(c \circ_K b) \circ_H a$. D'où une application $(c \circ_K b) \circ_H a \mapsto c \circ_K (b \circ_H a)$ de $(C \circ_K B) \circ_H A$ dans $C \circ_K (B \circ_H A)$.

Les deux applications ainsi construites sont de façon évidente des bijections inverses l'une de l'autre. La proposition en découle.

1.5 Calcul des produits

Notation: Si L est un sous-groupe de $G \times H$, je note $p_1(L)$ (resp. $p_2(L)$) sa projection sur G (resp. H), et $k_1(L)$ (resp. $k_2(L)$) le groupe $p_1(L \cap (G \times \{1\}))$ (resp. $p_2(L \cap (\{1\} \times H))$).
Soient G, H, et K des groupes. Si B est un K-ensemble-H et A un H-ensemble-G, le produit $B \circ_H A$ est un sous-ensemble du produit $B \times_H A$, quotient de $B \times A$

par l'action de H. Si B est libre à droite (i.e. si ${}_bH = (1)$ pour tout $b \in B$), ou si A est transitif à droite (i.e. si G est transitif sur A), alors la condition ${}_bH.a \subseteq a.G$ est réalisée, et dans ce cas $B \circ_H A = B \times_H A$.

Si L est un sous-groupe de $K \times H$ et M un sous-groupe de $H \times G$, je vais calculer le produit

$$P = ((K \times H)/L) \circ_H ((H \times G)/M)$$

Soit $e = (k,h)L \circ_H (h',g)M \in P$. Je peux écrire

$$e = k(1,1)L \circ_H (h^{-1}h',1)Mg^{-1}$$

Chaque orbite de P sous l'action de $K \times G$ admet donc un représentant de la forme $(1,1)L \circ_H (h,1)M$, pour $h \in H$ convenable. Un autre élément $(1,1)L \circ_H (h',1)M$ de ce type est dans la même orbite si il existe $k \in K$, $g \in G$ et $x \in H$ tels que

$$((k,x)L, (xh,g)M) = ((1,1)L, (h',1)M)$$

donc $(k,x) \in L$, et $x \in p_2(L)$. De même, $(h'^{-1}xh, g) \in M$, et $h'^{-1}xh \in p_1(M)$, donc $h \in p_2(L)h'p_1(L)$. Inversement, si h s'écrit $xh'y$, avec $x \in p_2(L)$ et $y \in p_1(M)$, il existe $k \in K$ tel que $(k,x) \in L$ et $g \in G$ tel que $(y,g) \in M$, et alors

$$(1,1)L \circ_H (h,1)M = (1,1)L \circ_H (xh'y,1)M = \ldots$$
$$\ldots = (k,x)L \circ_H x(h',1)(y,g)M = k(1,1) \circ_H (h',1)Mg^{-1}$$

Je peux donc indexer les orbites de $K \times G$ par des doubles classes $p_2(L)hp_1(M)$. Le stabilisateur dans $K \times G$ de l'élément $(1,1)L \circ_H (h,1)M$ est l'ensemble des couples (k,g) tels que

$$k(1,1)L \circ_H (h,1)Mg^{-1} = (k,1)L \circ_H (h,g)M = (1,1)L \circ_H (h,1)M$$

Cela signifie qu'il existe $x \in H$ tel que $(k,x)L = (1,1)L$ et $(xh,g)M = (h,1)M$, ou encore $(k,x) \in L$ et $(x^h,g) \in M$, c'est à dire $(k,g) \in L *^{(h,1)} M$.
Les considérations ci dessus montrent que

$$((K \times H)/L) \times_H ((H \times G)/M) = \sum_{h \in p_2(L)\backslash H/p_1(M)} (K \times G)/(L *^{(h,1)} M)$$

De plus l'élément $(1,1)L \circ_H (h,1)M$ est dans P si et seulement si

$${}_{(1,1)L}H.(h,1)M \subseteq (h,1)M.G$$

Or $(1,1)L.x = (1,1)L$ si et seulement si $x \in k_2(L)$. Donc si $x \in k_2(L)$, il doit exister $g \in G$ tel que $(xh,1)M = (h,g)M$, ce qui revient à dire que $x^h \in p_1(M)$. Je dois donc avoir $k_2(L)^h \subseteq p_1(M)$, et finalement le produit P s'écrit

Proposition 2: (Formule de Mackey) Soient G, H et K des groupes. Si L est un sous-groupe de $K \times H$ et M un sous-groupe de $H \times G$, alors

$$((K \times H)/L) \circ_H ((H \times G)/M) = \sum_{\substack{h \in p_2(L)\backslash H/p_1(M) \\ k_2(L)^h \subseteq p_1(M)}} (K \times G)/(L *^{(h,1)} M)$$

2 L'anneau de Grothendieck

Soit G un groupe, et $\Gamma(G)$ le groupe de Grothendieck des G-ensembles-G, les relations étant données par les réunions disjointes. Alors $\Gamma(G)$ peut être muni d'une structure d'anneau, la multiplication étant donnée par le produit $\circ_G$.

2.1 Un sous-anneau de $\Gamma(G)$

Soient X et M des sous-groupes de G tels que $X \subseteq N_G(M)$. Je pose

$$\Delta_{X,M} = \{(a,b) \mid a \in X,\ ab^{-1} \in M\}$$

C'est un sous-groupe de G: en effet, si (a,b) et (a',b') sont dans $\Delta_{X,M}$, alors

$$aa'b'^{-1}b^{-1} = {}^{a}(a'b'^{-1}).ab^{-1}$$

est un élément de M si X normalise M.

De plus, la première projection de $\Delta_{X,M}$ est égale à X, car elle est contenue dans X, et d'autre part la diagonale de X est contenue dans $\Delta_{X,M}$. Il est clair de même que $k_1(\Delta_{X,M}) = X \cap M$.
De même, la seconde projection de $\Delta_{X,M}$ est égale à $X.M$, et $k_2(\Delta_{X,M}) = M$.

Je pose alors

$$t_{X,M} = (G \times G)/\Delta_{X,M}$$

et je note $\mathcal{T}(G)$ le sous-module de $\Gamma(G)$ engendré par les éléments $t_{X,M}$.
Remarque: L'élément $t_{X,M}$ ne dépend de (X,M) qu'à conjugaison près: si $x \in G$, j'ai $t_{X,M} = t_{X^x,M^x}$.
Le lemme suivant montre que $\mathcal{T}(G)$ est en fait un sous-anneau de $\Gamma(G)$:

Lemme 3: Soient (X,M) et (Y,N) des couples de sous-groupes de G, tels que $X \subseteq N_G(M)$ et $Y \subseteq N_G(N)$. Alors, pour tout $x \in G$ tel que $M^x \subseteq Y$, le groupe $X \cap {}^xY$ normalise le groupe $M.{}^xN$, et

$$t_{X,M} \circ_G t_{Y,N} = \sum_{\substack{x \in X\backslash G/Y \\ M^x \subseteq Y}} t_{X \cap {}^xY, M.{}^xN}$$

La première assertion est claire car $X \cap {}^xY$ normalise M et ${}^xN$, donc $M.{}^xN$, qui est un sous-groupe de G car $M \subseteq {}^xY \subseteq N_G({}^xN)$.

Je peux alors utiliser la formule de Mackey

$$t_{X,M} \circ_G t_{Y,N} = \sum_{\substack{x \in XM\backslash G/Y \\ M^x \subseteq Y}} (G \times G)/(\Delta_{X,M} * {}^{(x,1)}\Delta_{Y,N})$$

De plus, si $M^x \subseteq Y$, alors $XMxY = Xx.M^x.Y = XxY$, et je peux sommer sur x dans $X\backslash G/Y$. D'autre part

$$\Delta_{X,M} *^{(x,1)} \Delta_{Y,N} = \{(a,b) \mid \exists c,\ a \in X,\ ac^{-1} \in M,\ c^x \in Y,\ c^x.b^{-1} \in N\}$$

Dans ces conditions, l'élément a est dans $X \cap (M.{}^xY) = X \cap {}^xY$, car $M \subseteq {}^xY$, et $a.({}^xb)^{-1} = (ac^{-1})(c({}^xb)^{-1}) \in M.{}^xN$. Inversement, si $a \in X \cap {}^xY$ et $a.({}^xb)^{-1} \in M.{}^xN$, alors je peux écrire $a.({}^xb)^{-1} = m.{}^xn$, pour $m \in M$ et $n \in N$. Posant alors $c = m^{-1}a = {}^x(nb)$, j'ai bien $c \in {}^xY$ car $a \in {}^xY$ et $M \subseteq {}^xY$. De plus $a.c^{-1} = m \in M$, et $c^x.m^{-1} = n \in N$. Il en résulte que

$$\Delta_{X,M} *^{(x,1)} \Delta_{Y,N} = \Delta_{X \cap {}^xY, M.{}^xN}$$

ce qui prouve la formule annoncée.

2.2 Des idempotents orthogonaux

2.2.1 Projecteurs dans l'anneau de Burnside

Dans [BO1], j'introduisais des projecteurs dans l'anneau de Burnside du groupe G, associés à des familles $\underline{F}$ de sous-groupes de G ayant les propriétés suivantes:

1. La famille $\underline{F}$ est stable par conjugaison par G.
2. La famille $\underline{F}$ est stable par produit, i.e. si H et K sont dans $\underline{F}$, et si $H \subseteq N_G(K)$, alors $H.K \in \underline{F}$.
3. La famille $\underline{F}$ contient le groupe trivial.

Le projecteur associé au sous-groupe $P \in \underline{F}$, que je noterai ici π_P^G, était défini par

$$\pi_P^G(X) = \sum_{\substack{Q \in \underline{F} \\ Q \supseteq P \\ Q\ mod. N_G(P)}} \mathrm{Ind}_{N_G(P,Q)}^G \mu_F(P,Q).X^Q$$

où $\mu_F(P,Q)$ désignait l'invariant de Möbius, i.e. l'invariant de Lefschetz réduit de l'intervalle $]P,Q[_F$, vu comme élément de l'anneau de Burnside de $N_G(P,Q)$. Lorsque P décrit $\underline{F}/G$, les projecteurs π_P^G obtenus sont deux à deux orthogonaux et leur somme est l'endomorphisme identique de $b(G)$.

D'autre part, le produit $\circ_G$, étendu par linéarité, définit une application de $\Gamma(G)$ dans l'anneau d'endomorphismes de l'anneau de Burnside de G, par l'application

$$A \in \Gamma(G) \longmapsto (X \in b(G) \mapsto A \circ_G X \in b(G))$$

L'associativité du produit $\circ_G$ montre que j'ai en fait un morphisme d'anneaux de $\Gamma(G)$ dans $\mathrm{End}_Z(b(G))$. Une question naturelle est alors de savoir si les projecteurs ci-dessus proviennent d'idempotents de $\Gamma(G)$.

Je note tout d'abord que je peux réécrire le projecteur π_P^G sous la forme

$$\pi_P^G(X) = -\sum_{\substack{\inf s = P \\ s\, mod. N_G(P)}} (-1)^{|s|}\mathrm{Ind}_{N_G(s)}^G X^{\sup s}$$

où la somme porte sur des suites croissantes s d'éléments de $\underline{F}$ (ce que je noterai $s \in Sd(\underline{F})$), et $|s|$ désigne le cardinal de la suite s.

J'ai montré de plus que si L est un sous-groupe de $G \times G$, alors

$$(G \times G)/L \circ_G X = \mathrm{Ind}_{p_1(L)}^G X^{k_2(L)}$$

Je pose alors, pour $P \in \underline{F}$,

$$E_P^G = -\sum_{\substack{\inf s = P \\ s \in Sd(\underline{F})/N_G(P)}} (-1)^{|s|}(G \times G)/\Delta_{N_G(s),\sup s}$$

Comme $p_1(\Delta_{N_G(s),\sup s}) = N_G(s)$, et comme $k_2(\Delta_{N_G(s),\sup s}) = \sup s$, j'ai pour tout $X \in b(G)$

$$\pi_P^G(X) = E_P^G \circ_G X$$

et les E_P^G sont des candidats raisonnables pour les idempotents cherchés.

Remarque: Il est clair que E_P^G ne dépend que de la classe de conjugaison de P dans G: si $g \in G$, alors $E_P^G = E_{P^g}^G$.

2.2.2 Calcul de $E_P^G \circ_G (G \times H)/L$

Soit H un autre groupe, et L un sous-groupe de $G \times H$. Par la formule de Mackey, je peux écrire, en désignant par s une suite croissante d'éléments de $\underline{F}$, et en notant L_s le groupe $\Delta_{N_G(s),\sup s}$

$$E_P^G \circ_G (G \times H)/L = \dots$$

$$\dots = -\sum_{\substack{\inf s = P \\ x \in G \\ \sup s^x \subseteq p_1(L)}} \frac{|N_G(s)|}{|N_G(P)|}\frac{|(\sup s.N_G(s))^x \cap p_1(L)|}{|\sup s.N_G(s)||p_1(L)|}(-1)^{|s|}(G\times H)/(L_s *^{(x,1)} L)$$

Or

$$L_s *^{(x,1)} L = \{(a,b) \mid \exists c\ a \in N_G(s)\ ,\ a.c^{-1} \in \sup s\ ,\ (c^x, b) \in L\} = \dots$$

$$\dots = \{(a,b) \mid \exists c^x\ a^x \in N_G(s^x)\ ,\ a^x.(c^x)^{-1} \in \sup s^x\ ,\ (c^x, b) \in L\} = \dots$$

$$\dots = \{(a,b) \mid (a^x, b) \in L_{s^x} * L\} = {}^{(x,1)}(L_{s^x} * L)$$

De plus, comme sup $s^x \subseteq p_1(L)$, j'ai

$$(\sup\ s.N_G(s))^x \cap p_1(L) = \sup\ s^x.(N_G(s^x) \cap p_1(L))$$

Donc

$$|(\sup\ s.N_G(s))^x \cap p_1(L)| = \frac{|\sup\ s^x||N_G(s^x) \cap p_1(L)|}{|\sup\ s^x \cap N_G(s^x)|}$$

Comme

$$|\sup\ s.N_G(s)| = \frac{|\sup\ s||N_G(s)|}{|\sup\ s \cap N_G(s)|}$$

Il vient finalement, en sommant sur s^x

$$E_P^G \circ_G (G \times H)/L = - \sum_{\substack{x \in G \\ \inf\ s = P^x \\ \sup\ s \subseteq p_1(L)}} \frac{|N_{p_1(L)}(s^x)|}{|N_G(P)||p_1(L)|}(-1)^{|s|}(G \times H)/(L_s * L)$$

Notations: Si P et Q sont deux sous-groupes du groupe G, je noterai $T_G(P,Q)$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $P^x \subseteq Q$, et $\overline{T}_G(P,Q)$ le quotient $N_G(P)\backslash T_G(P,Q)/Q$. Si K est un sous-groupe de G, je note $\underline{F}(K)$ l'ensemble des sous-groupes de K qui sont dans F. Les conditions sur la famille $\underline{F}$ entraînent l'existence pour tout sous-groupe K de G, d'un plus grand sous-groupe normal de K qui soit dans $\underline{F}$, que je note $O_F(K)$.

Avec ces notations, je peux écrire

$$E_P^G \circ_G (G \times H)/L = - \sum_{x \in \overline{T}_G(P,p_1(L))} \sum_{\substack{\inf\ s = P^x \\ \sup\ s \subseteq p_1(L) \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x)}} (-1)^{|s|}(G \times H)/(L_s * L)$$

De plus

$$L_s * L = \{(a,b) \mid a \in N_G(s)\ ,\ \exists c,\ a.c^{-1} \in \sup\ s\ ,\ (c,b) \in L\}$$

Il est alors clair que sup s normalise $k_1(L)$, puisque sup $s \subseteq p_1(L)$, et en introduisant le groupe $\Omega_L = O_F(k_1(L))$, j'ai

$$L_s * L \subseteq \{(a,b) \mid a \in N_G(s)\ ,\ \exists c,\ \ a.c^{-1} \in \sup\ s.\Omega_L\ ,\ (c,b) \in L\}$$

Inversement, si $a.c^{-1} \in \sup\ s.\Omega_L$, alors il existe $u \in \sup\ s$ et $v \in \Omega_L$ tels que $a.c^{-1} = u.v$. En posant $c' = v.c$, j'ai alors $a.c'^{-1} = u \in \sup\ s$, et $(c',b) = (v,1)(c,b) \in L$. Donc

$$L_s * L = \{(a,b) \mid a \in N_G(s)\ ,\ \exists c,\ \ a.c^{-1} \in \sup\ s.\Omega_L\ ,\ (c,b) \in L\}$$

et je peux dans la somme donnant $E_P^G \circ_G (G\times H)/L$ regrouper les termes s pour lesquels sup $s.\Omega_L$ est un élément R donné de $\underline{F}(p_1(L))$, contenant $P^x.\Omega_L$. Il vient

$$E_P^G \circ_G (G\times H)/L = \ldots$$

$$= -\sum_{x\in \overline{T}_G(P,p_1(L))} \sum_{\substack{P^x.\Omega_L \subseteq R \subseteq p_1(L) \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x)}} \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s.\Omega_L = R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x,R)}} (-1)^{|s|}(G\times H)/(L_s * L)$$

Si K est un sous-groupe de $N_{p_1(L)}(P^x,R)$, alors

$$\Delta_{K,R} * L = \{(a,b)\in G\times H \mid a\in K,\ \ \exists c,\ a.c^{-1}\in R,\ (c,b)\in L\}$$

est un sous-groupe de $G\times H$. De plus, si $u \in N_{p_1(L)}(P^x,R)$, soit v tel que $(u,v)\in L$. Alors

$$\Delta_{K^u,R} * L = \{(a,b)\mid a\in K^u,\ \exists c,\ a.c^{-1}\in R,\ (c,b)\in L\} = \ldots$$

$$\ldots = \{(a,b)\mid a\in K^u\ \ \exists c,\ {}^u a.({}^u c)^{-1}\in R,\ ({}^u c, {}^v b)\in {}^{(u,v)}L = L\} = \ldots$$

$$\ldots = \{(a^u,b)\mid a\in K\ \ \exists c,\ a.c^{-1}\in R,\ (c, {}^v b)\in L\} = \{(a^u,b^v)\mid (a,b)\in \Delta_{K,R} * L\}$$

Donc $\Delta_{K^u,R} * L = (\Delta_{K,R} * L)^{(u,v)}$. Je peux alors définir une application λ de l'anneau de Burnside de $N_{p_1(L)}(P^x,R)$ dans celui de $G\times H$ en posant

$$\lambda(N_{p_1(L)}(P^x,R)/K) = (G\times H)/(\Delta_{K,R} * L)$$

Avec cette définition, j'ai

$$S = \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s.\Omega_L = R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x,R)}} (-1)^{|s|}(G\times H)/(L_s * L) = \ldots$$

$$\ldots = \lambda\Big(\sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s.\Omega_L = R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x,R)}} (-1)^{|s|} N_{p_1(L)}(P^x,R)/N_{p_1(L)}(s)\Big)$$

Remarque: Si inf $s = P^x$ et sup $s.\Omega_L = R$, j'ai bien $N_{p_1(L)}(s) \subseteq N_{p_1(L)}(P^x,R)$.

Or l'invariant de Lefschetz réduit de "l'intervalle semi-ouvert" $]P^x,R]_F$ des éléments de $\underline{F}(R)$ contenant strictement P est donné par

$$\tilde{\Lambda}_{]P^x,R]_F} = \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x,R)}} (-1)^{|s|} N_{p_1(L)}(P^x,R)/N_{p_1(L)}(s)$$

et il est nul si $P^x \neq R$. Soit $Z =]P^x, R]_F - \{Q \mid Q.\Omega_L = R\}$. Alors

$$\tilde{\Lambda}_Z = \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s.\Omega_L \neq R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x, R)}} (-1)^{|s|} N_{p_1(L)}(P^x, R)/N_{p_1(L)}(s)$$

et l'ensemble Z est $N_{p_1(L)}(P^x, R)$-contractile par les contractions $Q \mapsto Q.k_1(L) \mapsto P^x.k_1(L)$, si $\Omega_L \not\subseteq P^x$ et si $P^x.\Omega_L \neq R$.
Finalement, si $P^x \neq R$, si $\Omega_L \not\subseteq P^x$ et si $P^x.\Omega_L \neq R$, alors par différence

$$\tilde{\Lambda}_{]P^x,R]_F} - \tilde{\Lambda}_Z = 0 = \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s.\Omega_L = R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x, R)}} (-1)^{|s|} N_{p_1(L)}(P^x, R)/N_{p_1(L)}(s)$$

De plus, si $P^x = R$, alors $P^x.\Omega_L = R$. Et si $P^x.\Omega_L = R$ et $\inf s = P^x$, j'ai $\sup s.\Omega_L = R$ si et seulement si $\sup s \subseteq R$. Alors

$$S = \lambda(\sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s \subseteq R \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x, R)}} (-1)^{|s|} N_{p_1(L)}(P^x, R)/N_{p_1(L)}(s) = \lambda(\tilde{\Lambda}_{]P^x,R]_F}) = 0$$

si $P^x \neq R$.
Il ne reste donc que les cas où $P^x = R$ ou $P^x \supseteq \Omega_L$. Mais si $P^x = R$, alors $P^x \supseteq \Omega_L$. Finalement, la somme S est nulle, sauf si $\Omega_L \subseteq P^x$. Il vient

Lemme 4: Soit P un sous-groupe de G, et L un sous-groupe de $G \times H$. Alors

$$E_P^G \circ_G (G \times H)/L = - \sum_{\substack{x \in \overline{T}_G(P, p_1(L)) \\ O_F(k_1(L)) \subseteq P^x}} \sum_{\substack{\inf s = P^x \\ \sup s \subseteq p_1(L) \\ mod. N_{p_1(L)}(P^x)}} (-1)^{|s|} (G \times H)/(L_s * L)$$

et en particulier le produit est nul si $O_F(k_1(L))$ n'est contenu dans aucun conjugué de P.

2.2.3 Calcul de $(H \times G)/L \circ_G E_P^G$

Si à présent L est un sous-groupe de $H \times G$, un procédé analogue permet le calcul de $(H \times G)/L \circ_G E_P^G$:

$$(H \times G)/L \circ_G E_P^G = - \sum_{\substack{\inf s = P \\ mod. N_G(P)}} (H \times G)/L \circ_G (G \times G)/L_s$$

et par la formule de Mackey

$$(H \times G)/L \circ_G E_P^G = \dots$$

$$\dots = -\sum_{\substack{\inf s = P \\ x \in G \\ k_2(L) \subseteq N_G({}^x s)}} \frac{|N_G(s)|}{|N_G(P)|} \frac{|p_2(L) \cap N_G({}^x s)|}{|N_G(s)||p_2(L)|} (-1)^{|s|} (H \times G)/(L * {}^{(x,1)}L_s)$$

De plus

$$L * {}^{(x,1)}L_s = \{(a,b) \mid \exists c\ (a,c) \in L\ ,\ c^x \in N_G(s)\ ,\ c^x.b^{-1} \in \sup\ s\} = \dots$$

$$\dots = \{(a,b) \mid \exists c\ (a,c) \in L\ ,\ c \in N_G({}^x s)\ ,\ c.({}^x b)^{-1} \in \sup\ {}^x s\} = \dots$$

$$\dots = \{(a,b) \mid (a, {}^x b) \in L * L_{{}^x s}\} = (L * L_{{}^x s})^{(1,x)}$$

Je peux donc écrire, en sommant sur ${}^x s$

$$(H \times G)/L \circ_G E_P^G = -\sum_{\substack{x \in G \\ \inf s = {}^x P \\ k_2(L) \subseteq N_G(s)}} \frac{|p_2(L) \cap N_G(s)|}{|N_G(P)||p_2(L)|} (-1)^{|s|} (H \times G)/(L * L_s) = \dots$$

$$\dots = -\sum_{x \in p_2(L) \backslash T_G(k_2(L), N_G(P))/N_G(P)} \sum_{\substack{\inf s = {}^x P \\ k_2(L) \subseteq N_G(s) \\ mod. N_{p_2(L)}({}^x P)}} (-1)^{|s|} (H \times G)/(L * L_s)$$

De plus

$$L * L_s = \{(a,b) \mid \exists c\ (a,c) \in L\ ,\ c \in N_G(s)\ ,\ c.b^{-1} \in \sup\ s\}$$

Or la suite s est invariante par $k_2(L)$, et il est clair que, en posant $\Omega_L = O_F(k_2(L))$, j'ai

$$L * L_s \subseteq \{(a,b) \mid \exists c\ (a,c) \in L\ ,\ c \in N_G(s)\ ,\ c.b^{-1} \in \Omega_L. \sup\ s\}$$

Inversement, si $(a,c) \in L$, si $c \in N_G(s)$, et si $c.b^{-1} \in \Omega_L. \sup\ s$, alors il existe $u \in \sup\ s$ et $v \in \Omega_L$ tels que $c.b^{-1} = v.u$, et en posant $c' = v^{-1}.c$, j'ai bien $c' \in N_G(s)$, puisque $\Omega_L \subseteq N_G(s)$. J'ai aussi $(a,c') = (1,v^{-1})(a,c) \in L$ car $v \in k_2(L)$, et $c'.b^{-1} = u \in \sup\ s$. L'inclusion ci-dessus est donc une égalité.

Dans la somme donnant $(H \times G)/L \circ_G E_P^G$, je peux alors regrouper les termes s pour lesquels $\Omega_L. \sup\ s$ est un sous-groupe R donné, contenant ${}^x P.\Omega_L$. Il vient

$$(H \times G)/L \circ_G E_P^G = \dots$$

$$\ldots = -\sum_{\substack{x\in p_2(L)\backslash T_G(k_2(L),N_G(P))/N_G(P)\\ R\supseteq {}^xP.\Omega_L\\ mod.N_{p_2(L)}({}^xP)}} \sum_{\substack{\inf s={}^xP\\ k_2(L)\subseteq N_G(s)\\ \Omega_L.\sup s=R\\ mod.N_{p_2(L)}({}^xP,R)}} (-1)^{|s|}(H\times G)/(L*L_s)$$

Si K est un sous-groupe de $N_{p_2(L)}({}^xP,R)$, alors

$$L*\Delta_{K,R}=\{(a,b)\in H\times G\mid \exists c\ (a,c)\in L\ c\in K\ ,\ c.b^{-1}\in R\}$$

est un sous-groupe de $H\times G$. De plus si $v\in N_{p_2(L)}({}^xP,R)$, soit u tel que $(u,v)\in L$. Alors

$$L*\Delta_{K^v,R}=\{(a,b)\mid \exists c\ (a,c)\in L\ ,\ c\in K^v\ ,\ c.b^{-1}\in R\}=\ldots$$

$$\ldots=\{(a,b)\mid \exists c\ ({}^ua,{}^vc)\in {}^{(u,v)}L=L\ ,\ {}^vc\in K\ ,\ {}^vc.({}^vb)^{-1}\in R\}=\ldots$$

$$\ldots=\{(a,b)\mid ({}^ua,{}^vb)\in\psi(K)\}=(L*\Delta_{K,R})^{(u,v)}$$

D'où une application μ de l'anneau de Burnside de $N_{p_2(L)}({}^xP,R)$ dans celui de $H\times G$, définie par

$$\mu(N_{p_2(L)}({}^xP,R)/K)=(H\times G)/(L*\Delta_{K,R})$$

La somme

$$T=\sum_{\substack{\inf s={}^xP\ ,\ k_2(L)\subseteq N_G(s)\\ \Omega_L.\sup s=R\\ mod.N_{p_2(L)}({}^xP,R)}} (-1)^{|s|}(H\times G)/(L*L_s)$$

est alors l'image par μ de

$$\sum_{\substack{\inf s={}^xP\ ,\ k_2(L)\subseteq N_G(s)\\ \Omega_L.\sup s=R\\ mod.N_{p_2(L)}({}^xP,R)}} (-1)^{|s|}N_{p_2(L)}({}^xP,R)/N_{p_2(L)}(s)$$

Si ${}^xP\neq R$ et ${}^xP.\Omega_L\neq R$ et $\Omega_L.{}^xP\neq {}^xP$,cette somme n'est autre que

$$\tilde{\Lambda}_{]P^x,R]_F}-\tilde{\Lambda}_{]P^x,R]_F-\{Q\mid \Omega_L.Q=R\}}$$

et ces deux invariants de Lefschetz sont nuls par le même argument que plus haut. Or si ${}^xP=R$, alors ${}^xP.\Omega_L=R$. Et si ${}^xP.\Omega_L=R$, alors T est l'image par μ de $\tilde{\Lambda}_{]{}^xP,R]_F}$, qui est nul si ${}^xP\neq R$. Finalement, la somme T est nulle sauf si $\Omega_L\subseteq {}^xP$, et alors

Lemme 5: Soit P un sous-groupe de G, et L un sous-groupe de $H \times G$. Alors

$$(H \times G)/L \circ_G E_P^G = - \sum_{\substack{x \in p_2(L)\backslash T_G(k_2(L), N_G(P))/N_G(P) \\ O_F(k_2(L)) \subseteq \inf s = {}^xP, \\ mod. N_{p_2(L)}({}^xP)}} (-1)^{|s|}(H \times G)/(L * L_s)$$

et en particulier le produit est nul si $O_F(k_2(L))$ n'est contenu dans aucun conjugué de P.

2.2.4 Orthogonalité

Soient P et Q des éléments de $\underline{F}(G)$ tels que $E_P^G \circ_G E_Q^G \neq 0$. Alors:

1. Il existe une suite t telle que $\inf t = Q$ et telle que $E_P^G \circ_G (G \times G)/L_t \neq 0$. Alors $O_F(k_1(L_t)) = O_F(\sup t \cap N_G(t))$ est contenu dans un conjugué de P. Mais comme $Q = \inf t$ est distingué dans $\sup t \cap N_G(t)$, je vois que Q est contenu dans un conjugué de P.

2. Il existe une suite s telle que $\inf s = P$ et telle que $(G \times G)/L_s \circ_G E_Q^G \neq 0$. Alors $O_F(k_2(L_s)) = \sup s$ est contenu dans un conjugué de Q. Mais comme $\inf s = P$ est contenu dans $\sup s$, je vois que P est contenu dans un conjugué de Q.

Donc si $E_P^G \circ_G E_Q^G \neq 0$, alors P et Q sont conjugués dans G .

2.2.5 Calcul de la somme des E_P^G

Soit U la somme des E_P^G, lorsque P décrit un système de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de G. Alors

$$U = - \sum_{P\, mod. G} \sum_{\substack{\inf s = P \\ mod. N_G(P)}} (-1)^{|s|}(G \times G)/L_s$$

Alors il est clair que

$$U = - \sum_{s\, mod. G} (-1)^{|s|}(G \times G)/L_s$$

et je regroupe les termes pour lesquels $\sup s$ est un sous-groupe Q donné de G:

$$U = - \sum_{Q\, mod. G} \sum_{\substack{\sup s = Q \\ mod. N_G(Q)}} (-1)^{|s|}(G \times G)/\Delta_{N_G(s),Q}$$

Si K est un sous-groupe de $N_G(Q)$, alors $\Delta_{K,Q}$ est un sous-groupe de $G \times G$. De plus, si $u \in N_G(Q)$, alors

$$\Delta_{K^u,Q} = \Delta_{K^u,Q^u} = \Delta_{K,Q}^{(u,u)}$$

D'où une application θ de l'anneau de Burnside de $N_G(Q)$ dans celui de $G \times G$, définie par

$$\theta(N_G(Q)/K) = (G \times G)/\Delta_{K,Q}$$

Alors la somme

$$\sum_{\substack{\sup s = Q \\ mod.N_G(Q)}} (-1)^{|s|}(G \times G)/\Delta_{N_G(s),Q}$$

est l'image par θ de $\tilde{\Lambda}_{[1,Q[_F}$, qui est nul si $Q \neq \{1\}$. Il en résulte que

$$U = -\sum_{\substack{\sup s = 1 \\ mod.N_G(1)}} (-1)^{|s|}(G \times G)/\Delta_{N_G(s),\{1\}} = (G \times G)/L_{\{1\}} = (G \times G)/\Delta(G)$$

qui est l'élément neutre de l'anneau $\Gamma(G)$ pour le produit $\circ_G$.

Comme les E_P^G sont deux à deux orthogonaux, il s'ensuit que ce sont des idempotents, puisque

$$E_P^G = E_P^G \circ_G U = \sum_{Q \in \underline{F}/G} E_P^G \circ_G E_Q^G = E_P^G \circ_G E_P^G$$

D'où

Proposition 3: Les E_P^G, lorsque P décrit $\underline{F}/G$, sont des idempotents deux à deux orthogonaux de $\Gamma(G)$, et leur somme est l'élément neutre de $\Gamma(G)$.

2.3 Un morphisme de $b(G)$ dans $\Gamma(G)$

Si X est un G-ensemble, soit $\tilde{X}$ l'ensemble $X \times G$, doté de la double action du groupe G définie par

$$g(x,u)h = (gx, guh)$$

Lemme 6: Si X et Y sont des G-ensembles, alors

$$\tilde{X} \circ_G \tilde{Y} \approx \widetilde{X \times Y}$$

comme G-ensembles-G

En effet, les ensembles $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont libres à gauche et à droite comme G-ensembles-G. Il en résulte que $\tilde{X} \circ_G \tilde{Y}$ est égal à $\tilde{X} \times_G \tilde{Y}$, lui même isomorphe à $\widetilde{X \times Y}$ par les applications

$$((x,g),(y,h)) \in \tilde{X} \times_G \tilde{Y} \mapsto (x, gy, gh) \in \widetilde{X \times Y}$$

$$(x,y,g) \in \widetilde{X \times Y} \mapsto ((x,1),(y,h)) \in \tilde{X} \times_G \tilde{Y}$$

qui sont des bijections inverses l'une de l'autre.

En particulier l'application $X \mapsto \tilde{X}$ se prolonge en un homomorphisme d'anneaux de l'anneau de Burnside $b(G)$ dans $\Gamma(G)$. Comme $\widetilde{G/G} \approx (G \times G)/\Delta(G)$, ce morphisme est unitaire, et permet en particulier de transférer à $\Gamma(G)$ une décomposition de l'unité en idempotents orthogonaux de $b(G)$.

2.4 Semi-simplicité en caractéristique 0

Notation: Si $\mathcal{K}$ est un anneau, je noterai $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$ (resp. $b_{\mathcal{K}}(G)$) le produit tensoriel $\mathcal{K} \otimes_Z \Gamma(G)$ (resp. $\mathcal{K} \otimes_Z b(G)$. Je suppose de plus dans cette partie que $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0 ou $p > 0$ ne divisant pas l'ordre de G. D'autre part, les idempotents E_H^G considérés sont ceux associés à la famille $\underline{F}$ de tous les sous-groupes de G.

Dans ce cas, l'anneau $b_{\mathcal{K}}(G)$ est semi-simple. Ses idempotents primitifs sont indexés par les classes de conjugaison de sous-groupes de G, l'idempotent e_H^G étant donné par la formule

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \subseteq H} |K| \tilde{\chi}]K, H[.(G/K)$$

Puisque $\widetilde{G/K} = (G \times G)/\Delta(K)$, l'image de e_H^G par le morphisme $X \mapsto \tilde{X}$ est égale à

$$\widetilde{e_H^G} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \subseteq H} |K| \tilde{\chi}]K, H[.(G \times G)/\Delta(K)$$

2.4.1 Produits par $\widetilde{e_G^G}$

Je dispose donc de deux décompositions de l'unité de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$ en idempotents orthogonaux. Il est naturel d'essayer de les multiplier. Pour cela, j'étudie d'abord la multiplication par $\widetilde{e_G^G}$:

Lemme 7: Soient G et G' des groupes, et L un sous-groupe de $G \times G'$. Alors

1. **Le produit $\widetilde{e_G^G} \circ_G (G \times G')/L$ est nul si $p_1(L) \neq G$.**

2. **Le produit $(G \times G')/L \circ_{G'} \widetilde{e_{G'}^{G'}}$ est nul si $p_2(L) \neq G'$.**

Remarque: Comme $\widetilde{e_G^G}$ est somme algébrique de G-ensembles-G libres à gauche et à droite, si A est un G-ensemble-G', j'ai

$$\widetilde{e_G^G} \circ_G A = \widetilde{e_G^G} \times_G A \quad \text{et} \quad A \circ_{G'} \widetilde{e_{G'}^{G'}} = A \times_{G'} \widetilde{e_{G'}^{G'}}$$

En notant A^* le G'-ensemble-G "dual" de A, égal à A en tant qu'ensemble, la double action étant définie par

$$g'.a.g \text{ dans } \ A^* = g.a.g' \text{ dans } \ A, \text{ pour } g' \in G', \ a \in A, \ g \in G$$

j'ai de plus $(A \times_{G'} B)^* \approx B^* \times_{G'} A^*$, pour tout groupe G" et tout G'-ensemble-G" B. La seconde assertion du lemme se déduit donc de la première.

Il s'agit de calculer le produit

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{X \subseteq G} |X| \tilde{\chi}(G)(G \times G)/\Delta(X) \circ_G (G \times G')/L$$

Par la formule de Mackey, il vient

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{X \subseteq G \\ x \in G}} \tilde{\chi}(G) \frac{|X \cap {}^x p_1(L)|}{|p_1(L)|} (G \times G')/(\Delta(X) *^{(x,1)} L)$$

et

$$\Delta(X) *^{(x,1)} L = \{(a,b) \mid a \in X \cap {}^x p_1(L) \ , \ (a^x, b) \in L\}$$

Je peux alors sommer en fixant le groupe $Y = X \cap {}^x p_1(L)$. Le lemme résultera alors du lemme suivant, appliqué au treillis des sous-groupes de G:

Lemme 8: Soit X un ensemble ordonné ayant un plus grand élément γ, et dans lequel toute paire $\{x, y\}$ admet une borne inférieure $x \wedge y$. Soient $y \leq z \in X$. Si $z \neq \gamma$, alors

$$\sum_{\substack{x \in X \\ x \wedge z = y}} \tilde{\chi}]x, \gamma[= 0$$

En effet, si $z \neq \gamma$, alors soit i l'injection de $]y, z]$ dans $]y, \gamma[$. Elle est telle que si $x \in]y, \gamma[$, alors

$$i^x = \{u \in]y, z] \mid i(u) \leq x\} =]y, x \wedge z]$$

Donc i^x a un plus grand élément $x \wedge z$ si $y \neq x \wedge z$, et i^x est vide sinon. Alors

$$\tilde{\chi}]y, \gamma[= \tilde{\chi}]y, z] - \sum_{\substack{x \in]y, \gamma[\\ x \wedge z = y}} \tilde{\chi}]x, \gamma[= - \sum_{\substack{x \in]y, \gamma] \\ x \wedge z = y}} \tilde{\chi}]x, \gamma[$$

Donc

$$\tilde{\chi}]y,\gamma[+\sum_{\substack{x\in]y,\gamma]\\ x\wedge z=y}}\tilde{\chi}]x,\gamma[=\sum_{\substack{x\in[y,\gamma]\\ x\wedge z=y}}\tilde{\chi}]x,\gamma[=0$$

D'où le lemme, puisque si $x\in X$ est tel que $x\wedge z=y$, alors $x\in[y,\gamma]$.

Lemme 9: Soit H un sous-groupe de G. Alors

1. **Le produit $\widetilde{e_G^G}\circ_G E_H^G$ est nul si H n'est pas un sous-groupe normal de G.**
2. **De plus $\widetilde{e_G^G}\circ_G E_H^G=\widetilde{e_G^G}\circ_G E_H^G\circ_G \widetilde{e_G^G}$.**

En effet, j'ai

$$E_H^G=\sum_{\substack{\inf\, s=H\\ mod.N_G(H)}}(-1)^{|s|}(G\times G)/L_s$$

et le produit $\widetilde{e_G^G}\circ(G\times G)/L_s$ est nul, sauf si $p_1(L_s)=G$. Or $p_1(L_s)=N_G(s)$, donc s est composée de sous groupes normaux de G, et en particulier $H=\inf\, s\trianglelefteq G$, d'où la première assertion.

Alors la seconde assertion est trivialement vraie si H n'est pas un sous-groupe normal de G. Et si $H\trianglelefteq G$,

$$\widetilde{e_G^G}\circ_G E_H^G=\sum_{\substack{\inf\, s=H\\ N_G(s)=G}}(-1)^{|s|}\widetilde{e_G^G}\circ_G (G\times G)/L_s$$

Par le même argument, puisque $p_2(L_s)=\sup\, s.N_G(s)$, j'ai aussi

$$E_H^G\circ_G \widetilde{e_G^G}=\sum_{\substack{\inf\, s=H\\ \sup\, s.N_G(s)=G\\ mod.G}}(-1)^{|s|}(G\times G)/L_s\circ_G \widetilde{e_G^G}$$

D'autre part, l'élément $\widetilde{e_G^G}$ est combinaison linéaire de termes de la forme $(G\times G)/\Delta(X)$, où X parcourt les sous-groupes de G. Or comme $p_2(L_s)=G$, le produit $(G\times G)/L_s\circ_G (G\times G)/\Delta(X)$ est nul si $k_2(L_s)=\sup\, s\not\subseteq X$, et égal à $(G\times G)/(L_s*\Delta(X))$ sinon.

Mais le produit $\widetilde{e_G^G}\circ_G (G\times G)/(L_s*\Delta(X))$ est nul si $p_1(L_s*\Delta(X))\neq G$. Et si $p_1(L_s*\Delta(X))=G$, alors en particulier $p_1(L_s)=G$, donc $N_G(s)=G$. De plus, pour tout $a\in G$, il existe des éléments b et c tels que $(a,c)\in L_s$ et $(c,b)\in\Delta(X)$. Donc il existe $b\in X$ tel que $a.b^{-1}\in\sup\, s$. Donc $X.\sup\, s=G$, et comme sup $s \subseteq X$, le seul terme $\widetilde{e_G^G} \circ_G E_H^G \circ (G \times G)/\Delta(X)$ non-nul est celui correspondant à $X = G$, dont le coefficient est 1. Donc

$$\widetilde{e_G^G} \circ_G E_H^G = \widetilde{e_G^G} \circ_G E_H^G \circ_G \widetilde{e_G^G}$$

ce qui prouve le lemme.

2.4.2 Définition des $F_{K,H}^G$

Il en résulte que si je pose $F_H^G = \widetilde{e_G^G} \circ_G E_H^G$, pour $H \trianglelefteq G$, j'obtiens des idempotents othogonaux de $\Gamma_K(G)$, dont la somme est $\widetilde{e_G^G}$. Plus généralement, si $H \trianglelefteq K \subseteq G$, je note $x \mapsto \overline{x}$ la projection de K sur $K/H = \overline{K}$, et je considère le $\overline{K}$-ensemble-G $\alpha_{K,H}$ défini par

$$\alpha_{K,H} = (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\} \circ_K F_H^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K)$$

Je note de même $\beta_{K,H}$ le G-ensemble-$\overline{K}$ défini par

$$\beta_{K,H} = (G \times K)/\Delta(K) \circ_K F_H^K \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k, \overline{k}) \mid k \in K\}$$

Alors soit $H' \trianglelefteq K' \subseteq G$. Je vais calculer le produit $\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K',H'}$. Je peux écrire

$$\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K',H'} = (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\} \circ_K F_H^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K) \circ_G \ldots$$

$$\ldots (G \times K')/\Delta(K') \circ_{K'} F_{H'}^{K'} \circ_{K'} (K' \times \overline{K'})/\{(k', \overline{k'}) \mid k \in K'\}$$

Comme

$$F_H^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K) \circ_G (G \times K')/\Delta(K') \circ_G F_{H'}^{K'} = \ldots$$

$$\ldots = F_H^K \circ_K \widetilde{e_K^K} \circ_K (K \times G)/\Delta(K) \circ_G (G \times K')/\Delta(K') \circ_{K'} \widetilde{e_{K'}^{K'}} \circ_{K'} F_{H'}^{K'}$$

et comme

$$(K \times G)/\Delta(K) \circ_G (G \times K')/\Delta(K') = \sum_{x \in K \backslash G / K'} (K \times K')/\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\}$$

je dois avoir

$$p_1(\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\}) = K$$

soit $K \subseteq {}^xK'$, et

$$p_2(\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\}) = {}^xK'$$

donc $K \supseteq {}^xK'$. Finalement, le produit $\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K',H'}$ est nul si K et K' ne sont pas conjugués dans G. Et si $K' = K^g$, pour $g \in G$, alors en notant γ l'isomorphisme canonique entre K/H et $\overline{K^g} = K^g/H^g$, et en posant

$$t = (\overline{K^g} \times \overline{K})/\{(\gamma(\overline{k}), \overline{k} \mid k \in K\}$$

$$t^* = (\overline{K} \times \overline{K^g})/\{(\overline{k}, \gamma(\overline{k}) \mid k \in K\}$$

il est clair que $t \circ_{\overline{K}} t^* = 1_{\Gamma(\overline{K^g})}$ et que $t^* \circ_{\overline{K^g}} t = 1_{\Gamma(\overline{K})}$. De plus

$$t \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} = \alpha_{K^g,H^g}$$

et il suffit de considérer le couple (K, H) à conjugaison près par G. Je peux donc supposer $K = K'$, et dans ce cas

$$\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K,H'} = \sum_{x \in N_G(K)/K} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\} \circ_K F_H^K \circ_K \ldots$$

$$\ldots (K \times K)/\{(k, k^x) \mid k \in K\} \circ_K F_{H'}^K \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k, \overline{k}) \mid k \in K\}$$

De plus, je peux écrire

$$F_H^K \circ_K (K \times K)/\{(k, k^x) \mid k \in K\} = (K \times K)/\{(k, k^x) \mid k \in K\} \circ_K F_H^K$$

ce qui résulte par exemple du lemme suivant:

Lemme 10: Soit H un sous-groupe du groupe G, et θ un isomorphisme de G sur un groupe G'. Alors

$$\widetilde{e_G^G} \circ_G (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} = (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} \circ_{G'} \widetilde{e_{G'}^{G'}}$$

$$E_H^G \circ_G (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} = (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} \circ_{G'} E_{\theta(H)}^{G'}$$

En effet la première assertion résulte de ce que

$$(G \times G)/\Delta(X) \circ_G (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} = (G \times G')/(\Delta(X) * \{(u, \theta(u)) \mid u \in G\}) = \ldots$$

$$\ldots = (G \times G')/\{(x, \theta(x)) \mid x \in X\}$$

Alors que

$$(G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} \circ_{G'} (G \times G)/\Delta(\theta(X)) = \ldots$$

$$\ldots = (G \times G')/(\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} * \Delta(\theta(X))) = (G \times G')/\{(x, \theta(x)) \mid x \in X\}$$

La seconde résulte quant à elle de manière analogue de l'égalité

$$(G \times G)/L_s \circ_G (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} = (G \times G')/\{(u, \theta(u)) \mid u \in G\} \circ_{G'} (G \times G)/L_{\theta(s)}$$

En utilisant ce lemme et l'orthogonalité des F_H^K, pour $H \trianglelefteq K$, je vois que

$$\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K,H'} = \sum_{x \in N_G(K)/K} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\} \circ_K (K \times K)/\{(k, k^x) \mid k \in K\} \circ_K \ldots$$

$$\dots F^K_{H^x} \circ_K F^K_{H'} \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k,\overline{k}) \mid k \in K\}$$

et cette somme est nulle sauf si il existe $x \in N_G(K)$ tel que $H^x = H'$, auquel cas $(K,H)^x = (K,H')$.

Donc le produit $\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K',H'}$ est nul si (K,H) et (K',H') ne sont pas conjugués par G.

Je peux donc supposer $K = K'$ et $H = H'$, et alors

$$\alpha_{K,H}\beta_{K,H} = \sum_{x \in N_G(K,H)/K} (\overline{K}\times\overline{K})/\{(\overline{k},\overline{k^x}) \mid k \in K\} \circ_{\overline{K}} (\overline{K}\times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K \dots$$

$$\dots F^K_H \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k,\overline{k}) \mid k \in K\} = \dots$$

$$\dots = (\sum_{x \in N_G(K,H)/K} (\overline{K} \times \overline{K})/\{(\overline{k},\overline{k^x}) \mid k \in K\}) \circ_{\overline{K}} F^{\overline{K}}_1$$

moyennant le lemme suivant

Lemme 11: Soit H un sous-groupe normal du groupe K, et $\overline{K} = K/H$. Alors

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K F^K_H = F^{\overline{K}}_1 \circ_{\overline{K}} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\}$$

De même

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k,\overline{k}) \mid k \in K\} = (\overline{K} \times \overline{K})/\Delta(\overline{K})$$

En effet, par définition

$$F^K_H = \widetilde{e^K_K} \circ_K E^K_H = -\sum_{\substack{\inf s = H \\ mod. N_K(H)}} (-1)^{|s|} \widetilde{e^K_K} \circ_K (K \times K)/L_s$$

et je sais que je peux sommer uniquement sur les suites s formées de sous-groupes normaux de K. D'autre part, l'élément $\widetilde{e^K_K}$ est combinaison linéaire de termes de la forme $(K \times K)/\Delta(X)$, pour X décrivant les sous-groupes de K. Le produit $(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K (K \times K)/\Delta(X)$ est nul si $k_2(\{(\overline{k},k) \mid k \in K\}) = H$ n'est pas contenu dans $p_1(\Delta(X)) = X$, et sinon, il est égal à

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{x},x) \mid x \in X\}$$

De plus

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{x},x) \mid x \in X\} \circ_K (K \times K)/L_s = (\overline{K} \times K)/(\{(\overline{x},x) \mid x \in X\} * L_s)$$

Or, en notant $\overline{s}$ la suite des quotients par H des termes de s, j'ai

$$\{(\overline{x},x)\mid x\in X\}*L_s=\{(\overline{x},y)\mid x\in X\ ,\ x.y^{-1}\in \sup\ s\}=\Delta(\overline{X})*L_{\overline{s}}*\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}$$

ce qui prouve que

$$(\overline{K}\times K)/\{(\overline{x},x)\mid x\in X\}\circ_K (K\times K)/L_s=\ldots$$

$$\ldots=(\overline{K}\times\overline{K})/\Delta(\overline{X})\circ_{\overline{K}}(\overline{K}\times\overline{K})/L_{\overline{s}}\circ_{\overline{K}}(\overline{K}\times K)/\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}$$

et la première assertion du lemme en résulte, en multipliant cette égalité par

$$\frac{1}{|K|}|X|\tilde{\chi}]X,K[(-1)^{|s|}=\frac{1}{|\overline{K}|}|\overline{X}|\tilde{\chi}]\overline{X},\overline{K}[(-1)^{|\overline{s}|}$$

et en sommant sur les suites s telles que $\inf\ s=H$ et $N_K(s)=K$, et les sous-groupes $X\supseteq H$ de K.

La seconde assertion du lemme résulte du fait que

$$\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}*\{(k,\overline{k})\mid k\in K\}=\Delta(\overline{K})$$

Pour calculer $\beta_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}$, j'observe que

$$(K\times\overline{K})/\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}\circ_{\overline{K}}(\overline{K}\times K)/\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}=(K\times K)/\Delta_{K,H}$$

qui n'est autre que l'élément $t_{K,H}$ de l'anneau $\mathcal{T}(K)$. J'ai donc

$$\beta_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}=(G\times K)/\Delta(K)\circ_K F_H^K\circ_K t_{K,H}\circ_K F_H^K\circ_K (K\times G)/\Delta(K)$$

Comme $F_H^K=\widetilde{e_K^K}\circ_K E_H^K$, comme E_H^K est combinaison linéaire de termes de la forme $(K\times K)/L_s=t_{N_K(s),\sup\ s}$ pour des suites s telles que $\inf\ s=H$, et comme

$$t_{N_K(s),\sup\ s}\circ_K t_{K,H}=t_{N_K(s)\cap K,\sup\ s.H}=t_{N_K(s),\sup\ s}$$

il en résulte que

$$\beta_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}=(G\times K)/\Delta(K)\circ_K F_H^K\circ_K (K\times G)/\Delta(K)$$

Notation: Si K et H sont des sous-groupes du groupe G tels que $H\trianglelefteq K$, je pose

$$F_{K,H}^G=\frac{1}{|N_G(K,H)/K|}(G\times K)/\Delta(K)\circ_K F_H^K\circ_K (K\times G)/\Delta(K)$$

J'ai donc

$$\beta_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}=|N_G(K,H)/K|F_{K,H}^G$$

Pour obtenir une autre expression des éléments $F^G_{K,H}$, je développe le produit $F^K_H = \widetilde{e^K_K} \circ_K E^K_H$ sous la forme

$$F^K_H = \widetilde{e^K_K} \circ_K \sum_{\substack{\inf\ s = H \\ N_K(s) = K}} (-1)^{|s|}(K \times K)/L_s$$

L'élément $\widetilde{e^K_K}$ est quant à lui combinaison linéaire de termes de la forme $(K\times K)/\Delta(X)$, pour X parcourant les sous-groupes de K. De plus, si $N_K(s) = K$, alors

$$(K \times K)/\Delta(X) \circ_K (K \times K)/L_s = (K \times K)/(\Delta(X) * L_s)$$

et $\Delta(X) * L_s$ n'est autre que $\Delta_{X,\sup\ s}$, et ne dépend que de $\sup\ s$. Or la somme des $(-1)^{|s|}$, pour les suites s formées de sous-groupes normaux de K, telles que $\inf\ s = H$ et $\sup\ s = N$ est aussi égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite de l'ensemble $]H, N[^K$ des sous-groupes normaux de K contenant strictement H et contenus strictement dans N. Comme de plus

$$(G\times K)/\Delta(K)\circ_K(K\times K)/\Delta_{X,N}\circ_K(K\times G)/\Delta(K) = (G\times G)/(\Delta(K)*\Delta_{X,N}*\Delta(K)) = \dots$$
$$\dots = (G \times G)/\Delta_{X,N}$$

qui est aussi l'élément $t_{X,N}$ de $\mathcal{T}(G)$, il vient finalement

$$F^G_{K,H} = \frac{1}{|N_G(K,H)|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ H \subseteq N \trianglelefteq K}} |X|\tilde{\chi}]X, K[\tilde{\chi}]H, N[^K .t_{X,N}$$

2.4.3 Orthogonalité et somme des $F^G_{K,H}$

Il résulte du calcul des produits $\alpha_{K,H} \circ_G \beta_{K',H'}$ et de la formule $F^G_{K,H} = \frac{1}{|N_G(H)|}\beta_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H}$ que le produit $F_{K,H} \circ_G F^G_{K',H'}$ est nul si (K', H') n'est pas conjugué de (K, H) dans G. De plus, si $g \in G$,

$$F_{K^g,H^g} = \frac{1}{|N_G(K,H)|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ H \subseteq N \trianglelefteq K}} |X|\tilde{\chi}]X, K[\tilde{\chi}]H, N[^K .t_{X^g,N^g}$$

et comme dans $\mathcal{T}(G)$, j'ai $t_{X^g,N^g} = t_{X,G}$, je vois que $F^G_{K^g,H^g} = F^G_{K,H}$.

Je peux alors calculer la somme des différents $F^G_{K,H}$, lorque (K, H) décrit un système de représentants des classes de conjugaison de couples de sous-groupes de G tels que $H \trianglelefteq G$:

$$\sum_{(K,H)\, mod.G} F_{K,H} = \sum_{(K,H)} \frac{|N_G(K,H)|}{|G|} \frac{|K|}{|N_G(K,H)|}(G\times K)/\Delta(K)\circ_K F^K_H \circ_K(K\times G)/\Delta(K)$$

De plus
$$\sum_H F_{K,H}=\sum_H \widetilde{e_K^K}\circ_K E_H^K=\widetilde{e_K^K}$$
car la somme des E_H^K pour H sous-groupe normal de K est égale à $1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(K)}$. D'autre part, il est facile de vérifier que
$$(G\times K)/\Delta(K)\circ_K \widetilde{e_K^K}\circ_K (K\times G)/\Delta(K)=|N_G(K)/K|\widetilde{e_K^G}$$
car si X est un sous-groupe de K, alors
$$(G\times K)/\Delta(K)\circ_K (K\times K)/\Delta(X)\circ_K (K\times G)/\Delta(K)=(G\times G)/\Delta(X)$$
Alors
$$\sum_H F_{K,H}=\sum_K \frac{|N_G(K)|}{|G|}\widetilde{e_K^G}=\sum_{K\,mod.G}\widetilde{e_K^G}=1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(G)}$$
Il en résulte comme plus haut que les $F_{K,H}^G$ sont des idempotents: en effet
$$F_{K,H}^G=F_{K,H}^G\circ_G \sum_{(K',H')\,mod.G}F_{K',H'}^G=F_{K,H}^G\circ_G F_{K,H}^G$$

Finalement:

Proposition 4: Les éléments $F_{K,H}^G$, lorsque (K,H) décrit un système de représentants des classes de conjugaison par G de couples de sous-groupes de G tels que $H\trianglelefteq K$, sont des idempotents deux à deux orthogonaux de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$, et leur somme est égale $1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(G)}$.

2.4.4 Identification de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$

Soient $H\trianglelefteq K$ et $H'\trianglelefteq K'$ des sous-groupes de G tels que $F_{K',H'}^G\circ_G\Gamma_{\mathcal{K}}(G)\circ_G F_{K,H}^G$ ne soit pas réduit à $\{0\}$. Alors soit X un G-ensemble-G tel que
$$F_{K',H'}^G\circ_G X\circ_G F_{K,H}^G\neq 0$$
J'ai donc en particulier
$$\alpha_{K',H'}\circ_G X\circ_G \beta_{K,H}\circ_G \alpha_{K,H}\neq 0$$
En posant $Z=\alpha_{K',H'}\circ_G X\circ_G \beta_{K,H}\circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}}$, comme par le lemme 11, j'ai
$$\alpha_{K,H}=(\overline{K}\times K)/\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}\circ_K F_H^K\circ_K (K\times G)/\Delta(K)=\ldots$$
$$\ldots=F_1^{\overline{K}}\circ_{\overline{K}}(\overline{K}\times K)/\{(\overline{k},k)\mid k\in K\}\circ_K (K\times G)/\Delta(K)$$

j'ai $F_1^{\overline{K}} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} = \alpha_{K,H}$, donc

$$F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} Z \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} = Z \neq 0$$

Dans ces conditions, il existe un sous-groupe L de $\overline{K'} \times \overline{K}$ tel que

$$F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} (\overline{K'} \times \overline{K})/L \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} \neq 0$$

Lemme 12: Pour tout groupe G,

$$E_1^G \circ_G F_1^G = F_1^G$$

En effet, j'ai $E_1^G \circ_G F_1^G = E_1^G \circ_G \widetilde{e_G^G} \circ_G E_1^G$, et ce produit est combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$(G \times G)/L_s \circ_G (G \times G)/\Delta(X) \circ_G E_1^G$$

pour inf $s = \{1\}$ et X sous-groupe de G.
Or

$$(G \times G)/L_s \circ_G (G \times G)/\Delta(X) = \sum_{\substack{x \in p_2(L_s)\backslash G/X \\ k_2(L_s)^x \subseteq X}} (G \times G)/(L_s * {}^{(x,1)}\Delta(X))$$

et $k_2(L_s) = \sup s$. Mais si le produit

$$(G \times G)/(L_s * {}^{(x,1)}\Delta(X)) \circ_G E_1^G$$

est non-nul, alors $k_2(L_s * {}^{(x,1)}\Delta(X)) = 1$. Comme

$$k_2(L_s * {}^{(x,1)}\Delta(X)) = X \cap (\sup s)^x = \sup s^x$$

il en résulte que sup $s = \{1\}$, donc que s est réduite au groupe trivial. Comme $L_{\{1\}} = \Delta(G)$, le lemme en découle.

Dans ces conditions, si

$$F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} (\overline{K'} \times \overline{K})/L \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} \neq 0$$

alors comme

$$F_1^{\overline{K'}} = F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} \widetilde{e_{\overline{K'}}^{\overline{K'}}} = F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} E_1^{\overline{K'}}$$

je vois que $p_1(L) = \overline{K'}$ et $k_1(L) = \{1\}$. De même, comme

$$F_1^{\overline{K}} = \widetilde{e_{\overline{K}}^{\overline{K}}} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} = E_1^{\overline{K}} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}}$$

j'ai aussi $p_2(L) = \overline{K}$ et $k_2(L) = \{1\}$. Alors les groupes $\overline{K}$ et $\overline{K'}$ sont isomorphes à $q(L)$, donc isomorphes entre eux. Finalement, j'ai montré la

Proposition 5: Soient $H \trianglelefteq K$ et $H' \trianglelefteq K'$ des sous-groupes de G tels que $F^G_{K',H'} \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(G) \circ_G F^G_{K,H} \neq 0$. Alors les quotients K/H et K'/H' sont isomorphes.
Corollaire: Si S est un groupe, soit

$$B_S = \sum_{\substack{(K,H)\, mod.G \\ H \trianglelefteq K \\ K/H \approx S}} F^G_{K,H}$$

Alors les B_S, lorsque S décrit un système de représentants des classes d'isomorphismes de sections de G, sont des idempotents centraux de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$, et leur somme est égale à $1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(G)}$.

Le corollaire provient du fait que la somme des B_S est égale à la somme des $F^G_{K,H}$, donc à $1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(G)}$. Alors si $x \in \Gamma_{\mathcal{K}}(G)$, j'ai

$$B_S \circ_G x = \sum_T B_S \circ_G x \circ_G B_T$$

et il est clair que le produit $B_S \circ_G x \circ_G B_T$ ne peut être non-nul que si $S = T$. Alors $B_S \circ_G x = B_S \circ_G x \circ_G B_S$, et le même raisonnement appliqué à $x \circ_G B_S$ prouve que $x \circ_G B_S = B_S \circ_G x \circ_G B_S$, donc que B_S est central.

Pour identifier l'algèbre $B_S \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(G)$, je choisis un système R_S de représentants des classes de conjugaison de couples (K,H) de sous-groupes de G tels que $H \trianglelefteq K$ et $K/H \approx S$. Pour chaque $(K,H) \in R_S$, je pose

$$\gamma_{K,H} = \frac{1}{|N_G(K,H)/K|}\beta_{K,H}$$

Je fixe alors un isomorphisme $\pi_{K,H}$ de $K/H = \overline{K}$ sur S, et je note $\rho_{K,H}$ le S-ensemble-$\overline{K}$ défini par

$$\rho_{K,H} = (S \times \overline{K})/\{(\pi_{K,H}(\overline{k}), \overline{k}) \mid k \in K\}$$

Je note

$$\rho^*_{K,H} = (\overline{K} \times S)/\{(\overline{k}, \pi_{K,H}(\overline{k})) \mid k \in K\}$$

son "inverse", qui est tel que

$$\rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} = 1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(S)}$$

$$\rho^*_{K,H} \circ_S \rho_{K,H} = 1_{\Gamma_{\mathcal{K}}(\overline{K})}$$

Si $x \in N_G(K,H)$, alors x induit un automorphisme i_x de $\overline{K} = K/H$, qui est intérieur si $x \in K$, et je note $a_{K,H}$ le morphisme de $N_G(K,H)/K$ dans le groupe $Ext(S)$ des automorphismes extérieurs de S défini par

$$a_{K,H}(x) = \pi_{K,H}.i_x.\pi_{K,H}^{-1}$$

Je pose également

$$\mu_{K,H} = \frac{1}{|N_G(K,H)/K|} \sum_{x \in N_G(K,H)/K} (\overline{K} \times \overline{K})/\{(i_x(\overline{k}), \overline{k}) \mid k \in K\}$$

C'est un idempotent de $\Gamma_{\mathcal{K}}(\overline{K})$. Enfin je note $\sigma_{K,H}$ l'idempotent de $\Gamma_{\mathcal{K}}(S)$ correspondant, défini par

$$\sigma_{K,H} = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \mu_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H}$$

Il résulte du lemme 10 que

$$F_1^{\overline{K}} \circ_{\overline{K}} (\overline{K} \times \overline{K})/\{(\overline{k}, \overline{k^x}) \mid k \in K\} = (\overline{K} \times \overline{K})/\{(\overline{k}, \overline{k^x}) \mid k \in K\} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}}$$

Il s'ensuit que $\mu_{K,H} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} = F_1^{\overline{K}} \circ_{\overline{K}} \mu_{K,H}$, donc que

$$\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S = F_1^S \circ_S \sigma_{K,H}$$

et en particulier $\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S$ est un idempotent de $\Gamma_{\mathcal{K}}(S)$.

Soient (K,H) et (K',H') deux éléments de R_S, et $u \in F^G_{K,H} \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(G) \circ_G F^G_{K',H'}$. Je pose

$$\theta^{K,H}_{K',H'}(u) = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'}$$

C'est un élément de $\Gamma_{\mathcal{K}}(S)$. Il est clair de plus que

$$\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S \circ_S \rho_{K,H} = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \mu_{K,H} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}}$$

Or j'ai vu que

$$\mu_{K,H} \circ_{\overline{K}} F_1^{\overline{K}} = \alpha_{K,H} \circ_G \gamma_{K,H}$$

Il en résulte que

$$\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S \circ_S \theta^{K,H}_{K',H'}(u) = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G \gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'}$$

Mais $\gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} = F^G_{K,H}$, et $F^G_{K,H} \circ_G u = u$. Donc

$$\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S \circ_S \theta^{K,H}_{K',H'}(u) = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} = \theta^{K,H}_{K',H'}(u)$$

De la même manière, comme

$$\rho^*_{K',H'} \circ_S \sigma_{K',H'} \circ_S F_1^S = \mu_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} F_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'}$$

j'ai

$$\theta^{K,H}_{K',H'}(u)\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1=\rho_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}\circ_G u\circ_G\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}\circ_G\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\rho^*_{K',H'}$$

De plus $\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}=F^G_{K',H'}$, et $u\circ_G F^G_{K',H'}=u$. Donc

$$\theta^{K,H}_{K',H'}(u)\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1=\rho_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}\circ_G u\circ_G\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\rho^*_{K',H'}=\theta^{K,H}_{K',H'}(u)$$

Ainsi, j'ai défini une application $\theta^{K,H}_{K',H'}$ de $F^G_{K,H}\circ_G\Gamma_K(G)\circ_G F^G_{K',H'}$ dans

$$\sigma_{K,H}\circ_S F^S_1\circ_S\Gamma_K(S)\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1$$

Inversement, si v est un élément de $\sigma_{K,H}\circ_S F^S_1\circ_S\Gamma_K(S)\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1$, je pose

$$\phi^{K,H}_{K',H'}(v)=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}$$

Alors, je peux écrire

$$F^G_{K,H}\circ_G\phi^{K,H}_{K',H'}(v)=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}\circ_G\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}$$

et

$$\alpha_{K,H}\circ_G\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v=\mu_{K,H}\circ_{\overline{K}}F^{\overline{K}}_1\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v=\dots$$

$$\dots=\rho^*_{K,H}\circ_S\sigma_{K,H}\circ_S F^S_1\circ_S v=\rho^*_{K,H}\circ_S v$$

Donc

$$F^G_{K,H}\circ_G\phi^{K,H}_{K',H'}(v)=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}=\phi^{K,H}_{K',H'}(v)$$

De même

$$\phi^{K,H}_{K',H'}(v)\circ_G F^G_{K',H'}=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}\circ_G\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}$$

et

$$v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}\circ_G\gamma_{K',H'}=v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\mu_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}F^{\overline{K'}}_1=\dots$$

$$\dots=v\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1\circ_S\rho_{K',H'}=v\circ_S\rho_{K',H'}$$

donc

$$\phi^{K,H}_{K',H'}(v)\circ_G F^G_{K',H'}=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S v\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}=\phi^{K,H}_{K',H'}(v)$$

J'ai ainsi défini une application $\phi^{K,H}_{K',H'}$ de $\sigma_{K,H}\circ_S F^S_1\circ_S\Gamma_K(S)\circ_S\sigma_{K',H'}\circ_S F^S_1$ dans $F^G_{K,H}\circ_G\Gamma_K(G)\circ_G F^G_{K',H'}$.

Les applications $\theta^{K,H}_{K',H'}$ et $\phi^{K,H}_{K',H'}$ sont des bijections inverses l'une de l'autre: en effet,

$$\phi^{K,H}_{K',H'}.\theta^{K,H}_{K',H'}(u)=\gamma_{K,H}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,H}\circ_S\rho_{K,H}\circ_{\overline{K}}\alpha_{K,H}\circ_G u\circ_G\gamma_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\rho^*_{K',H'}\circ_S\rho_{K',H'}\circ_{\overline{K'}}\alpha_{K',H'}$$

Alors

$$\gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} \circ_S \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u = \gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u = F^G_{K,H} \circ_G u = u$$

et

$$u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} = u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} = u \circ_G F^G_{K',H'} = u$$

et j'ai bien $\phi^{K,H}_{K',H'}.\theta^{K,H}_{K',H'}(u) = u$.
De la même manière,

$$\theta^{K,H}_{K',H'}.\phi^{K,H}_{K',H'}(v) = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G \gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} \circ_S v \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'}$$

Or

$$\rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G \gamma_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} \circ_S v = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \mu_{K,H} F^{\overline{K}}_1 \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} \circ_S v = \dots$$

$$\dots = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,H} \sigma_{K,H} \circ_S F^S_1 \circ_S v = v$$

et

$$v \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} = v \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \mu_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} F^{\overline{K'}}_1 \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} = \dots$$

$$\dots = v \circ_S \sigma_{K',H'} \circ_S F^S_1 \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} = v$$

et j'ai donc bien $\theta^{K,H}_{K',H'}.\phi^{K,H}_{K',H'}(v) = v$.

Si à présent j'ai trois éléments (K,H), (K',H') et $(K", H")$ de R_S, si u est un élément de $F^G_{K,H} \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}} \circ_G F^G_{K',H'}$ et u' un élément de $F^G_{K',H'} \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}} \circ_G F^G_{K",H"}$, alors

$$\theta^{K,H}_{K',H'}(u) \circ_S \theta^{K',H'}_{K",H"}(u') = \dots$$

$$\dots = \rho_{K,H} \circ_{\overline{K}} \alpha_{K,H} \circ_G u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} \circ_G u' \circ_G \gamma_{K",H"} \circ_{\overline{K"}} \rho^*_{K",H"}$$

Mais

$$u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \rho^*_{K',H'} \circ_S \rho_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} \circ_G u' = u \circ_G \gamma_{K',H'} \circ_{\overline{K'}} \alpha_{K',H'} \circ_G u' = \dots$$

$$\dots = u \circ_G F^G_{K',H'} \circ_G u' = u \circ_G u'$$

Il vient donc

$$\theta^{K,H}_{K',H'}(u) \circ_S \theta^{K',H'}_{K",H"}(u') = \theta^{K,H}_{K",H"}(u \circ_G u')$$

Soit alors A_S l'algèbre $F^S_1 \circ_S \Gamma_K(S) \circ_S F^S_1$, et

$$W_S = \bigoplus_{(K,H) \in R_S} A_S \circ_S \sigma_{K,H}$$

vu comme un A_S-module. Alors

$$\mathrm{End}_{A_S}(W_S) \approx \bigoplus_{(K,H),(K',H')\in R_S} \sigma_{K,H} \circ_S A_S \circ_S \sigma_{K',H'}$$

De même, pour l'algèbre $B_S \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(S)$, j'ai

$$B_S \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(S) \approx \bigoplus_{(K,H),(K',H')\in R_S} F^G_{K,H} \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(G) \circ_G F^G_{K',H'}$$

et les considérations précédentes montrent que l'application θ de $B_S \circ_G \Gamma_{\mathcal{K}}(S)$ dans $\mathrm{End}_{A_S}(W_S)$ définie par

$$\theta(u) = \oplus_{(K,H),(K',H')\in R_S} \theta^{K,H}_{K',H'}(F^G_{K,H} \circ_G u \circ_G F^G_{K',H'})$$

est un isomorphisme d'algèbres.

D'autre part, si ζ est un automorphisme de S, alors le S-ensemble-S diagonal $(S\times S)/\{(\zeta(s),s) \mid s\in S\}$ ne dépend que de la classe de ζ dans $Ext(S)$, à isomorphisme près. Je pose alors

$$Z_\zeta = F^S_1 \circ_S (S\times S)/\{(\zeta(s),s) \mid s\in S\} \circ_S F^S_1$$

Comme F^S_1 commute avec $(S\times S)/\{(\zeta(s),s) \mid s\in S\}$ (lemme 10), j'ai aussi

$$Z_\zeta = F^S_1 \circ_S (S\times S)/\{(\zeta(s),s) \mid s\in S\}$$

et si $\zeta' \in Aut(S)$, alors

$$Z_\zeta \circ_S Z_{\zeta'} = F^S_1 \circ_S (S\times S)/\{(\zeta(s),s) \mid s\in S\} \circ_S (S\times S)/\{(\zeta'(s),s) \mid s\in S\} = \ldots$$

$$\ldots = F^S_1 \circ_S (S\times S)/\{(\zeta\zeta'(s),s) \mid s\in S\} = Z_{\zeta\zeta'}$$

D'où un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{K}Ext(S)$ dans A_S. Cet homomorphisme est surjectif, car si L est un sous-groupe de $S\times S$ tel que $F^S_1\circ_S(S\times S)/L\circ_S F^S_1 \neq 0$, alors

$$p_1(L) = S\ ,\ k_1(L) = \{1\}\ ,\ p_2(L) = S\ ,\ k_2(L) = \{1\}$$

et il existe un automorphisme ζ de S tel que $L = \{(\zeta(s),s) \mid s\in S\}$.
Il est de plus injectif, car le seul terme $(S\times S)/L$ figurant dans le développement de Z_ζ, pour lequel L vérifie les propriétés ci-dessus correspond à $L = L_\zeta = \{(\zeta(s),s) \mid s\in S\}$, avec coefficient 1: en effet, l'élément Z_ζ est combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$(S\times S)/\Delta(X) \circ_S (S\times S)/L_s \circ_S (S\times S)/L_\zeta$$

où X est un sous-groupe de S, et s est une suite de sous-groupes que je peux supposer normaux de S. Ce produit est aussi égal à

$$(S\times S)/(\Delta(X) * L_s * L_\zeta)$$

Mais si $p_1(\Delta(X) * L_s * L_\zeta) = S$, alors $X = S$ et $\Delta(X) * L_s * L_\zeta = L_s * L_\zeta$. Si de plus $k_1(L_s * L_\zeta) = \{1\}$, alors $k_1(L_s) = \{1\}$, donc sup $s = \{1\}$, et s est réduite au groupe trivial. Et alors j'ai bien $L_s * L_\zeta = L_\zeta$.

En d'autres termes, je vois que l'algèbre A_S est isomorphe à l'algèbre du groupe $Ext(S)$. Il est clair que cet isomorphisme transforme l'idempotent $\sigma_{K,H} \circ_S F_1^S$ en l'idempotent

$$\lambda_{K,H} = \frac{1}{|N_G(K,H)/K|} \sum_{x \in N_G(K,H)/K} a_{K,H}(x)$$

de $\mathcal{K}Ext(S)$. Or en tant que $\mathcal{K}Ext(S)$-modules, j'ai l'isomorphisme

$$\mathcal{K}Ext(S)\lambda_{K,H} \approx \mathrm{Ind}_{a_{K,H}(N_G(K,H)/K)}^{Ext(S)} \mathcal{K}$$

et j'ai finalement montré le

Théorème 2: Si $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0 ou $p > 0$ ne divisant pas l'ordre de G, alors l'algèbre $\Gamma_\mathcal{K}(G)$ est isomorphe au produit direct des algèbres

$$\mathbf{End}_{Ext(S)}(\oplus_{(K,H)\in R_S} \mathbf{Ind}_{a_{K,H}(N_G(K,H)/K)}^{Ext(S)} \mathcal{K})$$

lorsque S décrit les classes d'isomorphisme de groupes finis, l'ensemble R_S étant un système de représentants des classes de conjugaison par G de couples de sous-groupes (K, H) de G tels que $K/H \approx S$, le groupe $a_{K,H}(N_G(K,H)/K)$ étant l'image de $N_G(K,H)/K$ dans $Ext(S)$ déduite d'un tel isomorphisme.
Corollaire: Si $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0 ne divisant aucun des ordres des groupes $Ext(S)$, pour S section de G, alors l'algèbre $\Gamma_\mathcal{K}(G)$ est semi-simple.

3 Catégories associées

Le produit $\circ_G$ est associatif et possède un élément neutre. Il est naturel d'essayer de lui associer une catégorie dont les objets sont les groupes finis, un morphisme d'un groupe G dans un groupe H étant un H-ensemble-G, le produit des morphismes étant donné par le produit $\circ_G$. Il est possible de raffiner un peu cette définition, en ne considérant que certains types d'ensembles munis d'une double action.

3.1 Ensembles $\mathcal{P}$-libres-$\mathcal{Q}$

Soit $\mathcal{P}$ une famille non-vides de groupe finis telle que

1. Si $P \in \mathcal{P}$, et si $Q \subseteq P$, alors $Q \in \mathcal{P}$.

2. Si $Q \trianglelefteq P \in \mathcal{P}$, alors $P/Q \in \mathcal{P}$.

3. Si $Q \trianglelefteq P$, si $Q \in \mathcal{P}$, et si $P/Q \in \mathcal{P}$, alors $P \in \mathcal{P}$.

Remarque: Ces propriétés signifient en fait que $\mathcal{P}$ est la famille des groupes finis dont les facteurs de composition sont dans une famille donnée de groupe finis simples.

Si G et H sont des groupes finis, et A un H-ensemble-G, je dirai que A *est $\mathcal{P}$-libre (resp libre-$\mathcal{P}$)* si pour tout $a \in A$, le groupe H_a est dans $\mathcal{P}$ (resp. le groupe ${}_aG$ dans $\mathcal{P}$). Cette appellation tient au fait que, dans le cas où $\mathcal{P}$ est réduite au groupe trivial, cette définition est celle d'un ensemble libre à gauche. Si Q est une autre famille ayant ces propriétés, je dirai de même que A est $\mathcal{P}$-libre-$\mathcal{Q}$ s'il est $\mathcal{P}$- libre et libre-$\mathcal{Q}$.

Les ensembles $\mathcal{P}$-libres se multiplient entre eux par le produit $\circ_G$:

Lemme 13: Soient G, H, et K des groupes. Soit A est un H-ensemble-G et B un Kensemble-H. Si A et B sont $\mathcal{P}$-libres (resp. libres-$\mathcal{P}$), il en est de même de $B \circ_H A$.

Soit en effet $b \circ_H a \in B \circ_H A$, et $k \in K$ tel que $k(b \circ_H a) = b \circ_H a$. Alors il existe $h \in H$ tel que $kb = bh$ et $ha = a$. Soit P l'ensemble des $h \in H_a$ tels qu'il existe $k \in K$ avec $kb = bh$. Alors P est un sous-groupe de H_a, donc P est dans $\mathcal{P}$, de même que son quotient $P/{}_bP$.
Mais l'application qui à $k \in K_{b \circ_H a}$ associe dans $P/{}_bP$ l'image de l'élément $h \in H$ tel qu $kb = bh$ est bien définie et surjective. Son noyau est K_b qui est dans $\mathcal{P}$ par hypothèse. Donc $K_{b \circ_H a}$ est dans $\mathcal{P}$, et $B \circ_H A$ est $\mathcal{P}$-libre. Le raisonnement pour les ensembles libres-$\mathcal{P}$ est analogue.

3.2 La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$

Je peux à présent définir la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$: ses objets sont simplement les groupes finis. Un morphisme du groupe G dans le groupe H est un élément du groupe de Grothendieck des H-ensembles- G qui sont $\mathcal{P}$-libres-$\mathcal{Q}$, ou encore une somme algébrique de tels H-ensembles-G (que j'appellerai aussi H-ensemble-G *virtuel*). Le produit du K-ensemble-H virtuel V différence des ensembles C et D et du H-ensemble-G virtuel U différence de A et B est donné par la règle des signes

$$V \circ U = (C - D) \circ (A - B) = ((C \circ_H A) \coprod (D \circ_H B)) - ((C \circ_H B) \coprod (D \circ_H A))$$

ce qui a un sens car le produit $\circ_H$ est distributif à gauche et à droite par rapport aux réunions disjointes.

C'est une catégorie additive, au sens où pour tous groupes finis G et H, l'ensemble $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q})}(G, H)$ a une structure de groupe abélien, telle que la composition des morphismes soit bi-additive.

Je vais en fait étudier les représentations de cette catégorie dans une catégorie de modules. Je fixe pour cela un anneau R, et je note $\mathcal{F}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ dans la catégorie R-**mod** des R-modules de type fini, au sens des catégories additives (les foncteurs induisent des morphismes de groupes entre groupes d'homomorphismes).

Cette catégorie de foncteurs est une catégorie abélienne, et je dispose des notions classiques d'objets projectifs, injectifs, simples, etc....

Il est facile de vérifier que la catégorie $\mathcal{F}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ est équivalente à la catégorie des foncteurs R-linéaires à valeurs dans R-**mod** de la catégorie $\mathcal{C}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ "produit tensoriel" de $\mathcal{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ par R, i.e. la catégorie dont les objets sont les groupes finis, et telle que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q})}(G,H) = R\otimes \mathcal{H}om_{\mathcal{C}(\mathcal{P},\mathcal{Q})}(G,H)$$

Dans cette catégorie, un morphisme de G dans H est une combinaison linéaire à coefficients dans R de H-ensembles-G, le produit de deux morphismes étant défini par R-linéarité.

3.3 La catégorie $\mathcal{F}_R(\mathcal{P},\mathcal{Q})$

3.3.1 Structure des foncteurs simples

Il résulte de [BO2] que les foncteurs simples peuvent être indexés par des couples (H,V), où H est un groupe fini et V un $ExtH$-module simple: le foncteur simple associé au groupe H et au module V est donné par

$$S_{H,V}(G) = L_{H,V}(G)/K_{H,V}(G)$$

avec $L_{H,V}(G) = \mathcal{H}om(H,G)\otimes_{\mathcal{E}nd(H)} V$, le sous-module $K_{H,V}(G)$ étant l'ensemble des éléments $w=\sum_i \psi_i\otimes v_i$ tels que $\sum_i(\phi\psi_i).v_i = 0$ pour tout $\phi\in\mathcal{H}om(G,H)$.

Comme le groupe H est minimal pour $S_{H,V}$, il en résulte que si $\psi\in\mathcal{H}om(H,G)$ factorise sous la forme $\psi=\alpha\beta$ par un groupe K d'ordre strictement plus petit que celui de H, alors dans $S_{H,V}(G)$

$$\psi\otimes v = S_{H,V}(\alpha)(\beta\otimes v) = 0$$

car $\beta\otimes v = 0$ dans $S_{H,V}(K)$.
Or si $\psi = (G\times H)/L$, pour un sous-groupe L de $G\times H$, alors en notant a (resp. b) une surjection de $p_1(L)$ (resp. de $p_2(L)$) dans $q(L)$ telle que

$$L = \{(g_1,g_2)\in p_1(L)\times p_2(L) \mid a(g_1) = b(g_2)\}$$

je peux factoriser ψ sous la forme

$$\psi = (G\times q(L))/\{(g_1,a(g_1)) \mid g_1\in p_1(L)\}\circ_{q(L)}(q(L)\times H)/\{(b(g_2),g_2) \mid g_2\in p_2(L)\}$$

et si ψ est $\mathcal{P}$-libre-$\mathcal{Q}$, il en est de même des deux facteurs du produit ci-dessus. Si donc ψ ne factorise pas par un groupe d'ordre strictement inférieur à celui de

H, et si ψ est un G-ensemble-H transitif, alors il existe un sous-groupe G_1 de G et une surjection s de G_1 dans H telle que $\operatorname{Ker} s \in \mathcal{P}$, tels que

$$\psi = (G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$$

De plus, si θ est un automorphisme de H, alors

$$\psi \circ_H (H \times H)/\{(\theta(h), h) \mid h \in H\} \approx (G \times H)/\{(g_1, \theta^{-1}s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$$

Donc dans $S_{H,V}(G)$

$$(G \times H)/\{(g_1, \theta^{-1}s(g_1)) \otimes v = (G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes \theta v$$

Remarque: De même, si $x \in G$ et $y \in H$, alors

$$(G \times H)/\{(g_1^x, s(g_1)^y) \mid g_1 \in G_1\} = (G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$$

Si x normalise G_1 et le noyau N_1 de s, i.e. $x \in N_G(G_1, N_1)$, alors il existe un automorphisme ϕ_x de H tel que pour tout $g_1 \in G_1$

$$s({}^x g_1) = \phi_x(s(g_1))$$

et dans ces conditions

$$(G \times H)/\{(g_1^x, s(g_1)^y) \mid g_1 \in G_1\} = (G \times H)/\{(g_1, s({}^x g_1))^y \mid g_1 \in G_1\} = \ldots$$

$$\ldots = (G \times H)/\{(g_1, i_y \phi_x s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}$$

en notant i_y l'automorphisme intérieur associé à y. Donc dans $L_{H,V}(G)$

$$(G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes v = (G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes \phi_x^{-1} i_y^{-1} v$$

Je vois donc que $S_{H,V}(G)$ est engendré par les images des éléments

$$(G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes v$$

où j'ai choisi pour chaque représentant des classes de conjugaison par G de couples (G_1, N_1) de sous-groupes de G tels que $N_1 \in \mathcal{P}$ et $N_1 \trianglelefteq G_1$, le quotient G_1/N_1 étant isomorphe à H, une surjection s_{G_1,N_1} de noyau N_1 de G_1 sur H.

Pour connaître $K_{H,V}(G)$, je dois évaluer les produits

$$(\phi \circ_G (G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}).v$$

pour un morphisme ϕ de G dans H.
Comme le module V est annulé par tout morphisme factorisant par un groupe d'ordre strictement inférieur à celui de H, je peux supposer qu'il existe un sous-groupe G_2 de G et une surjection t de G_2 dans H, de noyau $N_2 \in \mathcal{Q}$ tels que

$$\phi = (H \times G)/\{(t(g_2), g_2) \mid g_2 \in G_2\})$$

Je peux alors calculer le produit

$$(H \times G)/\{(t(g_2), g_2) \mid g_2 \in G_2\} \circ_H (G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{\substack{x \in G_2 \backslash G / G_1 \\ N_2^x \subseteq G_1}} (H \times H)/\{(t(a), s(a^x)) \mid a \in G_2 \cap {}^xG_1\}$$

Soit $u_x = (H \times H)/\{(t(a), s(a^x)) \mid a \in G_2 \cap {}^xG_1\}$. Alors $u_x.v = 0$, sauf si il existe un automorphisme θ de H tel que

$$\{(t(a), s(a^x)) \mid a \in G_2 \cap {}^xG_1\} = \{(\theta(h), h) \mid h \in H\}$$

Ceci impose en particulier que $t(G_2 \cap {}^xG_1) = H$, donc que

$$(G_2 \cap {}^xG_1)N_2 = G_2$$

mais comme $N_2^x \subseteq G_1$, j'ai $G_2 \cap {}^xG_1 = G_2$ et $G_2 \subseteq {}^xG_1$.
Je dois avoir de même $s(G_2^x \cap G_1) = H$ donc

$$(G_2^x \cap G_1)N_1 = G_2^x.N_1 = G_1$$

ou encore $G_2.{}^xN_1 = {}^xG_1$.
De plus, si $a \in N_2 \cap {}^xG_1$, alors $t(a) = 1$, et je dois avoir aussi $s(a^x) = 1$. Donc $s(N_2^x \cap G_1) = 1$ et

$$N_2^x \cap G_1 = N_2^x \subseteq N_1$$

Et en particulier, comme N_1 est dans $\mathcal{P}$, le groupe N_2 est aussi dans $\mathcal{P}$, donc dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.
De même, si $a \in G_2 \cap {}^xN_1$, alors $s(a^x) = 1$, et je dois avoir $t(a) = 1$. Donc $t(G_2 \cap {}^xN_1) = 1$ et

$$G_2 \cap {}^xN_1 \subseteq N_2$$

mais comme $N_2 \subseteq {}^xN_1$, j'ai finalement

$$G_2 \cap {}^xN_1 = N_2 \text{ et } G_2.{}^xN_1 = {}^xG_1$$

Notation: Je résumerai les conditions ci-dessus en écrivant $(G_2, N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)$.

Inversement, si ces conditions sont remplies, alors l'application $uN_2 \mapsto u^x.N_1$ est un isomorphisme λ_x de G_2/N_2 sur G_1/N_1. Si $\overline{t}$ (resp. $\overline{s}$) désigne l'isomorphisme de G_2/N_2 (resp. de G_1/N_1) sur H déduit de t (resp. de s), je note θ_x l'automorphisme de H tel que $\theta_x s(a^x) = t(a)$ pour tout $a \in G_2$. Il peut être défini par

$$\theta_x = \overline{t}\lambda_x^{-1}\overline{s}^{-1}$$

Finalement, je peux donc écrire

$$(\phi \circ_G (G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}).v = \sum_{\substack{x \in G_2\backslash G/G_1 \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_x.v$$

Je remarque alors que si $G_2^x \subseteq G_1$, j'ai $G_2xG_1 = xG_1$, et alors

$$(\phi \circ_G (G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}).v = \sum_{\substack{x \in G/G_1 \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_x.v$$

Je peux alors décomposer la somme sur G/G_1 en une somme sur $G/N_G(G_1, N_1)$ et une somme sur $N_G(G_1, N_1)/G_1$:

$$(\phi \circ_G (G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}).v = \sum_{\substack{x \in G/N_G(G_1,N_1) \\ y \in N_G(G_1,N_1)/G_1 \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_{xy}.v$$

Mais comme pour $y \in N_G(G_1, N_1)$, j'ai

$$\theta_{xy}s(a^{xy}) = \theta_{xy}\phi_y^{-1}s(a^x) = t(a) = \theta_x s(a^x)$$

je vois que $\theta_{xy} = \theta_x\phi_y$.
Alors le groupe $N_G(G_1, N_1)/G_1$ agit sur V (par $y.v = \phi_y(v)$), et en posant

$$Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(v) = \sum_{y \in N_G(G_1,N_1)/G_1} \phi_y.v$$

j'ai

$$(\phi \circ_G (G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}).v = \dots$$
$$\dots = \sum_{\substack{x \in G/N_G(G_1,N_1) \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_x.Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(v)$$

L'élément $\sum_{(G_1,N_1)\, mod.G}(G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes v_{G_1,N_1}$ est donc dans $K_{H,V}(G)$ si et seulement si pour tout $\phi = (H \times G)/\{(t(g_2), g_2) \mid g_2 \in G_2\}$, avec $\mathrm{Ker}\, t = N_2 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, j'ai la relation

$$\sum_{(G_1,N_1)\, mod.G} \sum_{\substack{x \in G/N_G(G_1,N_1) \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_x.Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(v_{G_1,N_1}) = 0$$

Soit alors $T_{H,V}(G)$ la somme directe

$$T_{H,V}(G) = \bigoplus_{(G_1,N_1)} Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(V)$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison de couples (G_1, N_1) tels que $N_1 \in \mathcal{P}$, $N_1 \trianglelefteq G_1$ et $G_1/N_1 \approx H$. Il résulte du raisonnement ci-dessus que l'application de $T_{H,V}(G)$ dans $S_{H,V}(G)$ qui à $w = Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(v)$ associe l'image de $(G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)\} \otimes v$ est bien définie, et surjective, et cette application montre que

$$S_{H,V}(G) \approx T_{H,V}(G)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des éléments v de la forme $v = \sum_{G_1,N_1} v_{G_1,N_1}$ tels que pour tout (G_2, N_2) avec $N_2 \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$,

$$\sum_{\substack{x \in G/N_G(G_1,N_1) \\ (G_2,N_2) \preceq ({}^xG_1, {}^xN_1)}} \theta_x(v_{G_1,N_1}) = 0$$

En particulier dans le cas où $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, si $v = \sum_{G_1,N_1} v_{G_1,N_1} \in \mathcal{R} - \{0\}$, alors je peux prendre pour (G_2, N_2) une paire maximale pour $\preceq$ telle que $v_{G_2,N_2} \neq 0$. La somme ci-dessus se réduit à $v_{G_2,N_2} = 0$, et cette contradiction prouve que $\mathcal{R} = 0$. D'où la

Proposition 6: Soit H un groupe, et V un $RExt(H)$-module simple. Si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, alors pour tout groupe G,

$$S_{H,V}(G) \approx \bigoplus_{(G_1,N_1)} Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(V)$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison de couples (G_1, N_1) de sous-groupes de G tels que $N_1 \trianglelefteq G_1$, $N_1 \in \mathcal{P}$, et $G_1/N_1 \approx H$.

3.3.2 Exemples de foncteurs simples

a) En caractéristique zéro:

Soit K un corps de caractéristique zéro. Je suppose que les familles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont la famille de tous les groupes finis. Je vais évaluer le foncteur simple $S_{1,K}$ pour le groupe G.

Je dois trouver les couples (G_1, N_1) pour lesquels le quotient G_1/N_1 est trivial. Cela revient à classer les sous-groupes G_1 de G à conjugaison près. Comme $Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(K) = K$, il est clair que $S_{1,K}$ s'identifie au foncteur de Burnside.

b) En caractéristique $p > 0$

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$. Je suppose que les familles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont la famille de tous les p-groupes finis. Je vais évaluer le foncteur simple $S_{1,k}$ pour le groupe G.

Je dois trouver les couples (G_1, N_1) pour lesquels N_1 est un p-groupe, le quotient G_1/N_1 étant trivial. Cela revient à classer les p-sous-groupes de G. D'autre part, je dois calculer $Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(1)$, qui est simplement le cardinal $|N_G(G_1, N_1)/G_1| = |N_G(G_1)/G_1|$, qui est non-nul dans k si et seulement si G_1 est un Sylow de son normalisateur, donc un Sylow de G. En d'autre termes, le module $S_{1,k}(G)$ est de dimension 1 sur k, pour tout G.

3.3.3 Action sur les foncteurs simples

La proposition précédente permet d'identifier $S_{H,V}(G)$ avec le quotient $T_{H,V}(G)/\mathcal{R}$. Si G' est un autre groupe, il me reste à expliciter l'application $S_{H,V}(f)$, lorsque f est un G'-ensemble-G de la forme

$$f = (G' \times G)/L$$

pour un sous-groupe L de $G' \times G$.

Soit $e \in S_{H,V}(G)$ provenant de l'élément $Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(w)$ de la composante (G_1, N_1) de $T_{H,V}(G)$. Alors e est l'image dans $S_{H,V}(G)$ de

$$(G \times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes w$$

Or, en posant $s = s_{G_1,N_1}$, j'ai

$$\begin{aligned}((G' \times G)/L) \circ_G ((G \times H)/\{(g_1, s(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}) &= \ldots \\ \ldots = \sum_{\substack{x \in p_2(L)\backslash G/G_1 \\ k_2(L)^x \subseteq G_1}} (G' \times H)/L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\}\end{aligned}$$

Je dois chercher les éléments x pour lesquels le groupe $L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\}$ est conjugué dans $G' \times H$ d'un sous-groupe de la forme $\{(g_x, \theta s'_{G'_x,N'_x}(g_x)) \mid g_x \in G'_x\}$ pour un représentant (G'_x, N'_x) convenable dans G' des classes de conjugaison de couples tel que $N'_x \in \mathcal{P}$ et $G'_x/N'_x \approx H$, et un automorphisme θ de H. Cela revient à dire que

$$k_2(L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\}) = 1 \text{ et } p_2(L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\}) = H$$

Or un élément u est dans $k_2(L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\})$ si et seulement si il existe un élément v tel que $(1, v) \in L$ et $(v^x, u) \in \{(g_1, s(g_1))\}$, i.e. s'il existe $v \in k_2(L) \cap {}^xG_1 = k_2(L)$ tel que $u = s(v^x)$. Donc $k_2(L *{}^{(x,1)}\{(g_1, s(g_1))\}) = 1$ si et seulement si $k_2(L)^x \subseteq N_1$.

De même, pour tout $h \in H$, il doit exister u et v tels que $(u, v) \in L$, avec $v^x \in G_1$ et $s(v^x) = h$. Ceci revient à dire que $s(p_2(L)^x \cap G_1) = H$, donc que $N_1(G_1 \cap p_2(L)^x) = G_1$.

Inversement, si ces conditions sont remplies, alors il existe un unique représentant (G'_x, N'_x), un automorphisme α_x de H, et des éléments $y_x \in G'$ et $h_x \in H$ tels que

$$L *^{(x,1)} \{(g_1, s(g_1))\} = \{(g_x, \alpha_x s'_{G'_x,N'_x}(g_x)) \mid g_x \in G'_x\}^{(y_x,h_x)} = \dots$$

$$\dots = \{(g_x^{y_x}, \alpha_x s'_{G'_x,N'_x}(g_x))^{h_x})\}$$

L'image de e par $S_{H,V}((G' \times G)/L)$ est alors

$$S_{H,V}((G' \times G)/L)(e) = \sum_x Tr_1^{N_{G'}(G'_x,N'_x)/G'_x}(\alpha_x^{-1} w)$$

où la somme porte sur les $x \in p_2(L)\backslash G/G_1$ tels que

$$k_2(L)^x \subseteq N_1 \text{ et } N_1(G_1 \cap p_2(L)^x) = G_1$$

En particulier, cette condition impose que $k_2(L)$ soit dans $\mathcal{P}$, donc dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, et cette remarque montre que le foncteur $S_{H,V}$ est le même pour $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ et $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{P} \cap \mathcal{Q})$.

3.4 Semi-simplicité

Il résulte de l'étude des foncteurs simples que pour étudier la semi-simplicité éventuelle de la catégorie $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, je peux me contenter du cas où $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Je vais montrer ici, que si $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$, et si R est un corps $\mathcal{K}$ de caractéristique 0, alors la catégorie $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ est semi-simple, au sens où un objet indécomposable est simple.

3.4.1 Des idempotents orthogonaux

Notation: Les propriétés exigées de la famille $\mathcal{P}$ assurent l'existence, pour chaque groupe G, d'un plus grand sous-groupe normal de G qui soit dans $\mathcal{P}$. Je noterai $O_{\mathcal{P}}(G)$ ce sous-groupe.

Avec ces notations, si K est un sous-groupe de G, et P un sous-groupe normal de K appartenant à $\mathcal{P}$, je pose

$$\Phi_{K,P}^G = \sum_{\substack{H \trianglelefteq K \\ O_{\mathcal{P}}(H) = P \\ H \; mod. N_G(K,P)}} F_{K,H}^G$$

C'est à priori un élément de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$. Je vais montrer qu'il est dans l'algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})}(G)$, que je noterai $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ pour simplifier:

Lemme 14: Avec les notations ci-dessus

$$\phi^G_{K,P} = \frac{1}{|N_G(K,P)|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ P \subseteq N \trianglelefteq K \\ N \in \mathcal{P}}} |X|\tilde{\chi}]X,K[\tilde{\chi}]P,N[^K t_{X,N}$$

et les $\phi^G_{K,P}$, lorsque (K,P) décrit un système de représentants des classes de conjugaison de couples de sous-groupes de G tels que $P \in \mathcal{P}$ et $P \trianglelefteq K$, sont des idempotents orthogonaux de $\mathcal{E}nd_{K,\mathcal{P}}(G)$, et leur somme est l'élément neutre $(G\times G)/\Delta(G)$.

En effet, j'ai vu que

$$F^G_{K,H} = \frac{1}{|N_G(K,H)|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ H \subseteq N \trianglelefteq K}} |X|\tilde{\chi}]X,K[\tilde{\chi}]H,N[^K t_{X,N}$$

Il en résulte que

$$\Phi^G_{K,P} = \sum_{O_{\mathcal{P}}(H)=P} \frac{|N_G(K,H,P)|}{|N_G(K,P)|}\frac{1}{|N_G(K,H)|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ H \subseteq N \trianglelefteq K}} |X|\tilde{\chi}]X,K[\tilde{\chi}]H,N[^K t_{X,N}$$

Or si $O_{\mathcal{P}}(H) = P$, alors $N_G(K,H,P) = N_G(K,H)$. D'autre part, si H est un sous-groupe normal de K, alors $O_{\mathcal{P}}(H) = H \cap O_{\mathcal{P}}(K)$. Mais le lemme 8, appliqué au treillis $[P,N]^H$ des sous-groupes normaux de K contenant P et contenus dans N, montre que la somme

$$\sum_{\substack{P \subseteq H \trianglelefteq K \\ H \subseteq N \\ H \cap O_{\mathcal{P}}(K) = P}} \tilde{\chi}]H,N[^K$$

est nulle si $N \neq N \cap O_{\mathcal{P}}(K)$, i.e. si N n'est pas un sous-groupe de $O_{\mathcal{P}}(K)$, ou encore si $N \notin \mathcal{P}$. Et si $N \in \mathcal{P}$, alors $k_1(\Delta_{X,N}) = X \cap N \in \mathcal{P}$, et $k_2(\Delta_{X,N}) = N \in \mathcal{P}$. Il en résulte que $\Phi^G_{K,P}$ a bien la forme annoncée, et qu'il appartient à $\mathcal{E}nd_{K,\mathcal{P}}(G)$.
Comme de plus, si (K,H') est conjugué de (K,H), et tel que $O_{\mathcal{P}}(H') = P$, alors il existe $g \in N_G(K,P)$ tel que $(K,H') = (K,H)^g$, les idempotents $F^G_{K,H}$ qui figurent dans la somme $\Phi^G_{K,P}$ sont deux à deux distincts, donc orthogonaux, et $\Phi^G_{K,P}$ est un idempotent. Le même raisonnement prouve que les $\Phi^G_{K,P}$ sont deux à deux orthogonaux, et un calcul simple montre que leur somme est égale à celle des $F^G_{K,H}$. D'où le lemme.

3.4.2 Identification de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$

Je vais montrer que l'algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ est semi-simple, et pour cela, je vais utiliser une démonstration analogue à celle concernant $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$.
Notation: Si P est un sous-groupe normal de K, et si $P \in \mathcal{P}$, je note Φ_P^K l'idempotent $\Phi_{K,P}^K$ de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(K)$. Je remarque que

$$\Phi_P^K = \sum_{\substack{H \trianglelefteq K \\ O_{\mathcal{P}}(H) = P}} F_H^K$$

Lemme 15: Soit L (resp L') un sous-groupe de $K \times K'$ (resp. de $K' \times K$) tel que $k_1(L) \in \mathcal{P}$ (resp. tel que $k_2(L') \in P$). Alors $\Phi_P^K \circ_K (K \times K')/L = 0$, sauf si $k_1(L) \subseteq P$ et $p_1(L) = K$. De même, le produit $(K' \times K)/L' \circ_K \Phi_P^K$ est nul, sauf si $k_2(L') \subseteq P$ et $p_2(L') = K$.

En effet, si le produit $\Phi_P^K \circ_K (K \times K')/L$ est non-nul, alors il existe un sous-groupe normal H de K tel que $O_{\mathcal{P}}(H) = P$, et

$$F_H^K \circ_K (K \times K')/L \neq 0$$

Alors $p_1(L) = K$, et $k_1(L) \subseteq H$. Alors $k_1(L)$ est un sous-groupe normal de K qui est dans $\mathcal{P}$, et en particulier $k_1(L) \subseteq O_{\mathcal{P}}(H) = P$. Le raisonnement pour L' est analogue.

Je peux alors introduire l'analogue des éléments $\alpha_{K,H}$ et $\beta_{K,H}$: je pose $\overline{K} = K/P$, et

$$A_{K,P} = (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\} \circ_K \Phi_P^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K)$$

$$B_{K,P} = (G \times K)/\Delta(K) \circ_K \Phi_P^K \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k, \overline{k}) \mid k \in K\}$$

Alors pour calculer le produit $A_{K,P} \circ_G B_{K',P'}$, je commence par calculer

$$S = \Phi_P^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K) \circ_G (G \times K')/\Delta(K') \circ_K' \Phi_{P'}^{K'}$$

qui est la somme pour $x \in K \backslash G / K'$ de

$$\Phi_P^K \circ_K (K \times K')/\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\} \circ_{K'} \Phi_{P'}^{K'}$$

Un tel produit est nul sauf si

$$p_1(\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\} = K \text{ et } p_2(\{(k, k^x) \mid k \in K \cap {}^xK'\}) = {}^xK'$$

i.e. si $K = {}^xK'$. Je peux donc supposer $K = K'$, et alors

$$S = \sum_{x \in N_G(K)/K} \Phi_P^K \circ_K (K \times K)/\{(k, k^x) \mid k \in K\} \circ_K \Phi_{P'}^K$$

Finalement, j'ai aussi par le lemme 10

$$\Phi_P^K \circ_K (K \times K)/\{(k,k^x) \mid k \in K\} = (K \times K)/\{(k,k^x) \mid k \in K\} \circ_K \Phi_{P^x}^K$$

et il en résulte que le produit $A_{K,P} \circ_G B_{K',P'}$ est nul si les couples (K,P) et (K',P') ne sont pas conjugués par G. Et sinon:

$$A_{K,P} \circ_G B_{K,P} = \sum_{x \in N_G(K,P)/K} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K (K \times K)/\{(k,k^x) \mid k \in K\} \circ_K \ldots$$

$$\ldots \Phi_P^K \circ_K (K \times \overline{K})/\{(k,\overline{k}) \mid k \in K\}$$

De plus

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K (K \times K)/\{(k,k^x) \mid k \in K\} = \ldots$$

$$\ldots = (\overline{K} \times \overline{K})/\{(\overline{k},\overline{k^x}) \mid k \in K\} \circ_{\overline{K}} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\}$$

J'ai alors, généralisant le lemme 11

Lemme 16: Soit P un sous-groupe normal du groupe K, appartenant à $\mathcal{P}$, et $\overline{K} = K/P$. Alors

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K \Phi_P^K = \Phi_1^{\overline{K}} \circ_{\overline{K}} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\}$$

En effet, je sais que

$$\Phi_P^K = \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{X \subseteq K \\ P \subseteq N \trianglelefteq K \\ N \in \mathcal{P}}} |X|\tilde{\chi}]X, K[\tilde{\chi}]P, N[^K t_{X,N}$$

De plus, le produit

$$(\overline{K} \times K)/\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} \circ_K t_{X,N}$$

est nul si $P \not\subseteq X$, et égal à

$$(\overline{K} \times K)/(\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} * \Delta_{X,N})$$

sinon. Le lemme résulte alors du fait que si $P \subseteq N$, en posant $\overline{X} = X/P$ et $\overline{N} = N/P$, j'ai

$$\{(\overline{k},k) \mid k \in K\} * \Delta_{X,N} = \Delta_{\overline{X},\overline{N}} * \{(\overline{k},k) \mid k \in K\}$$

Finalement, le produit $A_{K,P} \circ_G B_{K',P'}$ est nul si les couples (K,P) et (K',P') sont distincts modulo G, et

$$A_{K,P} \circ_G B_{K,P} = \sum_{x \in N_G(K,P)/K} (\overline{K} \times \overline{K})/\{(\overline{k}, \overline{k^x}) \mid k \in K\} \circ_{\overline{K}} \Phi_1^{\overline{K}}$$

De même, comme

$$(K \times \overline{K})/\{(k, \overline{k}) \mid k \in K\} \circ_{\overline{K}} (\overline{K} \times K)/\{(\overline{k}, k) \mid k \in K\}$$

n'est autre que l'élément $t_{K,P}$ de $\mathcal{T}(K)$, j'ai

$$B_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P} = (G \times K)/\Delta(K) \circ_K \Phi_P^K \circ_K t_{K,P} \circ_K \Phi_P^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K)$$

De plus, l'élément Φ_P^K est combinaison linéaire d'éléments $t_{X,N}$, pour $X \subseteq K$ et $P \subseteq N \trianglelefteq K$. Comme

$$t_{X,N} \circ_K t_{K,P} = t_{X \cap K, N.P} = t_{X,N}$$

j'ai finalement $\Phi_P^K \circ_K t_{K,P} = \Phi_P^K$, et

$$B_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P} = (G \times K)/\Delta(K) \circ_K \Phi_P^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K)$$

Comme de plus

$$(G \times K)/\Delta(K) \circ_K t_{X,N}^K \circ_K (K \times G)/\Delta(K) = t_{X,N}^G$$

j'en déduis que

$$B_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P} = |N_G(K,H)/K| \Phi_{K,P}^G$$

Continuant le parallèle avec la démonstration de la semi-simplicité de $\Gamma_{\mathcal{K}}(G)$, je suppose que les couples (K,P) et (K',P') sont tels que

$$\Phi_{K',P'}^G \circ_G \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}} \circ_G \Phi_{K,P}^G \neq 0$$

Alors il existe un G-ensemble-G, que je note X, qui est $\mathcal{P}$-libre-$\mathcal{P}$ et tel que

$$\Phi_{K',P'}^G \circ_G X \circ_G \Phi_{K,P}^G \neq 0$$

En posant $Z = A_{K',P'} \circ_G X \circ_G B_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P}$, j'ai

$$\Phi_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} Z \circ_{\overline{K}} \Phi_1^{\overline{K}} = Z \neq 0$$

par le lemme 0. De plus l'ensemble Z est combinaison linéaire d'ensembles $\mathcal{P}$-libres-$\mathcal{P}$. Il existe donc un sous-groupe L de $\overline{K'} \times \overline{K}$, tel que $k_1(L) \in \mathcal{P}$ et $k_2(L) \in \mathcal{P}$, et tel que

$$\Phi_1^{\overline{K'}} \circ_{\overline{K'}} (\overline{K'} \times \overline{K})/L \circ_{\overline{K}} \Phi_1^{\overline{K}} \neq 0$$

Il en résulte que $p_1(L) = \overline{K'}$, et que $p_2(L) = \overline{K}$. De plus $k_1(L) = k_2(L) = \{1\}$, et alors les groupes $\overline{K}$ et $\overline{K'}$ sont isomorphes à $q(L)$.

Alors si pour tout groupe fini S (à isomorphisme près), je pose

$$C_S = \sum_{\substack{(K,P)\, mod.G \\ P \trianglelefteq K,\ P\in\mathcal{P} \\ K/P\approx S}} \Phi^G_{K,P}$$

j'obtiens des idempotents centraux deux à deux orthogonaux de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$, dont la somme est $(G\times G)/\Delta(G)$.

Alors en calquant toujours la démonstration du théorème 2, je choisis un système $R_{\mathcal{P},S}$ de représentants des classes de conjugaison par G de couples (K,P) de sous-groupes de G tels que $P\in\mathcal{P}$, $P\trianglelefteq K$ et $K/P\approx S$. Pour chaque $(K,P)\in R_{\mathcal{P},S}$, je choisis un isomorphisme $\pi_{K,P}$ de $\overline{K} = K/P$ sur S. Si $x\in N_G(K,P)$, je note encore i_x l'automorphisme de $\overline{K}$ associé, tel que $i_x(\overline{k}) = {}^x\overline{k}$, et $a_{K,P}$ le morphisme de $N_G(K,P)/K$ dans $Ext(S)$ défini par $a_{K,P}(x) = \pi_{K,P}.i_x.\pi^{-1}_{K,P}$.

Je pose alors

$$C_{K,P} = \frac{1}{|N_G(K,P)/K|}B_{K,P}$$

$$\rho_{K,P} = (S\times\overline{K})/\{(\pi_{K,P}(\overline{k}),\overline{k}) \mid k\in K\}$$

$$\rho^*_{K,P} = (\overline{K}\times S)/\{(\overline{k},\pi_{K,P}(\overline{k})) \mid k\in K\}$$

$$\mu_{K,P} = \frac{1}{|N_G(K,P)/K|}\sum_{x\in N_G(K,P)/K}(\overline{K}\times\overline{K})/\{(i_x(\overline{k}),\overline{k}) \mid k\in K\}$$

$$\sigma_{K,P} = \rho_{K,P}\circ_{\overline{K}}\mu_{K,P}\circ_{\overline{K}}\rho^*_{K,P}$$

Le lemme 10 montre que

$$\Phi^{\overline{K}}_1\circ_{\overline{K}}(\overline{K}\times\overline{K})/\{(i_x(\overline{k}),\overline{k}) \mid k\in K\} = (\overline{K}\times\overline{K})/\{(i_x(\overline{k}),\overline{k}) \mid k\in K\}\circ_{\overline{K}}\Phi^{\overline{K}}_1$$

donc que $\Phi^{\overline{K}}_1$ commute pour le produit $\circ_{\overline{K}}$ avec $\mu_{K,P}$. Il en résulte que

$$\sigma_{K,P}\circ_S\Phi^S_1 = \Phi^S_1\circ_S\sigma_{K,P}$$

et ce produit est un idempotent de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(S)$.

Alors si (K,P) et (K',P') sont deux éléments de $R_{\mathcal{P},S}$, et si

$$u\in\Phi^G_{K,P}\circ_G\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)\circ_G\Phi^G_{K',P'}$$

je pose

$$\theta^{K,H}_{K',P'}(u) = \rho_{K,P}\circ_{\overline{K}}A_{K,P}\circ_G u\circ_G C_{K',P'}\circ_{\overline{K'}}\rho_{K',P'}$$

Le calcul de $A_{K,P}\circ_G B_{K,P}$ montre que

$$\mu_{K,P}\circ_{\overline{K}}\Phi^{\overline{K}}_1 = A_{K,P}\circ_G C_{K,P}$$

et celui de $B_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P}$ montre que

$$C_{K,P} \circ_{\overline{K}} A_{K,P} = \Phi^G_{K,P}$$

La transcription mot à mot du calcul du théorème 2 montre alors que

$$\theta^{K,P}_{K',P'}(u) \in \sigma_{K,P} \circ_S \Phi^S_1 \circ_S \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(S) \circ_S \sigma_{K',P'} \circ_S \Phi^S_1$$

Inversement, si $v \in \sigma_{K,P} \circ_S \Phi^S_1 \circ_S \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(S) \circ_S \sigma_{K',P'} \circ_S \Phi^S_1$, je pose

$$\phi^{K,P}_{K',P'}(v) = C_{K,P} \circ_{\overline{K}} \rho^*_{K,P} \circ_S v \circ_S \rho_{K',P'} \circ_{\overline{K'}} A_{K',P'}$$

et le même calcul que dans le théorème 2 montre que

$$\phi^{K,P}_{K',P'}(v) \in \Phi^G_{K,P} \circ_G \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G) \circ_G \Phi^G_{K',P'}$$

Elle montre aussi que les applications $\theta^{K,P}_{K',P'}$ et $\phi^{K,P}_{K',P'}$ sont des bijections inverses l'une de l'autre, et que pour trois éléments (K,P), (K',P') et $(K", P")$ de $R_{\mathcal{P},S}$, j'ai

$$\theta^{K,P}_{K',P'}(u) \circ_S \theta^{K',P'}_{K",P"}(u') = \theta^{K,P}_{K",P"}(u \circ_G u')$$

Finalement, en notant E_S l'algèbre $\Phi^S_1 \circ_S \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}} \circ_S \Phi^S_1$, et W_S le E_S-module

$$W_S = \oplus_{(K,P)\in R_{\mathcal{P},S}} E_S \circ_S \sigma_{K,P}$$

les applications θ et ϕ établissent des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre l'algèbre $C_S \circ_G \mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ et l'algèbre $\mathrm{End}_{E_S}(W_S)$.

Il reste à voir que si L est un sous-groupe de $S \times S$ tel que $k_1(L) \in \mathcal{P}$ et $k_2(L) \in \mathcal{P}$, et tel que

$$\Phi^S_1 \circ_S (S \times S)/L \circ_S \Phi^S_1 \neq 0$$

alors les deux projections de L sont égales à S, et les deux groupes $k_1(L)$ et $k_2(L)$ sont triviaux. Ceci montre que l'application qui à $\zeta \in Ext(S)$ associe

$$Z_\zeta = \Phi^S_1 \circ_S (S \times S)/\{(\zeta(s), s) \mid s \in S\} \circ_S \Phi^S_1$$

se prolonge en une surjection de l'algèbre $\mathcal{K}Ext(S)$ sur E_S. Finalement, comme $\Phi^S_1 = C_{S,1}$ est central dans E_S, et comme

$$\Phi^S_1 = \frac{1}{|S|} \sum_{\substack{X \subseteq S \\ N \trianglelefteq S \\ N \in \mathcal{P}}} |X|\tilde{\chi}]X, S[\tilde{\chi}]1, N[^S t^S_{X,N}$$

je vois que Z_ζ est combinaison linéaire de termes de la forme

$$t^S_{X,N} \circ_S (S \times S)/\{(\zeta(s), s) \mid s \in S\} = (S \times S)/L_{X,N,\zeta}$$

où j'ai posé $L_{X,N,\zeta} = \Delta_{X,N} * \{(\zeta(s), s) \mid s \in S\}$. Or si les deux projections de $L_{X,N,\zeta}$ sont égales à S, alors $X = S$. Et si $k_1(L_{X,N,\zeta}) = k_2(L_{X,N,\zeta}) = \{1\}$, alors $X \cap N = \{1\}$, et N est trivial. La somme Z_ζ comporte donc un seul terme $(S \times S)/L$ pour lequel $p_1(L) = p_2(L) = S$ et $k_1(L) = k_2(L) = \{1\}$, et ce terme est égal à $(S \times S)/\{(\zeta(s), s) \mid s \in S\}$.

Le morphisme prolongeant l'application $\zeta \mapsto Z_\zeta$ est donc injectif, ce qui prouve que l'algèbre E_S est isomorphe à $\mathcal{K}Ext(S)$. Finalement, le théorème 2 se généralise sous-la forme suivante

Proposition 7: Si $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0 ou $p > 0$ ne divisant pas $|G|$, alors l'algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ est isomorphe au produit direct des algèbres

$$\mathbf{End}_{Ext(S)}(\oplus_{(K,P)\in R_{\mathcal{P},S}}\mathbf{Ind}_{a_{K,P}(N_G(K,P)/K)}^{Ext(S)}\mathcal{K})$$

lorsque S décrit les classes d'isomorphisme de groupes finis, l'ensemble $R_{\mathcal{P},S}$ étant un système de représentants des classes de conjugaison par G de couple (K, P) de sous-groupes de G tels que $P \in \mathcal{P}$, $P \trianglelefteq K$ et $K/P \approx S$, le groupe $a_{K,P}(N_G(K,P)/K)$ étant l'image de $N_G(K,P)/K$ dans $Ext(S)$ déduite d'un tel isomorphisme.

Corollaire: Si $\mathcal{K}$est de caractéristique 0 ou ne divisant pas $|Ext(S)|$, pour $S = K/P$, pour K sous-groupe de G et $P \in \mathcal{P}$, alors l'algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ est semi-simple.

3.4.3 Résidus

Si M est un objet de $\mathcal{F}_\mathcal{K}(\mathcal{P},\mathcal{P})$, et si G est un groupe fini, je définis le résidu $\overline{M}(G)$ de M en G par la formule

$$\overline{M}(G) = \Phi_1^G \circ_G M(G)$$

cette notation désignant par définition l'image de l'application $M(\Phi_1^G)$. C'est un $\mathcal{K}Ext(G)$-module. Si $P \trianglelefteq K \subseteq G$, le groupe $N_G(K,P)/K$ agit sur $\overline{M}(K/P)$, et je pose

$$\hat{M}(G) = (\oplus_{(K,P)}\overline{M}(K/P))_G = \oplus_{(K,P)\,mod.G}\overline{M}(K/P)_{N_G(K,P)/K}$$

où les sommes portent sur les couples (K, P) de sous-groupes de G tels que $P \trianglelefteq K$ et $P \in \mathcal{P}$. C'est aussi un $\mathcal{K}Ext(G)$-module.

Je définis une application a de $M(G)$ dans $\hat{M}(G)$ par

$$a(u) = \oplus_{(K,P)}A_{K,P} \circ_G u$$

J'ai de même une application b de $\hat{M}(G)$ dans $M(G)$ définie par

$$b(v_{(K,P)}) = B_{K,P} \circ_{(K/P)} v$$

Les calculs de la section précédente et le fait que, puisque $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0, j'ai

$$\overline{M}(K/P)_{N_G(K,P)/K} \approx \overline{M}(K/P)^{N_G(K,P)/K} = Tr_1^{N_G(K,P)/K}(\overline{M}(K/P))$$

montrent alors que a et b sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Proposition 8: Soit M un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})$, et G est un groupe fini. Alors

$$M(G) \approx \bigoplus_{(K,P)\, mod.G} \overline{M}(K/P)^{N_G(K,P)/K}$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison de couples (K,P) de sous-groupes de G tels que $P \trianglelefteq K$ et $P \in \mathcal{P}$.

Remarque: Comme l'idempotent $\Phi_{K,P}^G$ est combinaison linéaire d'éléments $t_{X,N}$, pour $X \subseteq K$ et $P \subseteq N$, et comme $q(\Delta_{X,N}) \approx X/(X \cap N)$, il en résulte que $t_{X,N}$ factorise par le groupe $X/(X \cap N)$ d'ordre strictement plus petit que $|G|$, sauf si $X = G$ et $N = \{1\}$, auquel cas $K = G$ et $P = \{1\}$. Ainsi, si $(K,P) \neq (G,1)$, tout élément de $\Phi_{K,P}^G \circ_G M(G)$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $M(f)(u)$, pour des groupes H tels que $|H| < |G|$, des éléments $u \in M(H)$ et des morphismes f de H dans G. Comme inversement, j'ai $\Phi_1^G \circ_G f = 0$ pour tout morphisme de ce type, je vois que $\overline{M}(G)$ s'identifie au quotient de $M(G)$ par la somme des $M(f)(M(H))$, pour des groupes H d'ordre strictement inférieur à celui de G, et des morphismes f de H dans G.

Un raisonnement analogue montre que $\overline{M}(G)$ est l'ensemble des éléments $u \in M(G)$ tels que $M(f)(u) = 0$ pour tout groupe H d'ordre strictement inférieur à celui de G et tout morphisme f de G dans H.

3.4.4 Décomposition

Soit Γ un groupe fini. Si M est un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})$, et G un groupe fini, je note $M_\Gamma(G)$ la partie de $\hat{M}(G)$ correspondant aux couples (K,P) tels que $K/P \approx \Gamma$, c'est-à-dire

$$M_\Gamma(G) = \bigoplus_{\substack{(K,P)\, mod.G \\ K/P \approx \Gamma}} \overline{M}(K/P)_{N_G(K,P)/K} = \ldots$$

$$\ldots = \bigoplus_{\substack{(K,P)\, mod.G \\ K/P \approx \Gamma}} \mathcal{B}_{K,P} \circ_{K/P} A_{K,P} \circ_G M(G) = C_\Gamma^G \circ_G M(G)$$

avec

$$C_\Gamma^G = \mathcal{C}_\Gamma = \sum_{\substack{(K,P)\, mod.G \\ K/P \approx \Gamma}} \Phi_{K,P}^G$$

Alors M_Γ est un sous-foncteur de M: en effet, si G' est un autre groupe, si f est un G'-ensemble-G, et si pour un autre groupe fini Γ' , j'ai

$$C_{\Gamma'}^{G'} \circ_{G'} f \circ_G C_\Gamma^G \neq 0$$

alors il existe des couples (K',P') et (K,P) avec $K' \subseteq G'$ et $K'/P' \approx \Gamma'$, et $K \subseteq G$ et $K/P \approx \Gamma$, tels que

$$Z = A_{K',P'} \circ_{G'} f \circ_G \Phi_{K,P} \neq 0$$

Alors Z est un (K'/P')-ensemble-(K/P) virtuel non-nul, combinaison linéaire d'ensembles $\mathcal{P}$-libres-$\mathcal{P}$, tel que

$$Z = \Phi_1^{K'/P'} \circ_{(K'/P')} Z \circ_{(K/P)} \Phi_1^{K/P}$$

Dans ces conditions, j'ai vu que $K'/P' \approx K/P$, et donc $\Gamma' = \Gamma$, ce qui montre que $M(f)(M_\Gamma(G)) \subseteq M_\Gamma(G')$. Donc M_Γ est un sous-foncteur de M, et M est la somme directe des M_Γ, lorsque Γ décrit les classes d'isomorphisme de groupes finis.

De plus, si G est un groupe tel que $\overline{M_\Gamma}(G) \neq 0$, alors $\Phi_1^G \circ_G C_\Gamma^G \neq 0$, et comme $\Phi_1^G = \underline{C_G^G}$, j'en déduis que G est isomorphe à Γ. Le seul résidu non-nul de M_Γ est donc $\overline{M_\Gamma}(\Gamma) = M_\Gamma(\Gamma)$, car Γ est un groupe minimal pour M_Γ, et ce dernier n'est autre que $\Phi_1^\Gamma \circ_\Gamma M(\Gamma) = \overline{M}(\Gamma)$.

D'autre part, si H est un groupe et V un $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(H)$-module simple, je sais définir le foncteur simple $S_{H,V}$. Je peux supposer que H est un groupe minimal pour $S_{H,V}$, ce qi revient à dire que V est un $\mathcal{K}Ext(H)$-module simple. Le foncteur $S_{H,V}$ est le quotient du foncteur $L_{H,V}$ défini par

$$L_{H,V}(G) = \mathcal{H}om(H,G) \otimes_{\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(H)} V$$

par son unique sous-foncteur maximal. J'ai montré que l'application

$$(G\times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\} \otimes w \in L_{H,V}(G) \mapsto Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(w)$$

passe au quotient en un isomorphisme de $S_{H,V}(G)$ sur $\oplus(G_1,N_1)Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(V)$, la somme directe portant sur les classes de conjugaison de couples (G_1,N_1) tels que $N_1 \in \mathcal{P}$, $N_1 \trianglelefteq G_1$, et $G_1/N_1 \approx H$.
Or si $Tr_1^{N_G(G_1,N_1)/G_1}(w) = 0$, comme $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0, je sais que w est somme de vecteurs de la forme $\phi_n.v - v$, pour des vecteurs $v \in V$ et des automorphismes ϕ_n de H provenant d'éléments n de $N_G(G_1,N_1)$. Et comme dans $L_{H,V}(G)$, j'ai

$$(G\times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}\otimes\phi_n.v = (G\times H)/\{(g_1, s_{G_1,N_1}(g_1)) \mid g_1 \in G_1\}\otimes v$$

je vois que $w = 0$ dans $L_{H,V}(G)$, ce qui prouve que $L_{H,V}(G) = S_{H,V}(G)$, donc que $L_{H,V} = S_{H,V}$. De plus, si M est un foncteur quelconque,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{F}_\mathcal{K}(\mathcal{P},\mathcal{P})}(L_{H,V}, M) = \mathcal{H}om_{\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(H)}(V, M(H))$$

Comme V est un $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(H)$-module projectif (comme l'algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ est semi-simple, tous les $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(G)$ sont projectifs), et comme le foncteur $M \mapsto M(H)$ est exact, je vois que le foncteur $L_{H,V} = S_{H,V}$ est un objet projectif de $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})$.

Le raisonnement précédent montre que si V est un $\mathcal{E}nd_{\mathcal{K},\mathcal{P}}(H)$-module (non-nécessairement simple), le foncteur $S_{H,V} = L_{H,V}$ est semi-simple et projectif. En particulier, pour tout groupe fini Γ, le foncteur $S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}$ est un foncteur semi-simple et projectif, et l'application identique de $\overline{M}(\Gamma)$ dans $M_\Gamma(\Gamma)$ donne par adjonction un morphisme λ de $S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}$ dans M_Γ, qui est l'identité en évaluation au groupe Γ.

De plus, je sais que pour tout groupe G,

$$S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}(G) \approx \bigoplus_{\substack{K/P \approx \Gamma \\ (K,P)\, mod.G}} Tr_1^{N_G(K,P)/K}(\overline{M}(\Gamma)) \approx \dots$$

$$\dots \bigoplus_{\substack{K/P \approx \Gamma \\ (K,P)\, mod.G}} \overline{M}(K/P)^{N_G(K,P)/K} \approx \oplus_{(K,P)\, mod.G} \overline{M_\Gamma}(K/P)^{N_G(K,P)/K} \approx M_\Gamma(G)$$

Si je sais que λ est surjectif, alors λ sera un isomorphisme. Or le groupe Γ est minimal pour $S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}$ et pour M_Γ. Donc λ_G est nul si $|G| < |\Gamma|$, donc un isomorphisme, et c'est aussi un isomorphisme si $G \approx \Gamma$. Soit alors G un groupe d'ordre minimal tel que λ_G ne soit pas surjectif. Comme G n'est pas isomorphe à Γ, je sais que $\overline{M_\Gamma}(G) = 0$. Alors tout élément w de $M(G)$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $M_\Gamma(f)(u)$, pour des groupes H d'ordre strictement plus petit que celui de G, des éléments $u \in M_\Gamma(H)$ et des morphismes f de H dans G. Comme λ_H est surjectif, il existe $v \in S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}(H)$ tel que $v = \lambda_H(u)$, et alors

$$M_\Gamma(f)(u) = M_\Gamma(f)\lambda_H(v) = \lambda_G S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}(f)(v)$$

et $M_\Gamma(f)(u)$ est dans l'image de λ_G, qui est donc surjective. Cette contradiction prouve que λ_G est surjective pour tout G, donc que c'est un isomorphisme. En particulier, le foncteur M_Γ est semi-simple, et le foncteur M l'est aussi. Ainsi tout objet de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})$ est semi-simple. Finalement, j'ai prouvé le

Théorème 3: Si $\mathcal{K}$ est un corps de caractéristique 0, alors la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}(\mathcal{P},\mathcal{P})$ est semi-simple: le foncteur M se décompose en

$$M \approx \oplus_\Gamma S_{\Gamma,\overline{M}(\Gamma)}$$

la somme portant sur les classes d'isomorphisme de groupes finis.

4 Applications

4.1 Foncteurs de Mackey

4.1.1 Composition

Une des définitions possibles des foncteurs de Mackey est la suivante: soit R un anneau commutatif. Un foncteur de Mackey M pour le groupe G, à valeurs dans R-**mod**, est un bifoncteur de G-**ens** dans R-**mod**, c'est-à-dire un couple de foncteurs (M^*, M_*) de G-**ens** dans R-**mod**, avec M^* contravariant et M_* covariant, qui coïncident sur les objets (i.e. $M^*(X) = M_*(X) = M(X)$ pour tout G-ensemble X), et possédant les deux propriétés suivantes:
1) Si X et Y sont des G-ensembles, soient i_X et i_Y les injections respectives de X et Y dans $X \coprod Y$. Alors les applications $M^*(i_X) \oplus M^*(i_Y)$ et $M_*(i_X) \oplus M_*(i_Y)$ sont des isomorphismes de R-modules inverses l'un de l'autre de $M(X \coprod Y)$ dans $M(X) \oplus M(Y)$.
2) Si

$$\begin{array}{ccccc} & & \gamma & & \\ & T & \to & Y & \\ \delta & \downarrow & & \downarrow & \alpha \\ & & \beta & & \\ & Z & \to & X & \end{array}$$

est un diagramme cartésien de G-ensembles, alors $M^*(\beta).M_*(\alpha) = M_*(\delta).M^*(\gamma)$.

Soit alors H un autre groupe, et F un foncteur de G-**ens** dans H-**ens**. Si M est un foncteur de Mackey pour le groupe H, et si X est un G-ensemble, je pose

$$(M \circ F)(X) = M(F(X))$$

De même, si Y est un H-ensemble, et f un morphisme de H-ensembles de X dans Y, je pose

$$(M \circ F)^*(f) = M^*(F(f)) \text{ et } (M \circ F)_*(f) = M_*(F(f))$$

J'ai ainsi défini un bifoncteur sur les G-ensembles.

Proposition 9: Si M est un foncteur de Mackey pour le groupe H, et F un foncteur de G-ens dans H-ens possédant les propriétes 1) et 2) du théorème 1), alors $M \circ F$ est un foncteur de Mackey pour le groupe G.

En effet, j'ai le diagramme commutatif suivant de G-ensembles:

$$\begin{array}{ccccc} & F(i_X) & & F(i_Y) & \\ F(X) & \to & F(X \coprod Y) & \leftarrow & F(Y) \\ & \searrow & \uparrow f & \swarrow & \\ & i_{F(X)} & F(X) \coprod F(Y) & i_{F(Y)} & \end{array}$$

où f est l'application $F(i_X)\coprod F(i_Y)$. En prenant l'image par M^* et M_* de ce diagramme, j'obtiens le diagramme commutatif suivant de R-modules:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & M\circ F(X\coprod Y) \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "\beta"] & & S \\
& M(F(X)\coprod F(Y)) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr] & & M(F(X)\coprod F(Y)) \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

avec

$$S = M\circ F(X)\oplus M\circ F(Y)$$

$$a = (M\circ F)_*(i_X)\oplus (M\circ F)_*(i_Y)$$

$$b = (M\circ F)^*(i_X)\oplus (M\circ F)^*(i_Y)$$

$$\gamma = M_*(i_{F(X)})\oplus M_*(i_{F(Y)})$$

$$\delta = M^*(i_{F(X)})\oplus M^*(i_{F(Y)})$$

$$\alpha = M_*(F(i_X)\coprod F(i_Y))$$

$$\beta = M^*(F(i_X)\coprod F(i_Y))$$

Or si M est un foncteur de Mackey, et si ϕ est un isomorphisme de U sur V, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] & U \arrow[d, "\phi"] \\
U \arrow[r, "\phi"] & V
\end{tikzcd}$$

est cartésien, donc $M^*(\phi).M_*(\phi) = M_*(Id).M^*(Id) = Id$. Il en résulte que $M^*(\phi) = (M_*(\phi))^{-1}$. Comme F possède la propriété 1), l'application $F(i_X)\coprod F(i_Y)$ est un isomorphisme, et le produit $\beta.\alpha$ est donc l'identité. Alors le produit des flèches en oblique du diagramme précédent vaut

$$\delta.\beta.\alpha.\gamma = (M^*(i_{F(X)})\oplus M^*(i_{F(Y)})).(M_*(i_{F(X)})\oplus M_*(i_{F(Y)})$$

qui est l'identité si M est un foncteur de Mackey. Donc

$$((M\circ F)^*(i_X)\oplus (M\circ F)^*(i_Y)).((M\circ F)_*(i_X)\oplus (M\circ F)_*(i_Y)) = Id$$

et un raisonnement analogue montre que

$$((M\circ F)_*(i_X)\oplus (M\circ F)_*(i_Y)).((M\circ F)^*(i_X)\oplus (M\circ F)^*(i_Y))) = Id$$

et le foncteur $M\circ F$ possède la première propriété des foncteurs de Mackey.

Pour la seconde, si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \gamma & \\ T & \rightarrow & Y \\ \delta\ \downarrow & & \downarrow\ \alpha \\ & \beta & \\ Z & \rightarrow & X \end{array}$$

est cartésien, alors comme F possède la propriété 2), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F(\gamma) & \\ F(T) & \rightarrow & F(Y) \\ F(\delta)\ \downarrow & & \downarrow\ F(\alpha) \\ & F(\beta) & \\ F(Z) & \rightarrow & F(X) \end{array}$$

l' est aussi, et puisque M est un foncteur de Mackey, j'ai alors

$$M^*(F(\beta)).M_*(F(\alpha)) = M_*(F(\delta)).M^*(F(\gamma))$$

ce qui montre que $M \circ F$ est bien un foncteur de Mackey.

4.1.2 Identification

Notation: Si G et H sont des groupes, si A est un H-ensemble-G, et M un foncteur de Mackey pour le groupe H, je noterai $M \circ A$ le foncteur de Mackey pour G défini par composition de M avec le foncteur $A \circ_G -$.
Pour interpréter ce foncteur en termes plus classiques, je remarque d'abord que le foncteur $M \circ (A \coprod B)$ s'identifie à la somme directe $(M \circ A) \oplus (M \circ B)$. Il suffit donc de considérer le cas où A est isomorphe à $(H \times G)/L$, pour un sous-groupe L de $H \times G$. Alors si X est un G-ensemble, j'ai

$$(M \circ A)(X) = M(A \circ_G X) = M(\mathrm{Ind}_{p_1(L)}^H X^{k_2(L)})$$

Or si G' est un sous-groupe de G, alors la restriction de M à G' peut être définie par

$$(\mathrm{Res}_{G'}^G)M(X') = M(\mathrm{Ind}_{G'}^G X')$$

De même pour l'induction des foncteurs de Mackey, j'ai

$$(\mathrm{Ind}_{G'}^G M')(X) = M(\mathrm{Res}_{G'}^G X)$$

D'autre part, si N est un sous-groupe normal de G, alors l'inflation des foncteurs de Mackey du groupe $G' = G/N$ au groupe G peut être définie par

$$(\mathrm{Inf}_{G'}^G M')(X) = M(X^N)$$

Inversement, je noterai $\rho^G_{G'}$ la "coinflation" des foncteurs de Mackey du groupe G au groupe G', définie par

$$(\rho^G_{G'}M)(X') = M(\mathrm{Inf}^G_{G'}X')$$

Enfin, en notant θ_L l'isomorphisme canonique entre $p_1(L)/k_1(L)$ et $p_2(L)/k_2(L)$ déduit du groupe L, et $M \mapsto \theta(M)$ le transport par isomorphisme d'un foncteur de Mackey, je vois que le foncteur $M \circ A$ s'identifie à

$$M \circ A \approx \mathrm{Ind}^G_{p_2(L)}\mathrm{Inf}^{p_2(L)}_{p_2(L)/k_2(L)}\theta_L(\rho^{p_1(L)}_{p_1(L)/k_1(L)}\mathrm{Res}^H_{p_1(L)}M)$$

4.1.3 Fonctorialité

J'ai vu que si le foncteur F de G-**ens** dans H-**ens** possédant les propriétes 1) et 2), alors F induit un foncteur entre les catégories de foncteurs de Mackey correspondantes. Une question naturelle est alors de savoir si cette construction est fonctorielle en F: en d'autres termes, si F' est un autre foncteur de G-**ens** dans H-**ens** possédant les propriétes 1) et 2), si θ un morphisme de foncteurs de F' dans F, et si M est un foncteur de Mackey pour le groupe H, à quelle condition θ induit-il un homomorphisme de foncteurs de Mackey de $M \circ F$ dans $M \circ F'$?

J'ai deux manières d'associer à θ un morphisme de foncteurs de Mackey éventuel: la première consiste à poser, pour un G-ensemble-X

$$\theta^*_X = M^*(\theta_X)$$

c'est une application de $(M \circ F)(X)$ dans $(M \circ F')(X)$, et l'ensemble de ces applications est susceptible de définir un morphisme θ^* de foncteurs de Mackey de $M \circ F$ dans $M \circ F'$.
Inversement, je peux poser

$$\theta_{*X} = M_*(\theta_X)$$

C'est une application de $(M \circ F')(X)$ dans $(M \circ F)(X)$, définissant éventuellement un morphisme θ_* de foncteurs de Mackey de $M \circ F'$ dans $M \circ F$.
Pour savoir si θ^* est un morphisme de foncteurs de Mackey, je dois vérifier que si $f : X \to Y$ est un morphisme de G-ensembles, alors les carrés

$$\begin{array}{ccccc} & & M_*(F(f)) & & \\ & M \circ F(X) & \rightarrow & M \circ F(Y) & \\ \theta^*_X & \downarrow & & \downarrow & \theta^*_Y \\ & & M_*(F'(f)) & & \\ & M \circ F'(X) & \rightarrow & M \circ F'(Y) & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} & & M^*(F(f)) & & \\ & M \circ F(X) & \leftarrow & M \circ F(Y) & \\ \theta^*_X & \downarrow & & \downarrow & \theta^*_Y \\ & & M^*(F'(f)) & & \\ & M \circ F'(X) & \leftarrow & M \circ F'(Y) & \end{array}$$

commutent. Pour le second, c'est facile, car

$$\theta_X^* M^*(F(f)) = M^*(\theta_X)M^*(F(f)) = M^*(F(f)\theta_X) = \ldots$$

$$\ldots = M^*(\theta_Y F'(f)) = M^*(F'(f))M^*(\theta_Y) = M^*(F'(f))\theta_Y^*$$

Pour faire commuter le premier carré, il semble par contre nécessaire d'imposer à θ la condition (C) suivante: si X et Y sont des G-ensembles, et f un morphisme de X dans Y, alors le carré

$$\begin{array}{ccccc} & & F'(f) & & \\ & F'(X) & \rightarrow & F'(Y) & \\ \theta_X & \downarrow & & \downarrow & \theta_Y \\ & & F(f) & & \\ & F(X) & \rightarrow & F(Y) & \end{array}$$

est cartésien. Dans ces conditions en effet, comme M est un foncteur de Mackey, j'ai bien

$$M_*(F'(f))\theta_X^* = M_*(F'(f))M^*(\theta_X) = M^*(\theta_Y)M_*(F(f)) = \theta_Y^* M_*(F(f))$$

ce qui prouve que θ^* est un morphisme de foncteurs de Mackey. Un raisonnement analogue montre que si (C) est vérifiée, alors θ_* est un morphisme de foncteurs de Mackey. D'où la

Proposition 10: Soit θ est un morphisme de foncteurs de F' dans F vérifiant la condition (C). Si M est un foncteur de Mackey pour H, alors θ^* est un morphisme de foncteurs de Mackey de $M \circ F$ dans $M \circ F'$, et θ_* est un morphisme de foncteurs de Mackey de $M \circ F'$ dans $M \circ F$.

Par le théorème 1), je peux supposer que F est le foncteur $U \circ_G -$ et F' le foncteur $U' \circ_G -$, pour des H-ensembles-G convenables, notés U et U'. Il est naturel de se demander à quelle condition un morphisme f de H-ensembles-G de U' dans U induit un morphisme de foncteurs $f \circ_G -$ de F' dans F vérifiant la condition (C).
Si X est un G-ensemble, la seule définition raisonnable de l'application $f \circ_G X$ de $U' \circ_G X$ dans $U \circ_G X$ est la suivante

$$(f \circ_G X)(u' \circ_G x) = f(u') \circ_G x$$

Malheureusement, rien ne dit que si ${}_{u'}G \subseteq G_x$, alors ${}_{f(u')}G \subseteq G_x$, donc que $f(u') \circ_G x \in U \circ_G X$. Une façon de s'en assurer est d'imposer pour tout $u' \in U'$ l'égalité des stabilisateurs ${}_{u'}G = {}_{f(u')}G$, ce qui revient à dire que la restriction de f à chaque orbite à droite de G sur U' est injective.

Dans ces conditions, je peux définir l'application $f \circ_G X$ de $U' \circ_G X$ dans $U \circ_G X$. Si a est un morphisme de G-ensembles de X dans Y, il est clair que le carré

$$\begin{array}{ccc} U' \circ_G X & \xrightarrow{U' \circ_G a} & U' \circ_G Y \\ {\scriptstyle f \circ_G X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \circ_G Y} \\ F(X) & \xrightarrow{U \circ_G a} & F(Y) \end{array}$$

commute, car

$$(U \circ_G a).(f \circ_G X)(u' \circ_G x) = (U \circ_G a)(f(u') \circ_G x) = f(u') \circ_G a(x) = \ldots$$

$$\ldots = (f \circ_G Y)((u' \circ_G a)(x)) = (f \circ_G Y).(U' \circ_G a)(u' \circ_G x)$$

Ce carré est de plus cartésien: si en effet les éléments $u' \circ_G y \in U' \circ_G Y$ et $u \circ_G x \in U \circ_G X$ sont tels que

$$(f \circ_G Y)(u' \circ_G y) = f(u') \circ_G y = (U \circ_G a)(u \circ_G x) = u \circ_G a(x)$$

alors il existe $g \in G$ tel que $f(u') = u.g$ et $y = g^{-1}.a(x)$. Alors l'élément $u' \circ_G g^{-1}x$ ne dépend pas du choix d'un tel g, car si $u.g' = u$, alors $g'^{-1}.a(x) = a(g'^{-1}.x) = a(x)$, car $u \circ_G x \in U \circ_G X$. Il est de plus dans $U' \circ_G X$, car si $g' \in G$ est tel que $u'.g' = u'$, alors

$$u.g = f(u') = f(u'.g') = f(u').g' = u.(gg')$$

donc $u = u.{}^g g'$, et comme $u \circ_G x \in U \circ_G X$, j'ai ${}^g g'.x = x$, ou encore $g'.(g^{-1}.x) = g^{-1}.x$.
Enfin j'ai bien

$$(U' \circ_G a)(u' \circ_G g^{-1}x) = u' \circ_G a(g^{-1}x) = u' \circ_G y$$

et

$$(f \circ_G X)(u' \circ_G g^{-1}x) = f(u') \circ_G g^{-1}x = u.g \circ_G g^{-1}x = u \circ_G x$$

Inversement, si $v \circ_G z$ est un élément de $U' \circ_G X$ dont les images par $U' \circ_G a$ et $f \circ_G X$ sont respectivement $u' \circ_G y$ et $u \circ_G x$, je peux écrire

$$v \circ_G a(z) = u' \circ_G y \text{ et } f(v) \circ_G z = u \circ_G x$$

Il existe donc $g \in G$ tel que $f(v).g = u$ et $g^{-1}.z = x$. Et comme $v.g \circ_G g^{-1}.z = v \circ_G z$, je peux supposer $g = 1$, i.e. $f(v) = u$ et $z = x$. Alors il existe $g' \in G$ tel que $v.g' = u'$ et $g'^{-1}.a(z) = y$. Alors j'ai bien $f(u') = f(v.g') = u.g'$ et $y = g'^{-1}.a(x)$, donc $v \circ_G z$ est égal à l'élément défini précédemment.
Donc si f est un morphisme de H-ensembles-G de U' dans U qui est injectif sur

les orbites à droite de G sur U', je lui associe un morphisme de foncteurs $f \circ_G -$ de $U' \circ_G -$ dans $U \circ_G -$, et ce morphisme vérifie (C).

Je vais montrer inversement que si θ est un morphisme de foncteurs vérifiant (C) de $F' = U' \circ_G -$ dans $F = U \circ_G -$, alors θ provient naturellement d'un morphisme de H-ensembles-G de U' dans U, qui est de plus injectif sur chaque orbite à droite de G sur U'.
Je note tout d'abord que la condition (C) impose la structure de $F'(X)$, lorsque F, $F'(pt)$ et θ_{pt} sont connus. En effet, le diagramme

$$\begin{array}{cccc} & F'(X) & \xrightarrow{F'(p_X)} & F'(pt) & \\ \theta_X & \downarrow & & \downarrow & \theta_{pt} \\ & F(X) & \xrightarrow{F(p_X)} & F(pt) & \end{array}$$

doit être cartésien, donc $F'(X)$ est isomorphe à la limite projective du système formé par les trois autres ensembles.
De plus, si $F = U \circ_G -$, alors $F(pt)$ s'identifie narurellement à U/G. Soit alors

$$A = \{(u, u'G) \in U \times U'/G \mid uG = \theta_{pt}(u'G)\}$$

Je fais de A un H-ensemble-G en posant

$$h.(u, u'G).g = (h.u.g, h.u'G)$$

pour $(h, g) \in H \times G$ et $(u, u'G) \in A$.
La première projection π est alors un morphisme de H-ensembles-G de A dans U, et la seconde π' factorise par un isomorphisme ϕ de H-ensembles de A/G sur U'/G, défini par $\phi((u, u'G)G) = u'G$: en effet, si $u'G \in U'/G$, alors il existe $u \in U$ tel que $uG = \theta_{pt}(u'G)$, et alors $(u, u'G) \in A$ est tel que $u'G = \pi'((u, u'G))$. Et si $\pi'((u, u'G)) = \pi'((v, v'G))$, alors $u'G = v'G$, donc $uG = vG$, et il existe $g \in G$ tel que $v = u.g$. Dans ces conditions, j'ai $(v, v'G) = (u.g, u'G) = (u, u'G)g$, et $(v, v'G)G = (u, u'G)G$.
Comme de plus le morphisme π est injectif sur les orbites à droite de G, puisque $(u, u'G).g = (u, u'G)$ si et seulement si $u = u.g$, je sais que π induit un morphisme de foncteurs $\pi \circ_G -$ vérifiant (C) de $A \circ_G -$ dans $U \circ_G -$, et en particulier le carré de gauche du diagramme suivant est cartésien:

$$\begin{array}{cccccccc} & A \circ_G X & \xrightarrow{A \circ_G p_X} & A \circ_G pt & \xrightarrow{\phi} & U' \circ_G pt & \\ \pi \circ_G X & \downarrow & & \downarrow & \pi \circ_G pt & \downarrow & \theta_{pt} \\ & U \circ_G p_X & \xrightarrow[U \circ_G p_X]{} & U \circ_G pt & \xrightarrow[Id]{} & U \circ_G pt & \end{array}$$

La définition de A montre d'autre part que le carré de droite est commutatif, et que ses flèches horizontales sont des isomorphismes. Il en résulte qu'il existe un isomorphisme μ_X unique de $U' \circ_G X$ sur $A \circ_G X$, tel que

$$\phi.(A \circ_G p_X).\mu_X = U' \circ_G p_X \text{ et } (\pi \circ_G X).\mu_X = \theta_X$$

L'unicité de μ_X montre de plus que si f est un morphisme de X dans le G-ensemble Y, alors $(A \circ_G f).\mu_X = \mu_Y.(U' \circ_G f)$, donc que les μ_X définissent un isomorphisme μ du foncteur $U' \circ_G -$ sur le foncteur $A \circ_G -$. Alors U' est isomorphe comme H-ensemble-G à l'ensemble A, et le morphisme θ provient du morphisme $\pi \circ_G -$, ce qui prouve finalement la

Proposition 11: Soient U et U' des H-ensembles-G, θ un homomorphisme du foncteur $U' \circ_G -$ dans le foncteur $U \circ_G -$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **Le morphisme θ vérifie la condition (C).**
2. **Il existe un morphisme π de H-ensembles-G de U' dans U, injectif sur les orbites à droite de G, tel que $\theta = \pi \circ_G -$**

4.2 Classes de conjugaison et cohomologie de Hochschild

Si G est un groupe, je note $[G]$ un système de représentants des classes de conjugaison de G, et je pose

$$c_G = \coprod_{g \in [G]} t_{C_G(g),<g>}$$

considéré comme élément de $\mathcal{T}(G)$. Si M est un foncteur de Mackey pour le groupe G, et si K est un sous-groupe de G, alors en notant $\overline{C}_G(g)$ le quotient $C_G(g)/ < g >$, j'ai

$$M \circ c_G = \oplus_{g \in [G]} \mathrm{Ind}_{C_G(g)}^G \mathrm{Inf}_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \rho_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \mathrm{Res}_{C_G(g)}^G M$$

En particulier, si K est un sous-groupe de G, j'ai

$$(M \circ c_G)(K) = \oplus_{g \in [G]} \mathrm{Ind}_{C_G(g)}^G \mathrm{Inf}_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \rho_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \mathrm{Res}_{C_G(g)}^G M(G/K) = \ldots$$

$$\ldots = \oplus_{g \in [G]} \mathrm{Inf}_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \rho_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \mathrm{Res}_{C_G(g)}^G M(\mathrm{Res}_{C_G(g)}^G G/K) = \ldots$$

$$\ldots = \oplus_{g \in [G]} (\rho_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} \mathrm{Res}_{C_G(g)}^G M)(\mathrm{Res}_{C_G(g)}^G G/K)^g = \ldots$$

$$\ldots = \oplus_{g \in [G]} M(\mathrm{Ind}_{C_G(g)}^G \mathrm{Inf}_{\overline{C}_G(g)}^{C_G(g)} (\mathrm{Res}_{C_G(g)}^G G/K)^g)$$

Or en tant que $\overline{C}_G(g)$-ensemble, j'ai

$$(\mathrm{Res}^G_{C_G(g)} G/K)^g = \coprod_{x\in C_G(g)\backslash T_G(g,K)/K} \overline{C}_G(g)/\overline{C}_{^xK}(g)$$

et finalement

$$(M\circ c_G)(K) = \oplus_{g\in[G]} \oplus_{x\in C_G(g)\backslash T_G(g,K)/K} M(C_{^xK}(g))$$

ce qui peut encore s'écrire, en sommant sur $g^x \in K$

$$(M\circ c_G)(K) = \oplus_{k\in[K]} M(C_K(k))$$

Je noterai HM le foncteur composé $M\circ c_G$: cette notation tient au fait que si M est le foncteur de Mackey $H^i(-,R)$ (resp. $H_i(-,R)$), alors l'égalité ci-dessus permet d'identifier $(M\circ c_G)(K)$ avec le i-ème groupe de cohomologie (resp. d'homologie) de Hochschild de K, souvent noté $HH^i(K,R)$ (resp $HH_i(K,R)$) (cf. [BE] chp.2).

En particulier, la cohomologie de Hochschild peut être dotée d'une structure de foncteur de Mackey: dans le cas $i=0$, cette structure n'est autre que celle du foncteur de Mackey "centre de l'algèbre de groupe", duale de celle des fonctions centrales: ce foncteur Z est tel que pour tout sous-groupe K de G, j'ai $Z(K) = ZRK$. La restriction de l'élément $\sum_{x\in K} r_x.x$ de ZRK au sous-groupe $K'\subseteq K$ est définie par projection

$$\mathrm{Res}^K_{K'} \sum_{x\in K} r_x.x = \sum_{x\in K'} r_x.x$$

alors que le transfert à K de l'élément $\sum_{x\in K'} r_x.x$ de ZRK' est défini par les traces relatives

$$\mathrm{Tr}^K_{K'}(\sum_{x\in K'} r_x.x) = \sum_{k\in K/K'} r_x.{}^kx$$

Plus généralement, la structure de foncteur de Mackey pour la cohomologie de Hochschild peut être définie ainsi: si

$$\ldots \to L_1 \to L_0 \to RK \to 0$$

est une résolution de RK par des RK-bimodules projectifs, alors en restreignant ces bimodules à K', j'obtiens une résolution de RK par des RK'-bimodules projectifs. D'autre part,

$$\mathrm{Hom}_{K'\times K'}(\mathrm{Res}_{K'\times K'} L_*, RK') \approx \mathrm{Hom}_{K\times K}(L_*, \mathrm{Ind}^{K\times K}_{K'\times K'} RK')$$

Comme RK' est facteur direct de $\mathrm{Res}_{K'\times K'} RK$, les groupes $HH^*(K',R)$ sont facteurs directs des groupes de cohomologie du membre de gauche. Le morphisme canonique de $\mathrm{Ind}^{K\times K}_{K'\times K'} RK'$ dans RK fournit alors un homomorphisme du complexe du second membre dans le complexe $\mathrm{Hom}_{K\times K}(L_*, RK)$, dont la cohomologie est égale à $HH^*(K, R)$. D'où finalement le transfert de $HH^*(K', R)$ dans $HH^*(K, R)$. La restriction se déduit de même du morphisme de RK dans $\mathrm{Ind}_{K'\times K'}^{K\times K} RK'$.

Dans le cas général d'un foncteur de Mackey M, si K est un sous-groupe de G, alors $HM(K)$ est aussi égal à

$$HM(K) = (\oplus_{k\in K} M(C_K(k)))_K$$

et si $L \subseteq K$, alors le transfert $T_L^K(m_l)$ de $HM(L)$ dans $HM(K)$ de l'élément $m_l \in M(C_L(l))$ est donné par

$$T_L^K(m_l) = t_{C_L(l)}^{C_K(l)}(m_l) \in M(C_K(l))$$

et la restriction $R_L^K(m_k)$ est donnée par

$$R_L^K(m_k) = \sum_{\substack{x \in K \\ k^x \in L}} x^{-1} r_{C_{^xL}(k)}^{C_K(k)}(m_k)$$

où l'élément $x^{-1} r_{C_{^xL}(k)}^{C_K(k)}(m_k)$ est dans $M(C_L(k^x))$.

4.3 Foncteurs de Mackey et conjecture d'Alperin

Dans [TH-WE], Thévenaz et Webb proposent la conjecture suivante, qu'ils prouvent être équivalente à la conjecture d'Alperin:

Conjecture: Pour tout groupe fini G, et tout nombre premier p, il existe des foncteurs de Mackey M_1 et M_2, tels que $M_1(H)$ et $M_2(H)$ sont des espaces vectoriels sur un corps R de caractéristique 0 ou première à $|G|$, satisfaisant les conditions suivantes:

1. **Pour tout sous-groupe H de G, les restrictions $\mathrm{\mathbf{Res}}_H^G M_1$ et $\mathrm{\mathbf{Res}}_H^G M_2$ sont projectifs par rapport au sous-groupes p-locaux de H.**

2. **Pour tout sous-groupe H de G,**

$$\dim M_1(H) - \dim M_2(H) = np(H)$$

où $np(H)$ désigne le nombre de kG-modules simples non-projectifs, pour un corps k algébriquement clos de caractéristique p.

Les définitions des sections précédentes permettent de donner une version explicite de cette conjecture. Soit en effet s_G l'idempotent E_1^G, lorsque $\underline{F}$ est la famille $\underline{s}_p(G)$ des p-sous-groupes de G, i.e.

$$s_G = -\sum_{\substack{\inf\, s = 1 \\ s \in Sd(\underline{s}_p(G))/G}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s),s}$$

Soit d'autre part FP_R le foncteur de Mackey dont la valeur en tout sous-groupe de G est égale à l'anneau R, la restriction r_H^K étant l'identité, et le transfert t_H^K la multiplication par $[K : H]$. Alors pour tout G-ensemble X, j'ai $FP_R(X) = \mathrm{Hom}_G([X], R)$, en notant $[X]$ le RG-module de permutations de base X. Donc $FP_R(X)$ admet une base sur R, en bijection avec $G\backslash X$.

Soit alors A un G-ensemble-G. La valeur de $FP_R \circ A$ en G est égale à

$$(FP_R \circ A)(G) = FP_R(A \circ_G (G/G)) = FP_R(A/G)$$

et admet donc une base en bijection avec $G\backslash A/G$.

Soit alors $Alp_G = c_G \circ_G s_G \in \Gamma(G)$. Le calcul donne

$$Alp_G = -\sum_{g\in[G]} \sum_{\substack{\inf\, s = \{1\} \\ s \in Sd(\underline{s}_p(G))/G}} (-1)^{|s|} t_{C_G(g),g} \circ_G t_{N_G(s),s}$$

En développant le produit $t_{C_G(g),g} \circ_G t_{N_G(s),s}$ et en réorganisant la somme, il vient

$$Alp_G = -\sum_{\substack{g \in G,\, s \in Sd(\underline{s}_p(G)),\, \inf\, s = \{1\} \\ g \in N_G(s) \\ (g,s)\, mod. G}} (-1)^{|s|} t_{C_G(g)\cap N_G(s),<g>.\sup s}$$

Comme $t_{X,N}$ est un G-ensemble-G transitif pour tout (X, N), j'ai $|G\backslash t_{X,N}/G| = 1$, et alors

$$|G\backslash Alp_G/G| = -\sum_{\substack{g \in G,\, s \in Sd(\underline{s}_p(G)),\, \inf\, s = \{1\} \\ g \in N_G(s) \\ (g,s)\, mod. G}} (-1)^{|s|}$$

ce qui s'écrit encore

$$|G\backslash Alp_G/G| = -\sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/G \\ \inf\, s = \{1\}}} (-1)^{|s|} k(N_G(s))$$

en notant $k(H)$ le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes du groupe H.

En particulier, la version de Robinson (cf. [KN-RO]) de la conjecture d'Alperin donne la valeur conjecturale du second membre, égale à $f_0(G)$, nombre de modules simples projectifs sur un corps k algébriquement clos de caractéristique p. Cette conjecture équivaut donc à

$$|G\backslash Alp_G/G| = f_0(G)$$

De même, le lemme 5 montre que le produit

$$t_{c_G(g),<g>} \circ_G s_G = t_{c_G(g),<g>} \circ_G E_1^G$$

est nul si $O_p(< g >)$ n'est pas contenu à conjugaison près dans $P = \{1\}$, i.e. si g n'est pas un p'-élément. Donc, en posant

$$c'_G = \sum_{g\in[G_{p'}]} t_{C_G(g),<g>}$$

j'ai aussi

$$Alp_G = c'_G \circ_G s_G = - \sum_{\substack{g \in G_{p'},\, s \in Sd(\underline{s}_p(G)),\, \inf s = \{1\} \\ g \in N_G(s) \\ (g,s)\, mod.G}} (-1)^{|s|} t_{C_G(g)\cap N_G(s),<g>.\sup s}$$

ce qui redémontre que la conjecture d'Alperin équivaut aussi à

$$f_0(G) = - \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/G \\ \inf s = \{1\}}} (-1)^{|s|} l(N_G(s))$$

en notant $l(H)$ le nombre de classes de conjugaison p-régulières de H.

Finalement, j'observe que c_G et s_G, donc aussi Alp_G, commutent à l'induction, au sens suivant:

Lemme 17: Soit H un sous-groupe de G. Alors

$$c_G \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = (G \times H)/\Delta(H) \circ_H c_H$$

$$c'_G \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = (G \times H)/\Delta(H) \circ_H c'_H$$

$$s_G \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = (G \times H)/\Delta(H) \circ_H s_H$$

En effet, soit X un sous-groupe de G normalisant N. Alors

$$t_{X,N} \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = \sum_{\substack{x \in X.N\backslash G/H \\ N^x \subseteq H}} (G \times H)/(\Delta_{X,N} * {}^{(x,1)}\Delta(H)$$

Alors

$$\Delta_{X,N} * {}^{(x,1)}\Delta(H) = \{(a,b) \mid \exists c,\, a \in X,\, a.c^{-1} \in N,\, c^x = b \in H\} = \ldots$$

$$\ldots = \{(a,b) \mid a \in X,\, b \in H,\, a.({}^x b)^{-1} \in N\}$$

ou encore

$$\Delta_{X,N} * {}^{(x,1)}\Delta(H) = {}^{(x,1)}\{(a,b) \mid a \in X^x,\, a.b^{-1} \in N^x\} = \ldots$$

$$\ldots = {}^{(x,1)}\{(a,b) \mid a \in X^x \cap H,\, a.b^{-1} \in N^x\}$$

la dernière égalité résultant du fait que $b \in H$ et $N^x \subseteq H$. Finalement

$$\Delta_{X,N} * {}^{(x,1)}\Delta(H) = {}^{(x,1)}(\Delta(H) * \Delta_{X^x \cap H, N^x})$$

de sorte que

$$(G \times H)/(\Delta_{X,N} * {}^{(x,1)}\Delta(H)) = (G \times H)/\Delta(H) \circ_H (H \times H)/\Delta_{X^x \cap H, N^x}$$

Alors pour la première assertion du lemme

$$c_G \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = \sum_{g \in [G]} t_{C_G(g),<g>} \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = \ldots$$

$$\ldots = (G \times H)/\Delta(H) \circ_H \sum_{\substack{g \in G \\ x \in G \\ g^x \in H}} \frac{|C_G(g)|}{|G|} \frac{|C_G(g^x) \cap H|}{|C_G(g)||H|} (H \times H)/\Delta_{C_H(g^x),<g^x>}$$

et la première assertion en résulte, en sommant sur $g^x \in H$. Pour la seconde, le calcul est analogue, la somme ne portant que sur des éléments p-réguliers. De même, pour la troisième

$$s_G \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = -\sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/G \\ \inf s = \{1\}}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s),\sup s} \circ_G (G \times H)/\Delta(H) = \ldots$$

$$\ldots = -(G \times H)/\Delta(H) \circ_H \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G)) \\ \inf s = \{1\} \\ x \in G \\ \sup s^x \subseteq H}} f_s (-1)^{|s|} (H \times H)/\Delta_{N_H(s^x),\sup s^x}$$

avec

$$f_s = \frac{|N_G(s)|}{|G|} \frac{|N_G(s^x).\sup s^x \cap H|}{|N_G(s).\sup s||H|} = \frac{|N_G(s)|}{|G|} \frac{|\sup s^x.N_H(s^x)|}{|N_G(s).\sup s||H|} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{|N_G(s)||\sup\ s||N_H(s^x)|}{|G||N_G(s)\cap \sup\ s||N_G(s).\sup\ s||H|} = \frac{|N_H(s^x)|}{|G||H|}$$

Une sommation sur s^x donne alors la seconde assertion du lemme.

Il en résulte que

$$Alp_G \circ_G (G\times H)/\Delta(H) = (G\times H)/\Delta(H) \circ_H Alp_H$$

Or pour tout H-ensemble X, j'ai

$$\mathrm{Ind}_H^G X = (G\times H)/\Delta(H) \circ_H X$$

Donc

$$Alp_G \circ_G \mathrm{Ind}_H^G X = \mathrm{Ind}_H^G (Alp_H \circ_H X)$$

Dans ces conditions, le “foncteur de Mackey virtuel” $FP_R \circ Alp_G$ est tel que

$$(\mathrm{Res}_H^G(FP_R\circ Alp_G))(X) = (FP_R\circ Alp_G)(\mathrm{Ind}_H^G X) = FP_R(Alp_G\circ_G \mathrm{Ind}_H^G X) = \ldots$$

$$\ldots = FP_R(\mathrm{Ind}_H^G(Alp_H\circ_H X)) = (\mathrm{Res}_H^G FP_R)(Alp_H\circ_H X) = (\mathrm{Res}_H^G FP_R\circ Alp_H)(X)$$

Donc

$$\mathrm{Res}_H^G(FP_R\circ Alp_G) = (\mathrm{Res}_H^G FP_R)\circ Alp_H = FP_R\circ Alp_H$$

et la valeur en H de $FP_R\circ Alp_G$, égale à la valeur en H de sa restriction à H, est donc différence de modules libres sur R, et de rang virtuel

$$rang_R(FP_R\circ Alp_G)(H) = -\sum_{\substack{s\in Sd(\underline{s}_p(H))/H\\ \inf\ s=\{1\}}} (-1)^{|s|} l(N_G(s))$$

Conjecturalement, ce rang vaut $f_0(H)$ pour tout sous-groupe de G.

Le lemme précédent prouve aussi que

$$\mathrm{Res}_H^G(FP_R\circ(c'_G - Alp_G)) = (\mathrm{Res}_H^G FP_R)\circ(c'_H - Alp_H) = FP_R\circ(c'_H - Alp_H)$$

De plus, j'ai $c'_G - Alp_G = c'_G \circ_G (t_{G,\{1\}} - s_G)$, et

$$t_{G,\{1\}} - s_G = -\sum_{s\in Sd(s_p(G))/G} (-1)^{|s|} t_{N_G(s),\sup\ s}$$

où $Sd(s_p(G))$ désigne l'ensemble des suites croissantes de p-sous-groupes non-triviaux de G. Ainsi tout foncteur de Mackey de la forme $M\circ(c'_G - Alp_G)$ est combinaison linéaire de foncteurs de la forme $M'\circ t_{N_G(s),\sup\ s}$. D'après les formules d'identification, si $A=(G\times G)/L$, alors le foncteur $M'\circ A$ est un foncteur induit de $p_2(L)$ à G. Ici, j'ai $p_2(L_s) = N_G(s).\sup\ s$, pour une suite s de p-sous-groupes non-triviaux. En particulier $O_p(p_2(L_s)) \neq \{1\}$, et le foncteur $M'\circ t_{N_G(s),\sup\ s}$ est un foncteur induit de $N_G(O_p(p_2(L)))$ à G. Le foncteur $M \circ (c'_G - Alp_G)$ est donc projectif par rapport aux sous-groupes p-locaux de G.

Le foncteur $M = FP_R \circ (c'_G - Alp_G)$ est donc tel que $\mathrm{Res}_H^G M$ est projectif par rapport aux sous-groupes p-locaux de H, pour tout sous-groupe H de G. Le rang sur R de son évaluation en G est égal à

$$-\sum_{s \in Sd(s_p(G))/G} (-1)^{|s|} l(N_G(s))$$

Il est aussi égal à $|G\backslash(c'_G - Alp_G)/G| = l(G) - |G\backslash Alp_G/G|$, et la conjecture d'Alperin équivaut au fait que ce rang soit égal à $l(G) - f_0(G) = np(G)$. J'ai donc

Proposition 12: Le foncteur de Mackey virtuel $M = FP_R \circ (c'_G - Alp_G)$ est tel que

1. **Si H est un sous-groupe de G, alors $\mathrm{Res}_H^G M$ est projectif par rapport aux sous-groupes p-locaux de H.**
2. **Si H est un sous-groupe de G, le rang sur R de $M(H)$ est égal à**

$$l(H) - |H\backslash Alp_H/H| = -\sum_{s \in Sd(s_p(H))/H} (-1)^{|s|} l(N_H(s))$$

Corollaire: La conjecture d'Alperin est équivalente à

$$|G\backslash Alp_G/G| = f_0(G)$$

4.4 p-sous-groupes et résidu de Steinberg

4.4.1 Autres expressions de s_G

Notation: Si p un nombre premier, et G est un groupe fini, je note $\underline{R}_p(G)$ l'ensemble des suites s de p-sous-groupes de G qui sont strictement croissantes, et telles que $\sup s \subseteq N_G(s)$. Je note également $\underline{a}_p(G)$ l'ensemble des p-sous-groupes abéliens élémentaires (triviaux ou non) de G.

Lemme 18:: Avec ces notations,

$$s_G = -\sum_{\substack{s \in Sd(\underline{a}_p(G))/G \\ \inf s = \{1\}}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), \sup s}$$

$$s_G = - \sum_{\substack{s \in \underline{R}_p(G)/G \\ \inf s = \{1\}}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), \sup s}$$

En effet, en regroupant dans la définition de s_G les termes pour lesquels $\sup s$ est un p-sous-groupe P donné de G, il vient

$$s_G = - \sum_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/N_G(P) \\ \inf s = \{1\} \\ \sup s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), P}$$

Soit alors ϕ_P l'application de $b(N_G(P))$ dans $\Gamma(G)$ définie par

$$\phi_P(N_G(P)/K) = t_{K,P}$$

Alors

$$- \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/N_G(P) \\ \inf s = \{1\} \\ \sup s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), P} = \phi_P(\mu(P))$$

où $\mu(P)$ désigne l'invariant de Möbius de P dans l'ensemble $\underline{s}_p(G)$, i.e. l'invariant de Lefschetz de $]\{1\}, P[$. Cet ensemble est $N_G(P)$-contractile si P n'est pas abélien élémentaire, par les contractions $Q \mapsto Q.\Phi(P) \mapsto \Phi(P)$. Donc $\mu(P) = 0$ si $P \notin \underline{a}_p(G)$, et la première assertion du lemme en résulte.

Pour démontrer la seconde, je pose provisoirement

$$s'_G = - \sum_{\substack{s \in \underline{R}_p(G)/G \\ \inf s = \{1\}}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), \sup s}$$

et je regroupe dans s'_G les suites $s \in \underline{R}_p(G)$ pour lesquelles $\sup s$ est un p-sous-groupe P donné de G. Il vient

$$s_G = - \sum_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G)^P)/N_G(P) \\ \inf s = \{1\} \\ \sup s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), P}$$

J'observe alors que

$$- \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G)^P)/N_G(P) \\ \inf s = \{1\} \\ \sup s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), P}$$

est l'image par ϕ_P de l'invariant de Lefschetz de $]\{1\},P[^P$, et ce dernier est nul pour la même raison que précédemment si $P \notin \underline{a}_p(G)$. Et si $P \in \underline{a}_P(G)$, alors $]\{1\},P[^P =]\{1\},P[$, et s'_G est égal au second membre de la première assertion du lemme, donc à s_G.

4.4.2 Autre expression de E_P^G

Si P est un p-sous-groupe de G, soit $\overline{N}_G(P) = N_G(P)/P$, et

$$u_P = (\overline{N}_G(P) \times G)/\{(nP, n) \mid n \in N_G(P)\}$$

$$u_P^* = (G \times \overline{N}_G(P))/\{(n, nP) \mid n \in N_G(P)\}$$

Soit E_P^G l'idempotent de $\Gamma(G)$ associé au groupe P et à la famille $\underline{F} = \underline{s}_p(G)$, à savoir

$$E_P^G = -\sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/N_G(P) \\ \inf s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), \sup s}$$

Par un calcul analogue à celui de la section précédente, je peux regrouper les suites pour lesquelles sup s est un p-sous-groupe Q donné, contenant P. Il vient

$$E_P^G = -\sum_{\substack{Q \in \underline{s}_p(G)/N_G(P) \\ Q \supseteq P}} \sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/N_G(P,Q) \\ \inf s = P \\ \sup s = Q}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), Q}$$

Soit alors $\phi_{P,Q}$ l'application de $b(N_G(P,Q))$ dans $\Gamma(G)$ définie par

$$\phi_{P,Q}(N_G(P,Q)/K) = t_{K,Q}$$

Alors

$$-\sum_{\substack{s \in Sd(\underline{s}_p(G))/N_G(P,Q) \\ \inf s = P \\ \sup s = Q}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), Q} = \phi_{P,Q}(\mu(P,Q))$$

où $\mu(P,Q)$ est l'invariant de Lefschetz de $]P,Q[$. Cet ensemble est $N_G(P,Q)$-contractile si $P \not\supseteq \Phi(Q)$, par les contractions $R \mapsto R.\Phi(Q) \mapsto P.\Phi(Q)$.

Et si $P \subseteq Q$, alors $P \trianglelefteq Q$, et de plus $]P,Q[=]P,Q[^Q$. Ces considérations montrent finalement que

$$E_P^G = -\sum_{\substack{s \in \underline{R}_p(G)/N_G(P) \\ \inf s = P}} (-1)^{|s|} t_{N_G(s), \sup s}$$

J'observe alors qu'en notant $\overline{s}$ la suite des quotients par P des termes de s, j'ai

$$t_{N_G(s),\sup s} = u_P^* \circ_{\overline{N}_G(P)} t_{N_G(\overline{s}),\sup \overline{s}} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P$$

et il en résulte que

$$E_P^G = u_P^* \circ_{\overline{N}_G(P)} s_{\overline{N}_G(P)} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P$$

4.4.3 Résidus de Steinberg

Je suppose ici que la famille $\mathcal{P}$ contient la famille des p-groupes finis. Si M est un objet de $\mathcal{F}_R(\mathcal{P},\mathcal{P})$, et G un groupe fini, j'appelle résidu de Steinberg de M en G, et je note $SM(G)$, le R-module image de $M(s_G)$, i.e.

$$SM(G) = M(s_G)(M(G)) = s_G \circ_G M(G)$$

Comme u_P est un morphisme de G dans $\overline{N}_G(P)$, j'ai une application a de $M(G)$ dans $\oplus_{P\in\underline{s}_p(G)/G} SM(\overline{N}_G(P))$, définie par

$$a(m) = \oplus_P M(s_{\overline{N}_G(P)} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P)(m)$$

J'ai de même une application b de $\oplus_{P\in\underline{s}_p(G)/G} SM(\overline{N}_G(P))$ dans $M(G)$ définie par

$$b(m_P) = M(u_P^*)(m_P) \text{ pour } m_P \in SM(\overline{N}_G(P))$$

Alors a et b sont des bijections inverses l'une de l'autre: en effet, si $m \in M(G)$, alors

$$ba(m) = b(\oplus_P M(s_{\overline{N}_G(P)}\circ_{\overline{N}_G(P)} u_P)(m)) = \sum_{P\,mod.G} M(u_P^* \circ_G s_{\overline{N}_G(P)}\circ_{\overline{N}_G(P)} u_P)(m) = \ldots$$

$$\ldots = M(\sum_{P\,mod.G} E_P^G)(m) = m$$

De même, si $m_Q \in SM(\overline{N}_G(Q))$, alors

$$ab(m_Q) = \oplus_{P\,mod.G} M(s_{\overline{N}_G(P)} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P) M(u_P^*)(m_Q) = \ldots$$

$$\ldots = \oplus_P M(s_{\overline{N}_G(P)} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P \circ_G u_Q^* \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)})(m_Q)$$

Le calcul donne

$$u_P \circ_G u_Q^* = \sum_{\substack{x \in N_G(P)\backslash G/N_G(Q) \\ P^x \subseteq N_G(Q)}} (\overline{N}_G(P) \times \overline{N}_G(Q))/L_x$$

où j'ai posé

$$L_x = \{(nP, n^xQ) \mid n \in N_G(P, {}^xQ)\}$$

Alors $k_2(L_x) = P^x.Q/Q$ est un p-groupe, et si $O_p(k_2(L_x)) = \{1\}$, alors $P^x \subseteq Q$. Donc si $P^x \not\subseteq Q$, alors le produit

$$(\overline{N}_G(P) \times \overline{N}_G(Q))/L_x \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)}$$

est nul. Mais si $P^x \subseteq Q$, alors $k_1(L_x) = {}^xQ/P$ n'est égal à $\{1\}$ que si ${}^xQ = P$. Finalement, le produit

$$s_{\overline{N}_G(P)} \circ_{\overline{N}_G(P)} u_P \circ_G u_Q^* \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)}$$

est nul si P n'est pas conjugué de Q. Et si $P = Q$

$$s_{\overline{N}_G(Q)} \circ_{\overline{N}_G(Q)} u_Q \circ_G u_Q^* \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)} = s_{\overline{N}_G(Q)} \circ_{\overline{N}_G(Q)} (\overline{N}_G(Q) \times \overline{N}_G(Q))/L_1 \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)}$$

Mais $(\overline{N}_G(Q) \times \overline{N}_G(Q))/L_1$ est l'élément neutre de $\Gamma(\overline{N}_G(Q))$, donc

$$s_{\overline{N}_G(Q)} \circ_{\overline{N}_G(Q)} u_Q \circ_G u_Q^* \circ_{\overline{N}_G(Q)} s_{\overline{N}_G(Q)} = s^2_{\overline{N}_G(Q)} = s_{\overline{N}_G(Q)}$$

et comme $M(s_{\overline{N}_G(Q)})(m_Q) = m_Q$, j'ai bien $ab(m_Q) = m_Q$. D'où

Proposition 13: Si $\mathcal{P}$ contient les p-groupes finis, et si M est un objet de $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{P})$, alors pour tout groupe G

$$M(G) \approx \bigoplus_{P \in \underline{s}_p(G)/G} SM(\overline{N}_G(P))$$

Exemple: Si $\mathcal{P}$ est la famille des p-groupes finis, et si $S_{H,V}$ est un objet simple de $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{P})$, alors j'ai vu que

$$S_{H,V}(G) \approx \bigoplus_{(K,P)\, mod.G} Tr_1^{N_G(K,P)/K}(V)$$

la somme portant sur les couples de sous-groupes (K, P) de G tels que P soit un p-sous-groupe normal de K, et tels que K/P soit isomorphe à H. En sommant d'abord sur P, je vois que

$$S_{H,V}(G) \approx \bigoplus_{P \in \underline{s}_p(G)/G} \bigoplus_{\substack{K/P \subseteq N_G(P)/P \\ K/P \approx H \\ K/P\, mod. N_G(P)P/P}} Tr_1^{N_G(K,P)/K}(V)$$

Comme

$$N_G(K,P)/K \approx N_{N_G(P)/P}(K/P)/(K/P)$$

il en résulte que pour tout groupe fini G, j'ai

$$SS_{H,V}(G) = \bigoplus_{\substack{K \subseteq G \\ K \approx H \\ K\, mod.G}} Tr_1^{N_G(K)/K}(V)$$

En particulier, si R est un corps k de caractéristique p, et si V est le module trivial, alors je sais que $S_{H,V}(G)$ est de dimension 1 sur k pour tout G. Donc $SS_{H,V}(G)$ est de dimension 1 sur k si H est isomorphe à un p-sous-groupe de Sylow de G, et il est nul sinon.

4.5 Adjonction et modules de Steinberg généralisés

Soient G et H des groupes, et A un H-ensemble-G. Si M est un foncteur de Mackey pour le groupe H, alors l'identification effectuée plus haut permet d'observer que le foncteur qui à M associe $M \circ A$ admet un adjoint à gauche: en effet, les opération d'induction, de restriction, d'inflation et de coinflation ont chacune un adjoint à gauche. Je noterai $N \mapsto A \circ N$ cet adjoint. Si $A = (G \times H)/L$, alors

$$A \circ N = \mathrm{Ind}_{p_1(L)}^{H} \iota_{p_1(L)/k_1(L)}^{p_1(L)} \theta_L^{-1} (\mathrm{Res}_{p_2(L)}^{G} N)^{k_2(L)}$$

où ι désigne l'adjoint de ρ, et $N \mapsto N^{k_2(L)}$ le foncteur adjoint du foncteur d'inflation de $p_2(L)/k_2(L)$ à $p_2(L)$.

Comme de plus le foncteur qui à M associe $M \circ A$ est un foncteur exact, il en résulte que le foncteur qui à N associe $A \circ N$ transforme un foncteur projectif en un foncteur projectif.

Si R est un corps de caractéristique p, alors les foncteurs de Mackey projectifs indécomposables et projectifs par rapport aux p-sous-groupes peuvent être indexés par les modules de p-permutations indécomposables. Il est facile de voir d'autre part que si $\mathcal{P}$ est la famille des p-groupes finis, et si A est $\mathcal{P}$-libre-$\mathcal{P}$, alors le foncteur $A \circ M$ est projectif par rapport aux p-sous-groupes si M l'est.

Dans ces conditions, si $pg(G)$ désigne le sous-anneau de l'anneau de Green engendré par les modules de p-permutations, je vois que $pg(G)$ devient un objet de $\mathcal{F}_R(\mathcal{P}, \mathcal{P})$: Si N est un module de p-permutations pour le groupe G, et si A est un H-ensemble-G qui est $\mathcal{P}$-libre-$\mathcal{P}$, alors il existe un unique foncteur de Mackey L_N pour G qui soit projectif, projectif par rapport aux p-sous-groupes, et dont la valeur en $\{1\}$ est N. Alors le foncteur $A \circ L_N$ est projectif, projectif par rapport aux p-sous-groupes de H, et sa valeur en $\{1\}$ est par définition le module $A \circ_G N$. C'est un H-module de p-permutations.

Dans la cas où A est isomorphe à $(H \times G)/L$, alors il est possible de montrer que

$$A \circ_G N \approx \mathrm{Ind}_{p_1(L)}^{H} N[k_2(L)]$$

où, lorsque P est un p-sous-groupe de G, le module $N[P]$ est défini par

$$N[P] = N^P / \sum_{Q \subset P} Tr_Q^P N^Q$$

Ces remarques permettent de retrouver les modules de Steinberg généralisés des modules de p-permutations définis dans [BO1]: Le module de Steinberg $St(G, N)$ n'est autre que $s_G \circ N$. De même, le résidu de Steinberg du foncteur pg est tel que $Spg(G)$ est le sous-module de $pg(G)$ engendré par les modules projectifs.

Bibliographie

[BE] D.J.BENSON. Representations and cohomology II. *Cambridge studies in advanced mathematics.* **31**.

[BO1] S.BOUC. Projecteurs dans l'anneau de Burnside. Projecteurs dans l'anneau de Green. Modules de Steinberg généralisés, *J.Algebra.* **139 n.2 June 1-1991 p.395-445**.

[BO2] S.BOUC. Foncteurs d'ensembles munis d'une double action, *Preprint* .

[KN-RO] R.KNÖRR. G.R.ROBINSON. Some remarks on a conjecture of Alperin. *J. London Math. Soc.* **(2) 39 (1989) p.48-60**.

[TH-WE] J.THÉVENAZ. P.J.WEBB. A Mackey Functor Version of a conjecture of Alperin. *Astérisque.* **181-182(1990) p.263-272**.

Sommaire