Exponentielle et modules de Steinberg

S. BOUC

*DMI, Ecole Normale Supérieure,
45 Rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France*

Communicated by Michel Broué

Received September 30, 1989

SOMMAIRE

1. *L'anneau $\mathcal{B}(G)$.*
2. *L'exponentielle dans $\mathcal{B}(G)$.* 2.1. Définition des u_k . 2.2. Définition de l'exponentielle. 2.3. Produit tensoriel. 2.4. Exponentielle externe.
3. *Composition.* 3.1. Composition externe. 3.2. Calcul du logarithme.
4. *Modules de Steinberg.* 4.1. Définitions. 4.2. Modules de Steinberg et exponentielle. 4.3. Modules projectifs et exponentielle. 4.4. Caractéristique d'Euler-Poincaré.
5. *Exemples: Le cas où $G = 1$.* 5.1. Fonctions classiques. 5.2. Partitions. 5.3. p -Éléments. 5.4. Groupes alternés. 5.5. Caractères. 5.6. Valeurs numériques.

Dans la première partie, j'étudie des anneaux de séries formelles à coefficients dans des anneaux de Burnside. Il est possible d'étendre à ces anneaux les propriétés usuelles des anneaux de séries formelles.

En particulier, il est possible de fabriquer l'exponentielle d'une série sans terme constant. Cette exponentielle possède les propriétés exigées d'habitude d'une telle application.

Dans la troisième partie, j'étend la notion de composition des séries formelles, ce qui permet le calcul du logarithme.

La quatrième partie est une application au calcul des modules de Steinberg des produits en couronne, dont la série s'exprime de façon naturelle en termes d'exponentielle.

Enfin la cinquième partie est une suite d'exemples dans le cas des groupes symétriques, qui vont de certains résultats sur les fonctions classiques au calcul des modules de Steinberg des groupes symétriques S_n pour $p = 2$ et $n \leq 13$.

1. L'ANNEAU $\mathcal{B}(G)$

Soit G un groupe fini. Je note $b(G)$ l'anneau de Burnside de G à coefficients entiers, doté de sa base standard formée des G/H , où H décrit les sous-groupes de G à conjugaison près.

Si k est un entier strictement positif, je note G_k le produit en couronne $G \sim S_k$ de G par le groupe symétrique S_k , et si $k=0$, je pose $G_0 = (1)$, de sorte que $b(G_0) = \mathbb{Z}$.

Ceci étant, je considère

$$\mathcal{B}(G) = \prod_{k \geq 0} b(G_k).$$

En tant qu'ensemble, c'est le produit des $b(G_k)$.

L'addition dans $\mathcal{B}(G)$ est définie terme à terme par

$$(X_k)_{k \geq 0} + (Y_k)_{k \geq 0} = (X_k + Y_k)_{k \geq 0}$$

et il est alors légitime de noter $\sum_{k \geq 0} X_k \cdot T^k$ l'élément $(X_k)_{k \geq 0}$ de $\mathcal{B}(G)$.

Si K (resp. L) est un sous-groupe de G_k (resp. G_l), alors le produit $K \times L$ est un sous-groupe de $G_k \times G_l$, et la classe de conjugaison de $K \times L$ dans $G_k \times G_l$ ne dépend que de celle de K dans G_k et de celle de L dans G_l .

Je peux donc par $\mathbb{Z}$ -linéarité définir une application bilinéaire de $b(G_k) \times b(G_l)$ dans $b(G_k \times G_l)$, notée $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$, en posant $(G_k/K) \cdot (G_l/L) = (G_k \times G_l)/(K \times L)$.

D'autre part, le groupe $G_k \times G_l$ se plonge naturellement dans G_{k+l} . Je définis alors le produit dans $\mathcal{B}(G)$ en posant

$$\sum_{k \geq 0} X_k \cdot T^k \sum_{l \geq 0} Y_l \cdot T^l = \sum_{m \geq 0} Z_m \cdot T^m$$

avec

$$Z_m = \sum_{k+l=m} \text{Ind}_{G_k \times G_l}^{G_{k+l}} X_k \cdot Y_l.$$

Avec ces définitions, il est facile de vérifier que $\mathcal{B}(G)$ est un anneau commutatif unitaire. L'élément neutre de la multiplication est $1 \cdot T^0$, que je noterai simplement 1. Plus généralement, puisque G_k/G_k est l'élément neutre de $b(G_k)$, je noterai simplement T^k l'élément $G_k/G_k \cdot T^k$ de $\mathcal{B}(G)$, en prenant garde au fait qu'avec ces notations, le produit $T^k \cdot T^l$ n'est pas égal à T^{k+l} mais à $G_{k+l}/(G_k \times G_l) \cdot T^{k+l}$.

Je note $\mathcal{I}(G)$ l'ensemble des éléments $\sum X_k \cdot T^k$ de $\mathcal{B}(G)$ pour lesquels $X_0 = 0$. C'est un idéal de $\mathcal{B}(G)$.

Je note $\mathcal{U}(G)$ l'ensemble des éléments $\sum X_k \cdot T^k$ de $\mathcal{B}(G)$ pour lesquels

$X_0 = 1$. C'est une partie de $\mathcal{B}(G)$ stable par multiplication, et l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(G)$ est la réunion $\mathcal{U}(G) \cup (-\mathcal{U}(G))$.

Si $X = \sum_k X_k \cdot T^k$ est un élément de $\mathcal{B}(G)$, je note $|X|$ l'élément de l'anneau $\mathbb{Q}[[T]]$ des séries formelles à coefficients rationnels défini par

$$|X| = \sum_k |X_k| \frac{T^k}{|G_k|}.$$

Alors l'application $X \mapsto |X|$ est un homomorphisme d'anneaux de $\mathcal{B}(G)$ dans $\mathbb{Q}[[T]]$.

Le plongement du groupe symétrique S_{k-1} dans S_k induit un plongement de G_{k-1} dans G_k , et je pose

$$d\left(\sum_{k \geq 0} X_k \cdot T^k\right) = \sum_{k \geq 1} \text{Res}_{G_{k-1}}^{G_k} X_k \cdot T^k$$

LEMME 1. L'application d ainsi définie est une dérivation de $\mathcal{B}(G)$, telle que

$$|dX| = |G| d(|X|).$$

Pour démontrer l'identité $d(X \cdot Y) = dX \cdot Y + X \cdot dY$, qui est bilinéaire en X et Y , il suffit de considérer le cas où $X = G_n/H \cdot T^n$ et $Y = G_m/K \cdot T^m$, et tout revient à prouver que

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{G_{n+m-1}} G_{n+m}/(H \times K) \cdot T^{n+m-1} \\ &= (\text{Res}_{G_{n-1}} G_n/H \cdot T^n) \cdot (G_m/K \cdot T^m) + (G_n/H \cdot T^n) \cdot (\text{Res}_{G_{m-1}} G_m/K \cdot T^m). \end{aligned}$$

Par la formule de Mackey, le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{G_{n+m-1}} G_{n+m}/(H \times K) \\ &= \sum_{x \in (H \times K) \backslash G_{n+m}/G_{n+m-1}} G_{n+m-1}/(H \times K)^x \cap G_{n+m-1}. \end{aligned}$$

L'ensemble $(H \times K) \backslash G_{n+m}/G_{n+m-1}$ est l'ensemble des orbites de $H \times K$ sur G_{n+m}/G_{n+m-1} . Or pour tout entier l , l'ensemble G_l/G_{l-1} s'identifie à l'ensemble $G \times \{1, \dots, l\}$, sur lequel G_l opère par $(g_1, \dots, g_l, \tau)(g, i) = (g_{\tau(i)}, \tau(i))$, par l'application qui à $(g_1, \dots, g_l, \tau)G_{l-1}$ associe $(g_{\tau(l)}, \tau(l))$. Donc l'ensemble G_{n+m}/G_{n+m-1} s'identifie à $G \times (\{1, \dots, n\} \amalg \{1, \dots, m\})$. L'élément $(h_1, \dots, h_n, \sigma)(k_1, \dots, k_m, \tau)$ de $H \times K$ envoie (g, i) sur $(h_{\sigma(i)}, \sigma(i))$ si $i \in \{1, \dots, n\}$, et sur $(k_{\tau(i)}, \tau(i))$ si $i \in \{1, \dots, m\}$. Ceci prouve que

$$(H \times K) \backslash G_{n+m}/G_{n+m-1} = (H \backslash G_n/G_{n-1}) \amalg (K \backslash G_m/G_{m-1})$$

et que $(H \times K)^x \cap G_{n+m-1}$ est égal à $(H^x \cap G_{n-1}) \times K$ si $x \in H \backslash G_n / G_{n-1}$, et à $H \times (K^x \cap G_{m-1})$ si $x \in K \backslash G_m / G_{m-1}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{Res}_{G_{n+m-1}} G_{n+m} / (H \times K) &= \sum_{x \in H \backslash G_n / G_{n-1}} G_{n+m-1} / ((H^x \cap G_{n-1}) \times K) \\ &+ \sum_{x \in K \backslash G_m / G_{m-1}} G_{n+m-1} / (H \times (K^x \cap G_{m-1})) \end{aligned}$$

et la première assertion du lemme est alors une conséquence de la formule de Mackey. La second assertion est triviale.

Si H est un sous-groupe de G , alors H_l se plonge dans G_l , et je définis une application linéaire i_H^G de $\mathcal{B}(H)$ dans $\mathcal{B}(G)$ en posant

$$i_H^G H_l / L = G_l / L \quad \text{si } k \neq 0 \quad \text{et } i_H^G(1) = 1.$$

Alors i_H^G est un morphisme d'anneaux.

Remarque. Il est aussi possible de définir une application de restriction de $\mathcal{B}(G)$ dans $\mathcal{B}(H)$. Pour que la formule de Mackey soit vraie, il faut prendre $i_H^G(1) = [G : H]$, mais alors i_H^G n'est plus un morphisme d'anneaux.

2. L'EXPONENTIELLE DANS $\mathcal{B}(G)$

2.1. Définition des u_k

Soit H un groupe fini. Si H opère sur un ensemble ordonné X , je note $\hat{\Lambda}_X$ (resp. Λ_X) le module de Lefschetz de X (resp. le module de Lefschetz réduit) de X . Ces modules sont les éléments de $b(H)$ définis par

$$\hat{\Lambda}_X = - \sum_{s \in S(X)/H} (-1)^{|s|} H/H_s \quad \text{et} \quad \Lambda_X = \hat{\Lambda}_X - H/H$$

où $S(X)$ est l'ensemble des suites strictement croissantes de X , et H_s le stabilisateur dans H de la suite s de $S(X)$.

LEMME 2. *Si Y est un élément de $b(H)$, il existe un ensemble ordonné X_0 (resp. X), sur lequel H opère, tel que $\hat{\Lambda}_{X_0} = Y$ (resp. $\Lambda_X = Y$).*

En effet, soient A et $\hat{A}$ les parties de $b(H)$ définies par

$$A = \{ Y \in b(H) \mid \exists X \text{ ordonné tel que } \Lambda_X = Y \}$$

$$\hat{A} = \{ Y \in b(H) \mid \exists X \text{ ordonné tel que } \hat{\Lambda}_X = Y \}$$

puisque $A_X = \dot{A}_X - H/H$, et puisque $\dot{A}_{X \amalg X'} = \dot{A}_X + \dot{A}_{X'}$, je vois que

$$A_{X \amalg X'} = A_X + A_{X'} + H/H$$

et en prenant pour X' l'ensemble pt réduit à un point, il vient

$$A_{X \amalg pt} = \dot{A}_X$$

ce qui prouve que $\dot{A} \subseteq A$.

Inversement, en notant E_n un ensemble discret à n éléments, sur lequel H opère trivialement, j'ai

$$A_{E_2 \cdot E_3} = -A_{E_2} \cdot A_{E_3} = -2 \cdot H/H, \quad \text{d'où} \quad \dot{A}_{E_2 \cdot E_3} = -H/H$$

et donc

$$\dot{A}_{X \amalg (E_2 \cdot E_3)} = \dot{A}_X - H/H = A_X.$$

Donc $A = \dot{A}$. De plus A est stable pour l'addition (puisque $\dot{A}_{X \amalg X'} = \dot{A}_X + \dot{A}_{X'}$), et puisque $A_{X \cdot E_2} = -A_X$, je vois que A est un sous $\mathbf{Z}$ -module de $b(H)$. Enfin, notant $[H/K]$ l'ensemble discret des classes à gauche de H modulo K , sur lequel H opère par translations, j'ai bien sûr $\dot{A}_{[H/K]} = H/K$, et A contient la base standard de $b(H)$, ce qui prouve le lemme.

Si X et Y sont des ensembles ordonnés sur lesquels opère H , et si 0 (resp. 1) désigne un plus petit élément (resp. un plus grand élément) éventuellement ajoutés à X ou Y , alors je note

$$X * Y = X \cup \{1\} \times Y \cup \{1\} - \{(1, 1)\}$$

$$X \circ Y = \{0\} \cup X \cup \{1\} \times \{0\} \cup Y \cup \{1\} - \{(0, 0), (1, 1)\}$$

$$X^{*k} = X * X * \dots * X \quad (\text{produit de } k \text{ facteurs})$$

$$X^{\circ k} = X \circ X \circ \dots \circ X \quad (\text{produit de } k \text{ facteurs}).$$

LEMME 3. Le groupe H_k opère sur X^k , sur X^{*k} , et sur $X^{\circ k}$, et $\dot{A}_{X^k}$ ne dépend que de $\dot{A}_X$.

En effet, l'élément $\dot{A}_{X^k}$ est entièrement déterminé par la donnée, pour chaque sous-groupe K de H_k , de la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi((X^k)^K)$.

Soit donc K un sous-groupe de H_k . Un élément z de K s'écrit sous la forme $z = (h_1, \dots, h_k, \sigma)$, où les h_i sont dans H et σ est une permutation de $\Omega = \{1, \dots, k\}$. Un tel z opère sur X^k en transformant $x = (x_1, \dots, x_k)$ en $z \cdot x = (h_1 \cdot x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, h_k \cdot x_{\sigma^{-1}(k)})$.

En particulier, le groupe H_k opère sur X^k , sur X^{*k} , et sur $X^{\circ k}$.

De plus, l'élément x de X^k est fixé par z si et seulement si pour tout i , j'ai $x_i = h_i \cdot x_{\sigma^{-1}(i)}$. Je poserai

$$\bar{K} = \{ \sigma \in S_k \mid \exists (h_1, \dots, h_k) \in H^k, (h_1, \dots, h_k, \sigma) \in K \}$$

et pour tout i de $\{1, \dots, k\}$

$$K_{(i)} = \{ h_i \mid \exists (h_1, \dots, h_k, \sigma) \in K, \sigma(i) = i \}.$$

L'ensemble $\bar{K}$ est un sous-groupe de S_k , et les $K_{(i)}$ sont des sous-groupes de H .

Alors si x est invariant par K , il est clair que x_i est invariant par $K_{(i)}$. Inversement, si pour tout i de $\Omega/\bar{K}$, je choisis un x_i de $X^{K_{(i)}}$, et si je pose pour j dans l'orbite sous $\bar{K}$ de i

$$x_j = h_i^{-1} \cdot x_i \quad \text{si } (h_1, \dots, h_k, \sigma) \in K \text{ est tel que } \sigma^{-1}(i) = j$$

alors x_j est bien défini: En effet, si $(h'_1, \dots, h'_k, \sigma')$ est un autre élément de K tel que $\sigma'^{-1}(i) = j$, alors

$$(h'_1, \dots, h'_k, \sigma')(h_1, \dots, h_k, \sigma)^{-1} = (h'_1 h_{\sigma\sigma^{-1}(1)}^{-1}, \dots, h'_k h_{\sigma\sigma^{-1}(k)}^{-1}, \sigma'\sigma^{-1})$$

est un élément de K tel que $\sigma'\sigma^{-1}(i) = i$, donc par hypothèse sur les x_i , j'ai $h'_i h_{\sigma\sigma^{-1}(i)}^{-1} x_i = x_i$, d'où $h'_i x_i = h_i^{-1} x_i$. Il est alors facile de vérifier que $(x_1, \dots, x_k)$ est invariant par K .

En d'autres termes, je vois que $(X^k)^K$ s'identifie à $\prod_{i \in \Omega/\bar{K}} X^{K_{(i)}}$. Donc

$$\hat{\lambda}((X^k)^K) = \prod_{i \in \Omega/\bar{K}} \hat{\lambda}(X^{K_{(i)}})$$

donc $\hat{\lambda}_{X^k}$ ne dépend que de $\hat{\lambda}_X$.

Ceci permet de définir une application u_k de $b(H)$ dans $b(H_k)$ en posant $u_k(Y) = \hat{\lambda}_{X^k}$ si X est choisi tel que $\hat{\lambda}_X = Y$. Je définis de plus u_0 de $b(H)$ dans $b(1) = \mathbf{Z}$ en posant $u_0(Y) = 1$ pour tout Y de $b(H)$.

LEMME 4. *La suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est la seule suite d'applications de $b(H)$ dans $b(H_k)$, telle que:*

1. Si $k \geq 1$, alors $u_k(H/L) = H_k/L_k$.
2. Pour X et Y dans $b(H)$, j'ai $u_k(X + Y) = \sum_{i=0}^k \text{Ind}_{H_i \times H_{k-i}}^{H_k} u_i(X) \cdot u_{k-i}(Y)$.
3. Si $k \geq 1$, alors $u_k(0) = 0$.
4. Si $X \in b(H)$, alors $u_0(X) = 1$.

De plus, si H opère sur X , alors

$$\dot{\lambda}_{X^k} = u_k(\dot{\lambda}_X)$$

$$\lambda_{X^k} = -u_k(-\lambda_X)$$

$$\lambda_{X^k} = u_k(\lambda_X).$$

La condition (1) exprime le fait que avec les notations précédentes, j'ai $\dot{\lambda}_{[H/L]^k} = H_k/L_k$, ce qui résulte du fait que $[H/L]^k = [H_k/L_k]$: le stabilisateur dans H_k de $(L, \dots, L)$ est égal à L_k , et H_k est transitif sur $[H/L]^k$.

Pour la condition (2), j'ai besoin de la définition suivante:

Si K est un groupe opérant sur l'ensemble ordonné X , et si H est un groupe contenant K , je note $\text{Ind}_K^H X$ l'ensemble $(H \times X)/K$, l'action de K étant donnée par $(h, x) \cdot k = (hk, k^{-1}x)$. Le groupe H opère sur $\text{Ind}_K^H X$ par $h' \cdot \overline{(h, x)} = \overline{(h'h, x)}$. Enfin $\text{Ind}_K^H X$ est ordonné en posant

$$\overline{(h, x)} \leq \overline{(h', x')} \quad \text{si et seulement si} \quad h^{-1}h' \in K \quad \text{et} \quad x \leq h^{-1}h'x'.$$

Cette définition est bien-sûr faite pour que $\dot{\lambda}_{\text{Ind}_K^H X} = \text{Ind}_K^H \dot{\lambda}_X$: il est facile de voir que si la suite $s = ((h_0, x_0), \dots, (h_n, x_n))$ est croissante, alors les h_i sont dans une seule classe modulo K , et alors s s'écrit aussi $s = h_0 \cdot ((1, x_0), (1, h_0^{-1}h_1x_1), \dots, (1, h_0^{-1}h_nx_n))$, avec de plus $x_0 \leq h_0^{-1}h_1x_1 \leq \dots \leq h_0^{-1}h_nx_n$. Enfin deux suites $((1, x_0), \dots, (1, x_n))$ et $((1, y_0), \dots, (1, y_n))$ sont conjuguées par H si et seulement si $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n)$ sont conjuguées par K , le stabilisateur dans H de $((1, x_0), \dots, (1, x_n))$ étant le stabilisateur de $(x_0, \dots, x_n)$ dans K .

Ceci étant, il est facile de vérifier que si le groupe H opère sur les ensembles ordonnés Z et T , alors

$$(Z \amalg T)^k = \prod_{0 \leq l \leq k} \text{Ind}_{H_l \times H_{k-l}}^{H_k} Z^l \times T^{k-l}$$

d'où l'assertion (2).

Les assertions (3) et (4) sont vraies par définition. D'où l'existence d'applications u_k vérifiant (1) à (4).

Pour l'unicité, j'observe que les assertions (1) et (2) permettent de définir $u_k(X)$ pour tout k , si X est combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs H/K de la base standard de $b(H)$. En écrivant que $u_k(X - X)$ doit être nul pour $k \neq 0$ (condition 3)), et en utilisant (2) et (4), je trouve par récurrence sur k la valeur de $u_k(-X)$. L'assertion (2) permet alors de calculer $u_k(X - Y)$, d'où l'unicité des u_k .

Enfin par définition, j'ai $u_k(\dot{A}_X) = \dot{A}_{X^*}$. De plus, en notant E l'ensemble $E_2 * E_3$, j'ai vu que $\dot{A}_{X \amalg E} = \dot{A}_X$, donc

$$u_k(A_X) = \dot{A}_{(X \amalg E)^*}.$$

Donc, si K est un sous-groupe de H_k , puisque K agit trivialement sur E , j'ai comme plus haut

$$|u_k(A_X)^K| = \prod_{i \in \Omega/K} \dot{\chi}((X \amalg E)^{K(i)}) = \prod_{i \in \Omega/K} \chi(X^{K(i)}) = \chi((X^*{}^k)^K)$$

ce qui prouve que $u_k(A_X) = A_{X^*{}^k}$.

De même, puisque $-A_X = A_{X * E_2} = \dot{A}_{(X * E_2) \amalg E}$, j'ai

$$\begin{aligned} u_k(-A_X) &= \dot{A}_{((X * E_2) \amalg E)^*} \\ |u_k(-A_X)^K| &= \prod_{i \in \Omega/K} \dot{\chi}(((X * E_2) \amalg E)^{K(i)}) \\ &= \prod_{i \in \Omega/K} \chi(X^{K(i)} * E_2) = (-1)^{|\Omega/K|} \prod_{i \in \Omega/K} \chi(X^{K(i)}) \end{aligned}$$

et comme $|A_{X^*{}^k}^K| = (-1)^{|\Omega/K|-1} \prod_{i \in \Omega/K} \chi(X^{K(i)})$, j'ai bien $-u_k(-A_X) = A_{X^*{}^k}$.

2.2. Définition de l'exponentielle

Je vais définir une application $\mathcal{E}xp$ de $\mathcal{I}(G)$ dans $\mathcal{Q}(G)$. Pour cela, je note que le produit en couronne $(G_k)_l = G_k \sim S_l = (G \sim S_k) \sim S_l$ se plonge naturellement dans $G \sim S_{kl} = G_{kl}$. Je pose alors:

$$\mathcal{E}xp(X_k \cdot T^k) = \sum_{l \geq 0} \text{Ind}_{(G_k)_l}^{G_l} u_l(X_k) \cdot T^{kl} \quad \text{pour } X_k \in b(G_k)$$

et

$$\mathcal{E}xp\left(\sum_{k \geq 1} X_k \cdot T^k\right) = \prod_{k \geq 1} \mathcal{E}xp(X_k \cdot T^k).$$

Autrement dit:

$$\mathcal{E}xp\left(\sum_{k \geq 1} X_k \cdot T^k\right) = \sum_{l \geq 0} Z_l \cdot T^l$$

avec

$$Z_l = \sum_{\substack{\pi = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots l^{a_l} \\ \pi = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots l^{a_l}}} \text{Ind}_{(G_1)_{a_1} \times (G_2)_{a_2} \times \dots \times (G_l)_{a_l}}^{G_l} u_{a_1}(X_1) \cdot u_{a_2}(X_2) \cdots u_{a_l}(X_l).$$

PROPOSITION 1. 1. J'ai $\mathcal{E}xp(X + Y) = \mathcal{E}xp X \cdot \mathcal{E}xp Y \forall X, Y \in \mathcal{I}(G)$.

2. De plus $\mathcal{E}xp$ est une bijection de $\mathcal{I}(G)$ sur $\mathcal{U}(G)$. (Je noterai $\mathcal{L}og$ l'application inverse.)

3. Les applications $\mathcal{E}xp$ et d vérifient la formule classique

$$d(\mathcal{E}xp X) = \mathcal{E}xp X \cdot dX \quad \forall X \in \mathcal{I}(G).$$

4. Si H est un sous-groupe de G , alors

$$i_H^G \cdot \mathcal{E}xp = \mathcal{E}xp \cdot i_H^G.$$

5. Enfin

$$|\mathcal{E}xp X| = Exp(|X|) \quad \forall X \in \mathcal{B}(G).$$

Pour l'assertion (1), puisque $\mathcal{E}xp X$ est défini comme le produit des $\mathcal{E}xp(X_k \cdot T^k)$, il suffit de vérifier que $\mathcal{E}xp(X + Y) = \mathcal{E}xp X \mathcal{E}xp Y$ lorsque X et Y sont tous deux homogènes de degré k , et l'assertion (1) est alors une conséquence de l'assertion (2) du lemme 4.

L'assertion (2) se démontre en isolant dans le développement de Z_l ci-dessus le terme contenant X_l , qui correspond à $\pi = (l)$, et vaut $\text{Ind}_{(G_l)}^{G_l} u_1(X_l) = X_l$, les autres termes de Z_l ne faisant intervenir que des X_n pour $n < l$. Cela prouve par récurrence que les X_l sont déterminés de manière unique par les Z_l , donc que $\mathcal{E}xp$ est une bijection de $\mathcal{I}(G)$ sur $\mathcal{U}(G)$.

De même si l'assertion (3) est vraie pour X et Y , alors

$$\begin{aligned} d(\mathcal{E}xp(X + Y)) &= d(\mathcal{E}xp X \mathcal{E}xp Y) = d\mathcal{E}xp X \cdot \mathcal{E}xp Y + \mathcal{E}xp X \cdot d\mathcal{E}xp Y \\ &= dX \cdot \mathcal{E}xp X \cdot \mathcal{E}xp Y + dY \cdot \mathcal{E}xp X \cdot \mathcal{E}xp Y \\ &= d(X + Y) \cdot \mathcal{E}xp(X + Y) \end{aligned}$$

et l'assertion (3) est vraie pour $X + Y$. De même puisque $d(\mathcal{E}xp X \mathcal{E}xp(-X)) = d(1) = 0$, j'ai

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}xp X \cdot \mathcal{E}xp(-X) + \mathcal{E}xp X \cdot d\mathcal{E}xp(-X) \\ = 0 = \mathcal{E}xp X \cdot (dX \cdot \mathcal{E}xp(-X) + d\mathcal{E}xp(-X)) \end{aligned}$$

et l'assertion (3) est vraie pour $-X$. Il suffit donc de vérifier l'assertion (3) lorsque $X = G_k/K \cdot T^k$.

Dans ce cas, j'ai

$$\mathcal{E}xp X = \sum_l \text{Ind}_{(G_k)}^{G_k} u_l(G_k/K) \cdot T^{kl} = \sum_l G_{kl}/K_l \cdot T^{kl}$$

et tout revient à montrer que

$$\text{Res}_{G_{k-1}} G_{kl}/K_l = \text{Ind}_{G_{k-1} \times G_{k(l-1)}}^{G_{kl-1}} \text{Res}_{G_{k-1}} (G_k/K) \cdot G_{k(l-1)}/K_{l-1}$$

ce qui par la formule de Mackey s'écrit encore

$$\sum_{x \in K \backslash G_{kl}/G_{kl-1}} G_{kl-1}/(K_l^x \cap G_{kl-1}) = \sum_{y \in K \backslash G_k/G_{k-1}} G_{kl-1}/((K^y \cap G_{k-1}) \times K_{l-1}).$$

Or je peux voir l'ensemble $B = K \backslash G_k/G_{k-1}$ comme l'ensemble des orbites de K sur l'ensemble G_k/G_{k-1} , et ce dernier s'identifie à $G \times \{1, \dots, k\}$ par l'application qui à $(g_1, \dots, g_k, \sigma)G_{k-1}$ associe $(g_{\sigma(k)}, \sigma(k))$, l'élément $(x_1, \dots, x_l, \tau)$ de K transformant (g, i) en $(x_{\tau(i)} \cdot g, \tau(i))$.

De même, l'ensemble $A = K_l \backslash G_{kl}/G_{kl-1}$ est l'ensemble des orbites de K_l sur G_{kl}/G_{kl-1} , qui s'identifie à $G \times \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$. Pour décrire l'action de K_l sur cet ensemble, il faut d'abord indiquer comment $(G_k)_l$ se plonge dans G_{kl} : Un élément de $(G_k)_l$ est une suite $(g_{1,1}, \dots, g_{k,1}, \sigma_1, \dots, g_{1,l}, \dots, g_{k,l}, \sigma_l, \tau)$, où les $g_{i,j}$ sont dans G , les σ_i dans S_k , et τ dans S_l . Cet élément s'envoie sur l'élément $(g_{1,1}, \dots, g_{k,l}, [\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau])$ de G_{kl} , en notant $[\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau]$ la permutation de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ définie par

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau](i, j) = (\sigma_{\tau(j)}(i), \tau(j)).$$

L'élément $x = (g_{1,1}, \dots, g_{k,1}, \sigma_1, \dots, g_{1,l}, \dots, g_{k,l}, \sigma_l, \tau)$ de K agit alors sur A par $x \cdot (g, i, j) = (g_{\sigma_{\tau(j)}(i), \tau(j)} g, \sigma_{\tau(j)}(i), \tau(j))$.

Alors l'application ϕ de G_{kl}/G_{kl-1} dans B qui à (g, i, j) associe l'orbite de (g, i) par K passe au quotient par K_l et définit une application $\bar{\phi}$ de A dans B : en effet, $\bar{\phi}(x \cdot (g, i, j)) = (g_{\sigma_{\tau(j)}(i), \tau(j)} g, \sigma_{\tau(j)}(i))$ est le transformé de (g, i) par l'élément $(g_{1,\tau(j)}, \dots, g_{k,\tau(j)}, \sigma_{\tau(j)})$ de K .

L'application $\bar{\phi}$ est surjective puisque ϕ l'est. Elle est de plus injective: si (g, i, j) et (g', i', j') ont même image par $\bar{\phi}$, alors il existe $x = (x_1, \dots, x_k, \sigma)$ dans K tel que $i' = \sigma(i)$ et $g' = x_{\sigma(i)} g$. En posant $x_{i,j} = x_i$ et $\sigma_j = \sigma$ pour tout i, j , l'élément $X = (x_{i,j}, [\sigma, \dots, \sigma, 1])$ est un élément de K_l tel que $X(g, i, j) = (g', i', j)$. Choisisant enfin τ dans S_l tel que $\tau(j) = j'$, j'obtiens un élément $Y = (1, \dots, 1, [1, \dots, 1, \tau])$ de K_l tel que $Y(g', i', j) = (g', i', j')$, ce qui prouve que (g, i, j) et (g', i', j') sont dans la même orbite par K_l , et que $\bar{\phi}$ est bijective.

La bijection $\bar{\phi}$ devient plus claire en prenant des systèmes de représentants: si $(g_{i,j}, \sigma)$ est dans G_{kl} , je pose $h_{i,j} = g_{\sigma(i,j)}^{-1}$ si $(i, j) \neq (k, l)$, et $h_{k,l} = 1$. Alors $(h_{i,j}, 1)$ est dans G_{kl-1} . En notant $\delta_{i,j}^{m,n}(g)$ l'élément de G défini par $\delta_{i,j}^{m,n}(g) = 1$ si $(i, j) \neq (m, n)$, et $\delta_{i,j}^{m,n}(g) = g$, j'ai $(g_{i,j}, \sigma)(h_{i,j}, 1) = (\delta_{i,j}^{\sigma(k,l)}(g_{\sigma(k,l)}, \sigma)$. Il est alors clair que si je choisis pour tout (m, n) une permutation $\sigma_{m,n}$ de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ telle que $\sigma_{m,n}(k, l) = (m, n)$, alors les éléments $r_{(g,m,n)} = (\delta_{i,j}^{m,n}(g), \sigma_{m,n})$ forment un système de représentants de G_{kl}/G_{kl-1} .

De plus si τ est une permutation de $\{1, \dots, l\}$, alors $Y = (1, \dots, 1, [1, \dots, 1, \tau])$ est dans K_l , et tel que $Yr_{(g,m,n)}$ est dans la même classe modulo G_{kl-1} que $r_{(g,m,\tau(n))}$. L'ensemble des $r_{(g,m,l)}$ contient donc un système de représentants de $K_l \backslash G_{kl} / G_{kl-1}$, et bien sûr $r_{(g,m,l)}$ et $r_{(g',m',l)}$ sont dans la même double classe si et seulement si (g, m) et (g', m') sont dans la même orbite par K .

Je peux supposer que $x = r_{(g,m,l)} = (\delta_{i,j}^{m,n}(g), \alpha \times 1)$, où α est une permutation de $\{1, \dots, k\}$ telle que $\alpha(k) = m$, et où je note $\alpha \times 1$ la permutation définie par $(\alpha \times 1)(i, j) = (\alpha(i), j)$. Dans ces conditions, j'ai $x^{-1} = (\delta_{\alpha(i),j}^{m,n}(g^{-1}), \alpha^{-1} \times 1)$, et

$$x^{-1}(x_{i,j}, [\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau])x = (\delta_{\alpha(i),j}^{m,l}(g^{-1})x_{\alpha(i),j}\delta_{\alpha(i),j}^{\sigma_1(j)(m),\tau(l)}(g), (\alpha^{-1} \times 1)[\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau](\alpha \times 1))$$

et ce dernier est dans G_{kl-1} si et seulement si

$$(\alpha^{-1} \times 1)[\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau](\alpha \times 1)(k, l) = (k, l) \\ \text{i.e. } \tau(l) = l \text{ et } \sigma_l(\alpha(k)) = \sigma_l(m) = m$$

et

$$\delta_{\alpha(k),l}^{m,l}(g^{-1})x_{\alpha(k),l}\delta_{\alpha(k),l}^{\sigma_l(j)(m),\tau(l)}(g) = 1 = g^{-1}x_{m,l}g.$$

Donc

$$K_l^x \cap G_{kl-1} = \{(x_{i,j}, [\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau]) \in K_l \mid \tau(l) = l, \sigma_l(m) = m, x_{m,l} = 1\}.$$

Soit y dans G_k défini par $y = (\delta_i^m(g), \alpha)$. En envoyant $(x_{i,j}, [\sigma_1, \dots, \sigma_l, \tau]) \in K_l^x \cap G_{kl-1}$ sur $((x_{i,l}, \sigma_l), ((x_{i,j})_{j \neq l}, [\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}, \tau]_{\{1, \dots, l-1\}})) \in (K^y \cap G_{k-1}) \times K_{l-1}$, j'obtiens un isomorphisme de $K_l^x \cap G_{kl-1}$ sur $(K^y \cap G_{k-1}) \times K_{l-1}$, ce qui prouve l'assertion (3).

Pour l'assertion (4), en notant que i_H^G est un morphisme d'anneaux, il suffit de vérifier que $i_H^G \mathcal{E}xp(H_k/K \cdot T^k) = \mathcal{E}xp(i_H^G(H_k/K \cdot T^k))$. Or le membre de gauche s'écrit

$$i_H^G \mathcal{E}xp(H_k/K \cdot T^k) = i_H^G \left(\sum_l H_{kl}/K_l \cdot T^{kl} \right) = \sum_l G_{kl}/K_l \cdot T^{kl}$$

et celui de droite

$$\mathcal{E}xp(G_k/K \cdot T^k) = \sum_l G_{kl}/K_l \cdot T^{kl}$$

d'où l'assertion (4).

Enfin l'assertion (5) résulte du fait que $|u_l(X)| = |X|^l$ pour tout X de $b(G_k)$.

2.3. *Produit tensoriel*

Soient G et H deux groupes finis, et k et l deux entiers strictement positifs. Je vais définir une application de $G_k \times H_l$ dans $(G \times H)_{kl}$: un élément z de $(G \times H)_{kl}$ s'écrit

$$z = ((g_{i,j}, h_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}}, \sigma)$$

où les $g_{i,j}$ sont dans G , les $h_{i,j}$ dans H , et σ est une permutation de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$. Alors si $x = (g_i, \alpha) \in G_k$, et $y = (h_j, \beta) \in H_l$, j'envoie le couple $(x, y) \in G_k \times H_l$ sur l'élément z de $(G \times H)_{kl}$ défini par

$$g_{i,j} = g_i, \quad h_{i,j} = h_j, \quad \sigma = \alpha \times \beta.$$

Il est facile de vérifier que l'application ainsi définie est un plongement de $G_k \times H_l$ dans $(G \times H)_{kl}$. Elle induit une application bilinéaire de $b(G_k) \times b(H_l)$ dans $b((G \times H)_{kl})$, que je noterai $(A, B) \mapsto A \times B$, telle que $G_k/K \times H_l/L = (G \times H)_{kl}/(K \times L)$.

Je définis alors une application de $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H)$ dans $\mathcal{S}(G \times H)$, notée $\otimes$, en posant

$$\left(\sum_{k \geq 1} X_k \cdot T^k \right) \otimes \left(\sum_{l \geq 1} Y_l \cdot T^l \right) = \sum_{k, l \geq 1} (X_k \times Y_l) \cdot T^{kl}.$$

Les propriétés de cette loi de composition externe sont résumées dans le lemme suivant:

LEMME 5. 1. *La loi $\otimes$ est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.*

2. *La loi $\otimes$ est associative: si G, H , et K sont des groupes finis, et si $(X, Y, Z) \in \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(H) \times \mathcal{S}(K)$, alors après identification de $(G \times H) \times K$ avec $G \times (H \times K)$, j'ai*

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z).$$

3. *La loi $\otimes$ est commutative: si $(X, Y) \in \mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(G)$, alors*

$$X \otimes Y = Y \otimes X.$$

4. *L'élément $T \in \mathcal{B}(1)$ est neutre à droite et à gauche, après identification de $G \times (1)$ et de $(1) \times G$ avec G .*

L'assertion (1) exprime uniquement la bilinéarité de $\otimes$.

L'assertion (2) résulte du fait que l'identification de $(G \times H) \times K$ avec $G \times (H \times K)$ envoie $(G_i \times H_j) \times K_k$ sur $G_i \times (H_j \times K_k)$.

L'assertion (3) provient du fait que les groupes $G_k \times G_l$ et $G_l \times G_k$ sont conjugués dans G_{kl} par l'élément $(1, \dots, 1, \delta)$, où δ est la bijection de $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ sur $\{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, k\}$ telle que $\delta(i, j) = (j, i)$.

L'assertion (4) est triviale.

2.4. Exponentielle externe

Les remarques ci-dessus permettent de définir une exponentielle externe, dont l'intérêt apparaîtra à la section suivante:

Si G et H sont deux groupes finis, si $X \in \mathcal{J}(G)$ et $Y \in \mathcal{U}(H)$, je note $Y^{(X)}$ l'élément de $\mathcal{U}(G \times H)$ défini par

$$Y^{(X)} = \mathcal{E}xp(X \otimes \mathcal{L}og(Y))$$

ce qui a un sens puisque $\mathcal{L}og$ envoie $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{J}$, et puisque $\mathcal{E}xp$ envoie $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{U}$.

Les propriétés précédentes se traduisent alors sous la forme suivante:

- LEMME 6. 1. Si $Y \in \mathcal{U}(H)$, et si $X, X' \in \mathcal{J}(G)$, alors $Y^{(X+X')} = Y^{(X)}Y^{(X')}$.
2. Si $Y, Y' \in \mathcal{U}(H)$, et si $X \in \mathcal{J}(G)$, alors $(YY')^{(X)} = Y^{(X)}Y'^{(X)}$.
3. Si $Z \in \mathcal{U}(K)$, si $Y \in \mathcal{J}(H)$ et si $X \in \mathcal{J}(G)$, alors $(Z^{(Y)})^{(X)} = Z^{(X \otimes Y)}$.
4. Soit $T = (1)/(1) \cdot T$ dans $\mathcal{J}(1)$, et $X \in \mathcal{J}(G)$. Alors $(\mathcal{E}xp T)^{(X)} = \mathcal{E}xp X$ dans $\mathcal{U}(G)$.

3. COMPOSITION

Soit n un entier strictement positif.

Je note $\pi\{n\}$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Cet ensemble est ordonné par la relation "être plus fine que".

Si n est supérieur ou égal à 2, je note $\hat{\pi}\{n\}$ le sous ensemble de $\pi\{n\}$ formé des partitions propres non-triviales. Je note $L_n = A_{\hat{\pi}\{n\}}$ l'élément correspondant de $b(S_n)$.

Je pose de plus $L_1 = S_1/S_1$.

Je note $\pi(n)$ l'ensemble des partitions de l'entier n .

Plus généralement, si G est un groupe fini, je peux faire opérer G_n sur $\pi\{n\}$ sur $\hat{\pi}\{n\}$, en utilisant l'inflation de S_n à G_n . Je noterai encore L_n l'élément correspondant de $b(G_n)$, avec cette fois $L_1 = G/G$.

L'ensemble quotient $\pi\{n\}/G_n$ s'identifie à $\pi(n)$. L'orbite par G_n de $\pi \in \pi\{n\}$ est une partition de n , que j'appelle le type de π .

Si $\pi \in \pi\{n\}$, je note G_π son stabilisateur dans G_n : si π est de type $1^{a_1} \dots n^{a_n}$, alors G_π est isomorphe à $\prod_i (G_i)_{a_i}$ et ne dépend que du type de

π à conjugaison près dans G_n . Si π est une partition de l'entier n , je noterai également G_π le stabilisateur dans G_n d'une partition de type π . Enfin je note $s(\pi)$ la somme des a_i .

3.1. *Composition externe*

Soient G et H des groupes finis. Si i est un entier strictement positif, le groupe $H \times G_i$ se plonge dans $(H \times G)_i$. Alors si a est un entier strictement positif, le groupe $(H \times G_i)_a$ se plonge dans $((H \times G)_i)_a$, donc dans $(H \times G)_{ia}$.

Si donc n est un entier strictement positif, et si $\pi = 1^{a_1} \dots n^{a_n}$ est une partition de n , le groupe $H \times_\pi G = \prod_i (H \times G_i)_{a_i}$ se plonge dans $(H \times G)_\pi$. Une autre façon de voir le groupe $H \times_\pi G$ est de le considérer comme le produit fibré de $\prod_i H_{a_i}$ et de G_π au dessus des morphismes de chacun de ces groupes dans $\prod_i S_{a_i}$.

Les morphismes de première projection de $H \times G_i$ dans H induisent un morphisme de $H \times_\pi G$ dans $\prod_i H_{a_i}$, qui se plonge dans $H_{s(\pi)}$. Ceci permet de considérer un élément de $b(H_{s(\pi)})$ comme un élément de $b(H \times_\pi G)$. De même, les morphismes de seconde projection de $H \times G_i$ dans G_i induisent des morphismes de $H \times_\pi G$ dans G_π , qui permettent de considérer un élément de $b(G_\pi)$ comme un élément de $b(H \times_\pi G)$.

Ces remarques permettent de définir dans le cadre des anneaux $\mathcal{B}(G)$ l'analogue de la composition de séries formelles usuelles:

Soit $Y = \sum_i Y_i \cdot T^i$ un élément de $\mathcal{B}(H)$, et $X = \sum_i X_i \cdot T^i$ un élément de $\mathcal{S}(G)$.

Si $\pi = 1^{a_1} \dots n^{a_n}$ est une partition de l'entier n , je note $u_\pi(X)$ l'élément de $b(G_\pi)$ défini par $u_\pi(X) = \prod_i u_{a_i}(X_i)$.

Je définis alors l'élément $Y \circ X$ de $\mathcal{B}(H \times G)$ en posant

$$Y \circ X = \sum_n \sum_{\pi \in \pi(n)} \text{Ind}_{H \times_\pi G}^{(H \times G)^n} Y_{s(\pi)} \cdot u_\pi(X) \cdot T^n.$$

Il est clair avec cette définition que le terme de degré 0 de $Y \circ X$ est égal à Y_0 , ce qui a un sens puisque $b(H_0)$ et $b((H \times G)_0)$ sont tous deux égaux à $\mathbb{Z}$. En particulier $\mathcal{S}(H) \circ \mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{S}(H \times G)$, et $\mathcal{U}(H) \circ \mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{U}(H \times G)$.

THÉORÈME 1. 1. Pour tout $X \in \mathcal{S}(G)$, l'application $Y \mapsto Y \circ X$ est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{B}(H)$ dans $\mathcal{B}(H \times G)$.

2. Si K, H , et G sont des groupes finis, et si $(Z, Y, X) \in \mathcal{B}(K) \times \mathcal{S}(H) \times \mathcal{S}(G)$, alors après identification de $(K \times H) \times G$ avec $K \times (H \times G)$, j'ai

$$(Z \circ Y) \circ X = Z \circ (Y \circ X) \quad \text{dans } \mathcal{B}(K \times H \times G).$$

3. Soit T la variable de $\mathcal{B}(1)$. Alors après identification de $(1) \times G$ et de $G \times (1)$ avec G , j'ai

$$T \circ X = X \circ T = X \quad \text{dans } \mathcal{B}(G).$$

4. Si $Y \in \mathcal{I}(H)$ et $X \in \mathcal{I}(G)$, alors

$$\mathcal{E}xp(Y \circ X) = (\mathcal{E}xp Y) \circ X \quad \text{dans } \mathcal{U}(H \times G)$$

5. Enfin, si $Y \in \mathcal{B}(H)$ et $X \in \mathcal{I}(G)$, alors

$$|Y \circ X| = |Y| \circ |X| \quad \text{dans } \mathcal{Q}[[T]].$$

Pour l'assertion (1) je remarque que l'application $Y \mapsto Y \circ X$ est Z -linéaire. Soient $Y = Y_m \cdot T^m$ et $Z = Z_n \cdot T^n$ dans $\mathcal{B}(H)$, et $X = \sum_i X_i \cdot T^i$ dans $\mathcal{I}(G)$. Alors l'égalité $(Y \cdot Z) \circ X = (Y \circ X)(Z \circ X)$ est triviale si l'un des entiers m ou n est nul. Je suppose donc m et n non nuls.

Puisque $Y \cdot Z = \text{Ind}_{H_m \times H_n}^{H_{m+n}} Y_m \cdot Z_n \cdot T^{n+m}$, je vois que le terme de degré k de $(Y \cdot Z) \circ X$ est égal à

$$((Y \cdot Z) \circ X)_k = \sum_{\substack{\pi \in \pi(k) \\ s(\pi) = m+n}} \text{Ind}_{H \times_\pi G}^{(H \times G)^k} \text{Ind}_{H_m \times H_n}^{H_{m+n}} Y_m \cdot Z_n \cdot u_\pi(X).$$

Alors si $\pi = 1^{a_1} \dots k^{a_k}$, le groupe $H \times_\pi G$ agit sur $\text{Ind}_{H_m \times H_n}^{H_{m+n}} Y_m \cdot Z_n$ par son quotient $\prod_i H_{a_i}$. Par la formule de Mackey

$$\text{Res}_{\prod_i H_{a_i}} \text{Ind}_{H_m \times H_n}^{H_{m+n}} Y_m \cdot Z_n = \sum_x \text{Ind}_{\prod_i H_{a_i} \cap (H_m \times H_n)^x}^{\prod_i H_{a_i}} (Y_m \cdot Z_n)^x$$

où la somme porte sur les doubles classes $(H_m \times H_n) \backslash H_{m+n} / \prod_i H_{a_i}$. Une telle double classe caractérise la position relative d'une partie de cardinal n par rapport à une partition donnée de $\{1, \dots, n+m\}$ par des ensembles de cardinal $a_1, \dots, a_n$. Tout revient donc à choisir pour tout i , des entiers b_i tels que $0 \leq b_i \leq a_i$ et $\sum_i b_i = n$. L'intersection ci-dessus s'identifie alors à $\prod_i (H_{b_i} \times H_{a_i-b_i})$, et

$$\text{Res}_{\prod_i H_{a_i}} \text{Ind}_{H_m \times H_n}^{H_{m+n}} Y_m \cdot Z_n = \sum_{\substack{b_i \leq a_i \\ b_1 + \dots + b_k = n}} \text{Ind}_{\prod_i (H_{b_i} \times H_{a_i-b_i})}^{\prod_i H_{a_i}} Y_m \cdot Z_m.$$

Prenant ensuite l'inflation à $H \times_\pi G$, le noyau étant $\prod_i (G_i)^{a_i}$, il vient

$$\begin{aligned} ((Y \cdot Z) \circ X)_k = & \sum_{\substack{\pi \in \pi(k) \\ \pi = 1^{a_1} \dots k^{a_k} \\ a_1 + \dots + a_k = n+m}} \sum_{\substack{b_i \leq a_i \\ b_1 + \dots + b_k = n}} \text{Ind}_{\prod_i (G_i)^{a_i} \cdot \prod_i (H_{b_i} \times H_{a_i-b_i})}^{(H \times G)^{m \times n}} \\ & \times Y_m \cdot Z_n \cdot u_\pi(X) \cdot T^{m+n}. \end{aligned}$$

Soit λ la partition $1^{b_1} \dots k^{b_k}$ de $h = \sum_i i b_i$, et μ la partition $1^{a_1 - b_1} \dots k^{a_k - b_k}$ de $l = \sum_i i(a_i - b_i)$. Le groupe $\prod_i (G_i)^{a_i} \cdot \prod_i (H_{b_i} \times H_{a_i - b_i})$ s'identifie à $(H \times_\lambda G) \times (H \times_\mu G)$, et je dois considérer la restriction de $u_\pi(X)$ à ce groupe. J'utilise pour cela le

LEMME 7. Pour tout groupe G et tout A de $b(G)$, j'ai $\text{Res}_{G_n \times G_m}^{G_n + m} u_{n+m}(A) = u_n(A) \cdot u_m(A)$.

En effet, si $A = \hat{A}_U$, j'ai $u_{n+m}(A) = \hat{A}_{U^{n+m}}$, et l'égalité $U^{n+m} = U^n \times U^m$ est compatible avec l'action de $G_n \times G_m$.

Ce lemme prouve que $\text{Res}_{(H \times_\lambda G) \times (H \times_\mu G)} u_\pi(X) = u_\lambda(X) u_\mu(X)$, et je peux finalement écrire

$$(YZ) \circ X = \sum_{h,l} \sum_{\substack{\lambda \in \pi(h) \\ s(\lambda) = n}} \sum_{\substack{\mu \in \pi(l) \\ s(\mu) = m}} \text{Ind}_{(H \times_\lambda G) \times (H \times_\mu G)}^{(H \times G)^{h+l}} Y_n \cdot Z_m \cdot u_\lambda(X) \cdot u_\mu(X) \cdot T^{h+l}$$

donc j'ai bien

$$(YZ) \circ X = (Y \circ X)(Z \circ X)$$

ce qui prouve l'assertion (1).

Pour l'assertion (2), je considère $X = \sum_n X_n \cdot T^n$ dans $\mathcal{S}(G)$, et $Y = \sum_n Y_n \cdot T^n$ dans $\mathcal{S}(H)$. Alors si $Z = \sum_n Z_n \cdot T^n$ est dans $\mathcal{B}(K)$, le terme de degré n de $(Z \circ Y) \circ X$ est égal à

$$\begin{aligned} ((Z \circ Y) \circ X)_n &= \sum_{\pi \in \pi(n)} \text{Ind}_{(K \times H) \times_\pi G}^{(K \times H \times G)_n} (Z \circ Y)_{s(\pi)} u_\pi(X) \\ &= \sum_{\pi \in \pi(n)} \text{Ind}_{(K \times H) \times_\pi G}^{(K \times H \times G)_n} \sum_{\lambda \in \pi(s(\pi))} \text{Ind}_{K \times_\lambda H}^{(K \times H)^{s(\pi)}} Z_{s(\lambda)} u_\lambda(Y) u_\pi(X). \end{aligned}$$

Je peux alors voir la somme en $\pi \in \pi(n)$ ci-dessus comme une somme pour $\pi \in \pi\{n\}/S_n$, et la somme en $\lambda \in \pi(s(\pi))$ comme une somme pour $\lambda \in \pi\{\pi\}/S_{s(\pi)}$. Or prendre une partition de l'ensemble $\{1, \dots, s(\pi)\}$, c'est prendre une partition de l'ensemble des parties de π , ou encore prendre une partition π' de $\{1, \dots, n\}$ moins fine que π . Je peux alors remplacer la somme double ci-dessus par une somme sur les couples de partitions $\pi \leq \pi'$ modulo S_n .

Le groupe $K \times_\lambda H$ est égal à $K^{s(\lambda)} \cdot H^{s(\pi)} \cdot S_\lambda$, et $s(\lambda)$ est alors le nombre $s(\pi')$ de parties de π' . L'intersection de ce groupe avec $(K \times H)^{s(\pi)} \cdot S_\pi$ est égale à $K^{s(\pi')} H^{s(\pi)} \cdot (S_\pi \cap S_{\pi'})$. En notant que λ_i est le nombre $(\pi, \pi')_i$ de parties de π' qui se décomposent en i parties de π , et en posant $u_{\pi, \pi'}(Y) = \prod_i u_{(\pi, \pi')_i}(Y_i)$, et $S_{\pi, \pi'} = S_\pi \cap S_{\pi'}$, j'ai

$$((Z \circ Y) \circ X)_n = \sum_{\substack{\pi \leq \pi' \in \pi\{n\} \\ \pi, \pi' \text{ mod } S_n}} \text{Ind}_{K^{s(\pi')} H^{s(\pi)} S_{\pi, \pi'}}^{(K \times H \times G)_n} Z_{s(\pi')} u_{\pi, \pi'}(Y) u_\pi(X).$$

D'autre part

$$(Z \circ (Y \circ X))_n = \sum_{\pi \in \pi\{n\}/S_n} \text{Ind}_{K^{s(\pi)}(H \times G)^n_{S_\pi}} (K \times H \times G)_n Z_{s(\pi)} u_\pi(Y \circ X)$$

et par définition

$$u_\pi(Y \circ X) = \prod_i u_{\pi_i}((Y \circ X)_i).$$

Enfin

$$(Y \circ X)_i = \sum_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} \text{Ind}_{H^{s(\mu)}G^i_{S_\mu}} (H \times G)_i Y_{s(\mu)} u_\mu(X).$$

Une généralisation immédiate du point 2 du lemme 4 dit alors que

$$u_k \left(\sum_{j \in J} L_j \right) = \sum_{f \in F(J, k)} \text{Ind}_{\prod_j G_{f(j)}}^{G_k} \prod_j u_{f(j)}(L_j)$$

où je note $F(J, k)$ l'ensemble des applications de J dans l'ensemble des entiers naturels dont la somme sur J est égale à k . Donc

$$\begin{aligned} u_{\pi_i}((Y \circ X)_i) &= \sum_{f \in F(\pi\{i\}/S_i, \pi_i)} \text{Ind}_{\prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} ((H \times G)_{f(\mu)})}^{(H \times G)_{\pi_i}} \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} u_{f(\mu)} \\ &\quad \times (\text{Ind}_{H^{s(\mu)}G^i_{S_\mu}} (H \times G)_i Y_{s(\mu)} u_\mu(X)). \end{aligned}$$

Je note alors que $u_x(\text{Ind}_H^G X) = \text{Ind}_{H^x}^{G^x} u_x(X)$ pour tout groupe G , tout sous groupe H de G , tout α , et tout X de $b(H)$, ce qui résulte de l'égalité $i_{H^x}^G \cdot \mathcal{E} \cdot \text{xp}(X \cdot T) = \mathcal{E} \cdot \text{xp} \cdot i_{H^x}^G(X \cdot T)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} u_{\pi_i}((Y \circ X)_i) &= \sum_{f \in F(\pi\{i\}/S_i, \pi_i)} \text{Ind}_{\prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} ((H \times G)_{f(\mu)})}^{((H \times G)_{\pi_i})} \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} \text{Ind}_{(H^{s(\mu)}G^i_{S_\mu})_{f(\mu)}}^{((H \times G)_{f(\mu)})} \\ &\quad \times u_{f(\mu)}(Y_{s(\mu)}) u_{f(\mu)} u_\mu(X) \\ &= \sum_{f \in F(\pi\{i\}/S_i, \pi_i)} \text{Ind}_{\prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} (H^{s(\mu)}G^i_{S_\mu})_{f(\mu)}}^{((H \times G)_{\pi_i})} u_{f(\mu)}(Y_{s(\mu)}) u_{f(\mu)} u_\mu(X) \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} u_\pi(Y \circ X) &= \sum_{f_i \in F(\pi\{i\}/S_i, \pi_i)} \text{Ind}_{\prod_i \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} (H^{s(\mu)}G^i_{S_\mu})_{f_i(\mu)}}^{(H \times G)_\pi} \prod_i \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} u_{f_i(\mu)} \\ &\quad \times (Y_{s(\mu)}) u_{f_i(\mu)} u_\mu(X). \end{aligned}$$

Finalement, j'ai pour tout i subdivisé les π_i parties de cardinal i de π en partitions plus fines, en prenant $f(\mu)$ fois la partition μ : j'ai donc choisi une

partition π' plus fine que π dans $\pi\{n\}$. Le groupe $\prod_i \prod_\mu (H^{s(\mu)}G^i S_\mu)_{f(\mu)}$ est égal à

$$\prod_i \prod_\mu H^{s(\mu)f_i(\mu)} G^{f_i(\mu)} S_\mu^{f_i(\mu)} S_{f_i(\mu)} = H^{\sum_{i,\mu} f_i(\mu)s(\mu)} G^{\sum_{i,\mu} f_i(\mu)} \prod_{i,\mu} S_\mu^{f_i(\mu)} S_{f_i(\mu)}.$$

Alors la somme des $f_i(\mu)$ pour $\mu \in \pi\{i\}/S_i$ est le nombre de parties de π de cardinal i . Donc $\sum_{i,\mu} i f_i(\mu) = n$. De plus, la somme $\sum_{i,\mu} f_i(\mu)s(\mu)$ est le nombre de parties de π' . Enfin le groupe $\prod_{i,\mu} S_\mu^{f_i(\mu)} S_{f_i(\mu)}$ est le stabilisateur du couple π', π dans S_n .

J'utiliserai alors les lemmes suivants

LEMME 8. Si A et B sont dans $b(G)$, alors $u_n(AB) = u_n(A)u_n(B)$ dans $b(G_n)$.

LEMME 9. Pour tout A de $b(G)$, j'ai $\text{Res}_{(G_n)_m}^{G_{nm}} u_{nm}(A) = u_m(u_n(A))$.

En effet, si $A = \dot{A}_U$, alors $u_{nm}(A) = \dot{A}_{U^{nm}}$, et l'égalité $U^{nm} = (U^n)^m$ est compatible avec l'action de $(G_n)_m$. De même, si $B = \dot{A}_V$, alors $u_n(AB) = \dot{A}_{(U \times V)^n}$, et l'égalité $(U \times V)^n = U^n \times V^n$ est compatible avec l'action de G_n .

Ces lemmes prouvent que le produit $\prod_i \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} u_{f_i(\mu)} u_\mu(X)$ est la restriction de $u_\pi(X)$: en effet, si μ_j est le nombre de parties de cardinal j de μ , alors

$$\begin{aligned} \prod_i \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} u_{f_i(\mu)} u_\mu(X) &= \prod_i \prod_\mu u_{f_i(\mu)} \prod_j u_{\mu_j}(X_j) \\ &= \prod_i \prod_\mu \prod_j \text{Res } u_{f_i(\mu)\mu_j}(X_j) = \text{Res } \prod_j u_{\sum_{i,\mu} f_i(\mu)\mu_j}(X_j) \end{aligned}$$

et la somme $\sum_{i,\mu} f_i(\mu)\mu_j$ est le nombre de parties de cardinal j de π' .

De même, le produit $\prod_i \prod_{\mu \in \pi\{i\}/S_i} u_{f_i(\mu)}(Y_{s(\mu)})$ est égal à la restriction du produit des $u_{\lambda_j}(Y_j)$, où λ_j est la somme

$$\sum_{\substack{i,\mu \\ s(\mu)=j}} f_i(\mu)$$

c'est-à-dire le nombre de parties de π qui se décomposent en j parties de π' . Finalement

$$(Z \circ (Y \circ X))_n = \sum_{\substack{\pi' \leq \pi \in \pi\{n\} \\ \pi', \pi \text{ mod } S_n}} \text{Ind}_{K^{n(n)} H^{n(n)} G^n S_{n,\pi}}^{(K \times H \times G)_n} Z_{s(\pi)} u_{\pi', \pi}(Y) u_{\pi'}(X)$$

ce qui prouve l'assertion (2), en permutant π et π' .

Pour l'assertion (3), il est clair que les seules partitions π de n telles que $s(\pi) = 1$ sont les partitions à un seul terme n^1 , et comme $u_1(X_n) = X_n$, j'ai bien $T \circ X = X$. De même, les seules partitions π telles que $u_\pi(1/1) \neq 0$ sont les partitions 1^n , et alors $u_\pi(1/1) = S_n/S_n$. De plus, j'ai $s(1^n) = n$, donc

$$X \circ T = \sum_n \text{Ind}_{G_{\times_{1^n}(1)}}^{G_n} X_n \cdot G_n/G_n$$

et puisque $G_{\times_{1^n}(1)} = G_n$, j'ai bien $X \circ T = X$.

Dans le cas où $H = (1)$ et $Y = T$, l'assertion (4) affirme que $\mathcal{E}xp(T \circ X) = (\mathcal{E}xp T) \circ X$. Puisque $\mathcal{E}xp T = \sum_n T^n$, il vient

$$(\mathcal{E}xp T) \circ X = \sum_n \sum_{\pi \in \pi(n)} \text{Ind}_{G_\pi}^{G_n} u_\pi(X) = \mathcal{E}xp X$$

et le cas général en découle puisque

$$\mathcal{E}xp(Y \circ X) = (\mathcal{E}xp T) \circ (Y \circ X) = ((\mathcal{E}xp T) \circ Y) \circ X = (\mathcal{E}xp Y) \circ X.$$

Pour l'assertion (4), il suffit de calculer

$$|Y \circ X| = \sum_n \sum_{\pi \in \pi(n)} \frac{1}{|H \times_\pi G|} |Y_{s(\pi)}| |u_\pi(X)| \cdot T^n.$$

Or si $\pi = 1^{a_1} \dots n^{a_n}$, alors

$$|H \times_\pi G| = \prod_i |H|^{a_i} |G|^{i a_i} i!^{a_i} a_i!$$

et de plus $|u_\pi(X)| = \prod_i |X_i|^{a_i}$, donc

$$\begin{aligned} |Y \circ X| &= \sum_{a_i} \frac{1}{\prod_i |H|^{a_i} |G|^{i a_i} i!^{a_i} a_i!} |Y_{\sum_i a_i}| \prod_i |X_i|^{a_i} \cdot T^{\sum_i i a_i} \\ |Y \circ X| &= \sum_{a_i} \frac{|Y_{\sum_i a_i}|}{|H|^{\sum_i a_i} \prod_i a_i!} \prod_i \left(\frac{|X_i| T^i}{|G_i|} \right)^{a_i} \\ |Y \circ X| &= \sum_n \frac{|Y_n|}{|H_n|} \sum_{\sum_i a_i = n} \frac{n!}{\prod_i a_i!} \prod_i \left(\frac{|X_i| T^i}{|G_i|} \right)^{a_i} \\ |Y \circ X| &= \sum_n \frac{|Y_n|}{|H_n|} |X|^n = |Y| \circ |X|. \end{aligned}$$

3.2. Calcul du logarithme

Le théorème 1 permet de calculer le logarithme d'un élément Y de $\mathcal{Q}(G)$. Je commencerai par un cas particulier:

PROPOSITION 2. Dans $\mathcal{B}(1)$, j'ai

$$\mathcal{L}og(1 + T) = \sum_{n \geq 1} L_n \cdot T^n.$$

Il suffit en effet d'exprimer $A_{\pi\{n\}}$ pour $n \geq 2$ sous la forme

$$A_{\pi\{n\}} = -S_n/S_n - \sum_{\pi \in \pi\{n\}/S_n} \text{Ind}_{S_n^*}^{S_n} A_{] \cdot, \pi[}$$

et de remarquer que si π est de type $1^{a_1} \dots n^{a_n}$, alors $] \cdot, \pi[$ s'identifie à $\tilde{\pi}\{2\}^{\circ a_2} \circ \dots \circ \tilde{\pi}\{n\}^{\circ a_n}$, donc que

$$A_{] \cdot, \pi[} = \prod_i u_{a_i}(L_i)$$

puisque j'ai posé $L_1 = S_1/S_1$.

Je peux alors réécrire l'égalité précédente sous la forme

$$\sum_{\pi \in \pi(n)} \text{Ind}_{S_n^*}^{S_n} u_{\pi}(X) = 0.$$

La somme ci-dessus est d'autre par égale à S_1/S_1 pour $n = 1$, ce qui prouve que

$$\text{Exp} \left(\sum_{n \geq 1} L_n \cdot T^n \right) = 1 + T \quad \text{dans } \mathcal{B}(1).$$

D'où la proposition (2).

Comme conséquence

PROPOSITION 3. Si $Y = 1 + \sum_i Y_i \cdot T^i \in \mathcal{Q}(G)$, alors

$$\mathcal{L}og Y = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\pi = 1^{a_1} \dots n^{a_n}}} \text{Ind}_{G_n^*}^{G_n} L_{s(\pi)} \prod_i u_{a_i}(Y_i) \cdot T^n.$$

Les assertions (3) et (4) du théorème 1 permettent en effet d'écrire

$$1 + Y = (1 + T) \circ Y$$

et

$$\mathcal{L}og((1 + T) \circ Y) = (\mathcal{L}og(1 + T)) \circ Y$$

et la proposition 3 est alors une conséquence proposition 2 et de la définition de la loi $\circ$.

4. MODULES DE STEINBERG

4.1. Définitions

Dans toute cette partie, je note p un nombre premier. Alors avec les notations de [1], et en prenant pour F_k l'ensemble des p -sous-groupes de G_k , je sais définir dans chaque $b(G_k)$ une application de Steinberg $X_k \mapsto St(G_k, X_k)$. Cette application peut également être déduite par linéarité du fait que si H est un sous-groupe de G_k , alors $St(G_k, G_k/H) = -\text{Ind}_H^{G_k} St_p H$.

Alors si $X = \sum_k X_k \cdot T^k \in \mathcal{B}(G)$, je pose

$$St X = \sum_k St(G_k, X_k) \cdot T^k.$$

PROPOSITION 4. 1. *L'application St est un endomorphisme idempotent de l'anneau $\mathcal{B}(G)$, dont l'image est formée des éléments p -projectifs de $\mathcal{B}(G)$ (i.e. les éléments $X = \sum_k X_k \cdot T^k$ tels que pour tout k , l'élément X_k soit p -projectif dans $b(G_k)$).*

2. *Soient G et H deux groupes. Alors si $(X, Y) \in \mathcal{J}(G) \times \mathcal{J}(H)$, j'ai*

$$St(X \otimes Y) = St X \otimes St Y.$$

3. *Si H est un sous-groupe de G , alors $St \cdot i_H^G = i_H^G \cdot St$.*

Il résulte de [1] que St est un projecteur sur l'ensemble des éléments p -projectifs de $\mathcal{B}(G)$. Il suffit donc pour prouver l'assertion (1) de vérifier que St est un morphisme pour la structure d'anneau de $\mathcal{B}(G)$.

Soit donc $X = G_k/K \cdot T^k$ et $Y = G_l/L \cdot T^l$ dans $\mathcal{B}(G)$. Alors

$$X \cdot Y = G_{k+l}/(K \times L) \cdot T^{k+l}$$

donc

$$St(X \cdot Y) = St(G_{k+l}, G_{k+l}/(K \times L)) \cdot T^{k+l} = -\text{Ind}_{K \times L}^{G_{k+l}} St_p(K \times L) \cdot T^{k+l}$$

soit encore

$$\begin{aligned} St(X \cdot Y) &= \text{Ind}_{K \times L}^{G_{k+l}} St_p K \cdot St_p L \cdot T^{k+l} \\ &= \text{Ind}_{G_k \times G_l}^{G_{k+l}} \text{Ind}_K^{G_k} St_p K \cdot \text{Ind}_L^{G_l} St_p L \cdot T^{k+l} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} St(X \cdot Y) &= (\text{Ind}_K^{G_k} St_p K \cdot T^k) (\text{Ind}_L^{G_l} St_p L \cdot T^l) \\ &= (-St X) \cdot (-St Y) = St X \cdot St Y \end{aligned}$$

ce qui prouve que St est un endomorphisme de l'anneau $\mathcal{B}(G)$.

Les deux membres de l'égalité de l'assertion (2) étant bilinéaires en (X, Y) , il suffit de considérer le cas où $X = G_k/K \cdot T^k$ et $Y = H_l/L \cdot T^l$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} St(X \otimes Y) &= St((G \times H)_{kl}/(K \times L) \cdot T^{kl}) = -\text{Ind}_{K \times L}^{(G \times H)_{kl}} St_p(K \times L) T^{kl} \\ &= -\text{Ind}_{K \times L}^{(G \times H)_{kl}} St_p(K \times L) T^{kl} \\ &= \text{Ind}_{K \times L}^{(G \times H)_{kl}} St_p K \times St_p L \cdot T^{kl} = (\text{Ind}_K^G St_p K \cdot T^k) \\ &\quad \otimes (\text{Ind}_L^H St_p L \cdot T^l) = (-St X) \otimes (-St Y) \end{aligned}$$

d'où l'assertion (2).

Pour l'assertion (3), si $X = H_k/K \cdot T^k$ dans $\mathcal{B}(H)$, alors

$$\begin{aligned} i_H^G \cdot St X &= -i_H^G (\text{Ind}_K^H St_p K \cdot T^k) = -\text{Ind}_K^G St_p K \cdot T^k \\ &= St(G_k/K \cdot T^k) = St \cdot i_H^G(X) \end{aligned}$$

et de plus $i_H^G \cdot St(1) = i_H^G(1) = 1 = St \cdot i_H^G(1)$.

4.2. Modules de Steinberg et exponentielle

Pour pouvoir calculer des expressions du genre $St(\mathcal{E}xp X)$, j'ai besoin de quelques remarques:

- Si k est un entier naturel, alors les sous-groupes abéliens élémentaires d'ordre p^k du groupe symétrique S_{p^k} sont deux à deux conjugués, et je noterai $\mathfrak{p}^k$ l'un d'entre eux: le plongement de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$ dans S_{p^k} est obtenu par la représentation régulière de permutations de ce groupe sur lui-même.

- Le normalisateur $N(\mathfrak{p}^k)$ de $\mathfrak{p}^k$ dans S_{p^k} est égal au produit semi-direct de $\mathfrak{p}^k$ par le groupe linéaire $GL(k, \mathbb{F}_p)$, noté $\mathfrak{p}^k \rtimes GL(k, \mathbb{F}_p)$. Je note $\mu(\mathfrak{p}^k)$ le module de Möbius de $\mathfrak{p}^k$, qui est aussi le module de Steinberg usuel du groupe linéaire, considéré après inflation comme élément de $b(\mathfrak{p}^k \rtimes GL(k, \mathbb{F}_p))$. Enfin je note Φ l'élément $\sum_{k \geq 0} \text{Ind}_{N(\mathfrak{p}^k)}^{S_{p^k}} \mu(\mathfrak{p}^k) \cdot T^{p^k}$ de $\mathcal{B}(1)$.

Avec ces notations:

THÉORÈME 2. 1. Soient G et H deux groupes finis. Si $X \in \mathcal{I}(G)$ et $Y \in \mathcal{U}(H)$, alors

$$St(Y^{(X)}) = (St Y)^{(St X)}$$

2. De plus

$$St(\mathcal{E}xp T) = \mathcal{E}xp \Phi \quad \text{dans } \mathcal{B}(1).$$

COROLLAIRE. 1. Si $X \in \mathcal{B}(G)$, alors $St(\mathcal{E}xp X) = \mathcal{E}xp(St X \otimes \Phi)$ dans $\mathcal{B}(G)$.

$$2. \sum_k St_p(G_k) \cdot T^k = -\mathcal{E}xp(-St_p G \cdot T \otimes \Phi) \text{ dans } \mathcal{B}(G).$$

L'assertion (1) du théorème est en fait équivalente à l'assertion (1) du corollaire: en effet si l'assertion (1) du corollaire est vraie, alors

$$\begin{aligned} St(Y^{(X)}) &= St(\mathcal{E}xp(X \otimes \mathcal{L}og Y)) = \mathcal{E}xp(St(X \otimes \mathcal{L}og Y) \otimes \Phi) \\ &= \mathcal{E}xp(St X \otimes St(\mathcal{L}og Y) \otimes \Phi) \end{aligned}$$

par le lemme 5 et la proposition 4. Donc

$$\begin{aligned} St(Y^{(X)}) &= (\mathcal{E}xp(St(\mathcal{L}og Y) \otimes \Phi))^{(St X)} = (St(\mathcal{E}xp \mathcal{L}og Y))^{(St X)} \\ &= (St Y)^{(St X)}. \end{aligned}$$

Inversement, l'assertion (1) du corollaire est le cas $H = (1)$ et $Y = \mathcal{E}xp T$ de l'assertion (1) du théorème.

De même, l'assertion (2) du théorème est le cas où de plus $G = (1)$, et $X = T$. L'assertion (2) du corollaire est une reformulation de l'assertion (1), dans le cas où $X = G/G \cdot T$, puisque $St X$ est alors égal à $-St_p G \cdot T$.

Tout revient donc à prouver l'assertion (1) du corollaire.

Pour pouvoir réduire encore la question, je vais définir un morphisme de $\mathcal{B}(G_k)$ dans $\mathcal{B}(G)$, qui sera l'analogie de la transformation $T \mapsto T^k$.

Soit k un entier strictement positif. Je note e_k l'application $\mathbf{Z}$ -linéaire de $\mathcal{B}(G_k)$ dans $\mathcal{B}(G)$ telle que $e_k(1) = (1)$ et $e_k((G_k)_n/K \cdot T^n) = G_{kn}/K \cdot T^{kn}$.

Autrement dit, pour $X_n \in b((G_k)_n)$, j'ai $e_k(X_n \cdot T^n) = \text{Ind}_{(G_k)_n}^{G_{kn}} X_n \cdot T^{kn}$.

LEMME 10. 1. L'application e_k est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{B}(G_k)$ dans $\mathcal{B}(G)$.

$$2. \text{ Si } X \in \mathcal{I}(G) \text{ et } Y \in \mathcal{I}(1), \text{ alors } e_k(X \otimes Y) = e_k(X) \otimes Y.$$

$$3. \text{ De plus } \mathcal{E}xp \cdot e_k = e_k \cdot \mathcal{E}xp, \text{ et } St \cdot e_k = e_k \cdot St.$$

Soit $X = (G_k)_h/H \cdot T^h$ et $Y = (G_k)_l/L \cdot T^l$ dans $\mathcal{B}(G_k)$. Alors

$$\begin{aligned} e_k(XY) &= e_k((G_k)_{h+l}/(H \times L) \cdot T^{h+l}) = G_{k(h+l)}/(H \times L) \cdot T^{k(h+l)} \\ &= (G_{kh}/H \cdot T^{kh})(G_{kl}/L \cdot T^{kl}) = e_k(X)e_k(Y) \end{aligned}$$

d'où l'assertion (1) puisque e_k est $\mathbf{Z}$ -linéaire.

De même pour l'assertion (2), il suffit de considérer le cas où $X = (G_k)_l/L \cdot T^l$ et $Y = S_m/M \cdot T^m$. Alors

$$\begin{aligned} e_k(X \otimes Y) &= e_k((G_k)_l/L \cdot T^l \otimes S_m/M \cdot T^m) = e_k((G_k)_{lm}/(L \times M) \cdot T^{lm}) \\ &= G_{klm}/(L \times M) \cdot T^{klm} \end{aligned}$$

alors que $e_k(X) = G_{kl}/L \cdot T^{kl}$, donc

$$e_k(X) \otimes Y = G_{klm}/(L \times M) \cdot T^{klm}.$$

D'où l'assertion (2).

Pour montrer que $\mathcal{E}xp \cdot e_k = e_k \cdot \mathcal{E}xp$, je note que les deux membres transforment les sommes en produits, et les différences en quotients, et je calcule pour $X = (G_k)_l/L \cdot T^l$

$$\mathcal{E}xp(e_k(X)) = \mathcal{E}xp(G_{kl}/L \cdot T^{kl}) = \sum_m G_{klm}/L_m \cdot T^{klm}$$

alors que

$$e_k(\mathcal{E}xp X) = e_k \left(\sum_m (G_k)_{lm}/L_m \cdot T^{lm} \right) = \sum_m G_{klm}/L_m \cdot T^{klm}$$

d'où la première partie de (3).

De même, pour prouver que $St \cdot e_k = e_k \cdot St$, je note que les deux membres sont $\mathbb{Z}$ -linéaires, et pour $X = (G_k)_l/L \cdot T^l$, j'ai

$$St(e_k(X)) = St(G_{kl}/L \cdot T^{kl}) = -\text{Ind}_L^{G_k} St_p L \cdot T^{kl}$$

alors que

$$e_k(St X) = e_k(-\text{Ind}_L^{G_k} St_p L \cdot T^l) = -\text{Ind}_L^{G_k} St_p L \cdot T^{kl}$$

ce qui prouve l'assertion (3).

LEMME 11. Soit H un sous-groupe de G . Si $X \in \mathcal{F}(H)$ et $Y \in \mathcal{F}(1)$, alors

$$i_H^G(X \otimes Y) = i_H^G(X) \otimes Y.$$

Ici encore, les deux membres sont bilinéaires. Si donc $X = H_l/L \cdot T^l$ et $Y = S_m/M \cdot T^m$, j'ai

$$i_H^G(X \otimes Y) = i_H^G(H_{lm}/(L \times M) \cdot T^{lm}) = G_{lm}/(L \times M) \cdot T^{lm}$$

$$i_H^G(X) \otimes Y = G_l/L \cdot T^l \otimes S_m/M \cdot T^m = G_{lm}/(L \times M) \cdot T^{lm}$$

d'où le lemme.

Alors pour prouver que $St(\mathcal{E}xp X) = \mathcal{E}xp(St X \otimes \Phi)$, puisque les deux membres transforment les sommes en produit, je considère le cas où $X = G_h/H \cdot T^h$, et alors

$$\begin{aligned} St(\mathcal{E}xp X) &= St(\mathcal{E}xp(e_h(G_h/H \cdot T))) = e_h(St(\mathcal{E}xp(i_H^{G_h}(H/H \cdot T)))) \\ &= e_h i_H^{G_h} St(\mathcal{E}xp H/H \cdot T) \end{aligned}$$

et si je sais que $St(\mathcal{E}xp H/H \cdot T) = \mathcal{E}xp(St(H/H \cdot T) \otimes \Phi)$, alors

$$\begin{aligned} St(\mathcal{E}xp X) &= e_h i_H^{G_h} \mathcal{E}xp(St(H/H \cdot T) \otimes \Phi) = \mathcal{E}xp(e_h i_H^{G_h}(St(H/H \cdot T) \otimes \Phi)) \\ &= \mathcal{E}xp(e_h(i_H^{G_h}(St(H/H \cdot T)) \otimes \Phi)) = \mathcal{E}xp(e_h(St(G_h/H \cdot T) \otimes \Phi)) \\ &= \mathcal{E}xp(e_h(St(G_h/H \cdot T))) \otimes \Phi = \mathcal{E}xp(St(e_h(G_h/H \cdot T))) \otimes \Phi \\ &= \mathcal{E}xp(St(G_h/H \cdot T^h)) \otimes \Phi = \mathcal{E}xp(St X \otimes \Phi). \end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que pour tout groupe H , j'ai

$$St(\mathcal{E}xp H/H \cdot T) = \mathcal{E}xp(St(H/H \cdot T) \otimes \Phi)$$

qui n'est autre que l'assertion (2) du corollaire. J'utiliserai le lemme suivant:

LEMME 12. *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'ensemble des sous-groupes Q de $a_p(G)$ tels que $Q \cap H \neq (1)$ (resp. $o_p(H \cap C_G(Q)) \neq (1)$). Alors $a_p(H) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, et si $\mathcal{C}$ est une partie stable par $N_G(H)$ telle que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, alors l'inclusion de $a_p(H)$ dans $\mathcal{C}$ est une $N_G(H)$ -équivalence d'homotopie.*

Si $Q \in \mathcal{A}$, alors $Q \cap H \subseteq O_p(H \cap C_G(Q))$, donc $a_p(H) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Soit alors i l'injection de $a_p(H)$ dans $\mathcal{A}$. Alors pour $Q \in \mathcal{A}$, j'ai $i^Q = a_p(H \cap Q)$ qui est contractile, et i est une équivalence d'homotopie.

Si j est l'injection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, et si $Q \in \mathcal{C}$, alors

$$j_Q = \{R \in \mathcal{A} \mid R \supseteq Q\}.$$

Soit f l'application de j_Q dans $a_p(H \cap C_G(Q))$ qui à R associe $R \cap H$, et g l'application de $a_p(H \cap C_G(Q))$ dans j_Q qui à S associe $S \cdot Q$. Alors f et g sont croissantes, et $f \circ g(S) \supseteq S$, alors que $g \circ f(R) \subseteq R$. Donc j_Q est homotope à $a_p(H \cap C_G(Q))$, qui est contractile puisque $Q \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Les applications i, j étant compatibles avec l'action de $N_G(H)$, l'inclusion de $a_p(H)$ dans $\mathcal{C}$ est une $N_G(H)$ -équivalence d'homotopie.

Le lemme 12 permet de prouver la

PROPOSITION 5. *Soit G un groupe fini et K un sous groupe de S_k . Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-groupes Q de $a_p(G \sim K)$ qui sont contenus à conjugaison près par G^k dans K . Alors $a_p(G \sim K) - \mathcal{S}$ est $G \sim K$ homotope à $a_p(G^k)$.*

Je vais appliquer le lemme en prenant pour G le groupe $G \sim K$, et pour H son sous-groupe normal G^k .

Je vais montrer que si Q est un p -sous-groupe de $G \sim K$ tel que $O_p(G^k \cap C_{G \sim K}(Q)) = (1)$, alors Q est contenu à conjugaison près dans K .

En effet $G^k \cap C_{G \sim K}(Q)$ est l'ensemble des points fixes de Q sur G^k par conjugaison: si $y = (q_1, \dots, q_k, \sigma) \in Q$ et $x = (g_1, \dots, g_k, 1) \in G^k$, j'ai $yx = (q_i g_{\sigma^{-1}(i)} q_i^{-1}, 1)$. Alors, comme dans le lemme 3, en notant $\bar{Q}$ l'image de Q dans K et

$$\Omega = \{1, \dots, k\}, \quad Q_{(i)} = \{q \mid \exists (q_1, \dots, q_k, \sigma) \in Q, q_i = q, \sigma(i) = i\}$$

le groupe $G^k \cap C_{G \sim K}(Q)$ est isomorphe à $\prod_{i \in \Omega/\bar{Q}} C_G(Q_{(i)})$. De plus, puisque $Q_{(i)}$ est quotient d'un sous-groupe de Q (à savoir l'image réciproque dans Q du stabilisateur de i dans $\bar{Q}$), c'est un p -groupe. Donc, si $O_p(G^k \cap C_{G \sim K}(Q)) = (1)$, alors $Q_{(i)} = (1)$ pour tout i .

Je cherche un élément x de G^k tel que Q^x soit contenu dans K . Ceci revient à trouver un élément x de $G \sim K$ tel que $Q^x \subseteq K$, ou encore un point fixe de Q sur $(G \sim K)/K$. Or cet ensemble s'identifie à G^k , l'élément $y = (q_1, \dots, q_k, \sigma) \in Q$ transformant à présent $x = (g_1, \dots, g_k, 1) \in G^k$ en $yx = (q_i g_{\sigma^{-1}(i)}, 1)$. L'ensemble des points fixes de Q est alors en bijection avec $\prod_{i \in \Omega/\bar{Q}} G^{Q_{(i)}}$, où $G^{Q_{(i)}}$ est l'ensemble des points fixes de $Q_{(i)}$ par son action *par translation* sur l'ensemble G , qui est égal à G puisque $Q_{(i)} = (1)$. L'ensemble des points fixes de Q sur $G \sim K/K$ est donc en bijection avec $G^{|\Omega/\bar{Q}|}$, donc non-vide, ce qu'il fallait démontrer.

Soit donc H un groupe fini, et H_k son produit en couronne par S_k . Je note $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments de $a_p(H_k)$ qui sont contenus à conjugaison près dans S_k . Alors $a_p(H_k) - \mathcal{S}$ est H_k -homotope à $a_p(H^k)$. Soit i l'injection de $a_p(H_k) - \mathcal{S}$ dans $a_p(H_k)$. Elle est telle que i_Q est contractile si $Q \notin \mathcal{S}$, et i_Q est $N_{H_k}(Q)$ -homotope à $a_p(C_{H^k}(Q))$ si $Q \in \mathcal{S}$. Je peux donc écrire

$$A_{a_p(H_k)} = A_{a_p(H^k)} + \sum_{Q \in \mathcal{S}/H_k} \text{Ind}_{N_{H_k}(Q)}^{H_k} \mu(Q) A_{a_p(C_{H^k}(Q))}$$

ou encore

$$St_p(H_k) = St_p(H^k) + \sum_{Q \in \mathcal{S}/H_k} \text{Ind}_{N_{H_k}(Q)}^{H_k} \mu(Q) St_p(C_{H^k}(Q)). \quad (1)$$

Or $\mathcal{S}/H_k$ s'identifie à $a_p(S_k)/S_k$, et si $Q \subseteq S_k$, alors $N_{H_k}(Q) = C_{H^k}(Q) \cdot N_{S_k}(Q)$. De plus $C_{H^k}(Q)$ est isomorphe à $H^{|\Omega/\bar{Q}|}$, puisque je peux ici identifier Q et $\bar{Q}$.

Si ω est une orbite de Q , et si $\sigma \in Q$, je note $\sigma|_\omega$ l'élément de S_k défini par $\sigma|_\omega(i) = \sigma(i)$ si $i \in \omega$ et $\sigma|_\omega(i) = i$ sinon. Je note $a_\omega(Q)$ l'ensemble des $\sigma|_\omega$ pour $\sigma \in Q$.

Puisque $(\sigma\tau)|_\omega = \sigma|_\omega \tau|_\omega$, je vois que $a_\omega(Q)$ est un p -sous-groupe abélien

élémentaire de S_k . De plus $a_\omega(Q)$ et $a_{\omega'}(Q)$ commutent si $\omega \neq \omega'$. Alors si je pose

$$a(Q) = \prod_{\omega \in \Omega/Q} a_\omega(Q)$$

j'obtiens un élément de $a_p(S_k)$, qui contient Q puisque $\sigma = \prod_{\omega} \sigma|_{\omega}$. Comme de plus pour $x \in N_{S_k}(Q)$, et $\sigma \in Q$, j'ai $x^{-1}\sigma|_{\omega}x = (x^{-1}\sigma x)|_{x^{-1}\omega}$, j'ai $N_{S_k}(Q) \subseteq N_{S_k}(a(Q))$. Enfin je note que $C_{H^k}(Q) = C_{H^k}(a(Q))$ puisque ce groupe ne dépend que des orbites de Q sur Ω .

Soit $A = a_p(S_k)$, qui est aussi l'ensemble des éléments R de $a_p(S_k)$ tels que $a(R) = R$ (puisque $a^2 = a$). Dans l'équation (1), je peux sommer en regroupant les termes Q pour lesquels $a(Q)$ est un élément R donné de A . Il vient l'équation (2)

$$\begin{aligned} St_p(H_k) &= St_p(H^k) + \sum_{R \in A/S_k} \text{Ind}_{C_{H^k}(R)N_{S_k}(R)}^{H_k} St_p(C_{H^k}(R)) \\ &\times \sum_{\substack{Q \in a_p(S_k) \\ a(Q) = R \\ Q \text{ mod } N_{S_k}(R)}} \text{Ind}_{N_{S_k}(Q)}^{N_{S_k}(R)} \mu(Q). \end{aligned}$$

Si $R \in A$, alors R est le produit direct des $a_\omega(R)$. Pour calculer la somme en Q ci-dessus, je considère l'application f de $]\cdot, R] - \{Q | a(Q) = R\}$ dans $\prod_{\omega \in \Omega/R}]\cdot, a_\omega(R)[$ (la notation $\prod$ désignant le produit pour la loi $\circ$) qui envoie Q sur la suite des $a_\omega(Q)$, et g l'application en sens inverse qui envoie la suite L_ω sur le produit dans R des L_ω . Ces deux applications sont croissantes, et de plus $g \cdot f(Q) = a(Q) \supseteq Q$, alors que $f \cdot g = \text{Id}$. Comme f et g commutent à l'action de $N_{S_k}(R)$, les ensembles $]\cdot, R] - \{Q | a(Q) = R\}$ et $\prod_{\omega \in \Omega/R}]\cdot, a_\omega(R)[$ sont $N_{S_k}(R)$ -homotopes.

Soit alors i l'injection de $X =]\cdot, R] - \{Q | a(Q) = R\}$ dans $]\cdot, R]$. Elle est telle que i_Q est contractile si $a(Q) \neq R$, et i_Q est vide si $a(Q) = R$. De plus $]\cdot, R]$ a un plus grand élément R . Donc

$$A_{] \cdot, R]} = 0 = A_X + \sum_{\substack{Q \in a_p(S_k) \\ a(Q) = R \\ Q \text{ mod } N_{S_k}(R)}} \text{Ind}_{N_{S_k}(Q)}^{N_{S_k}(R)} \mu(Q)$$

donc

$$A_X = A_{\prod_{\omega \in \Omega/R}]\cdot, a_\omega(R)[} = \sum_{\substack{Q \in a_p(S_k) \\ a(Q) = R \\ Q \text{ mod } N_{S_k}(R)}} \text{Ind}_{N_{S_k}(Q)}^{N_{S_k}(R)} \mu(Q).$$

Or chaque $a_\omega(R)$, restreint à ω , est un p -sous-groupe abélien élémentaire maximal du groupe symétrique de ω (puisque'il est abélien et transitif sur ω , il y opère régulièrement), donc conjugué de l'un des p' .

Je noterai $\pi_p(n)$ l'ensemble des partitions de l'entier n dont toutes les parties sont des puissances de p . Alors si $\pi \in \pi_p(n)$, soit $\pi = 1^{a_0}p^{a_1}\dots$, je note $\mathbf{p}^\pi$ le groupe $\prod_i (\mathbf{p}^i)^{a_i}$, qui est défini à conjugaison près par $S_\pi = \prod_i (S_{p^i})_{a_i}$, et $N(\mathbf{p}^\pi)$ son normalisateur dans S_k .

Il est clair que $N(\mathbf{p}^\pi)$ est isomorphe à $\prod_i (N(\mathbf{p}^i))_{a_i}$.

Alors si $R \in A$, et si $\pi = 1^{a_0}p^{a_1}\dots$ est la partition de k définie par les orbites de R , je vois que R est conjugué de $\mathbf{p}^\pi$ dans S_k . De plus, modulo cette identification, j'ai

$$A_{[\Gamma_{\omega \in \Omega, R}], a_\omega(R)]} = \prod_i u_{a_i}(\mu(\mathbf{p}^i)).$$

Finalement, l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} St_p(H_k) &= St_p(H^k) + \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(k) \\ \pi = 1^{a_0}p^{a_1}\dots \\ \pi \neq 1^k}} \text{Ind}_{C_{H^k(\mathbf{p}^\pi)} N_{S_k}(\mathbf{p}^\pi)}^{H^k} St_p(C_{H^k}(\mathbf{p}^\pi)) \\ &\times \prod_i u_{a_i}(\mu(\mathbf{p}^i)). \end{aligned} \tag{3}$$

Comme de plus $C_{H^k}(\mathbf{p}^\pi)$ est isomorphe au produit direct $\prod_i H^{a_i}$, j'ai

$$-St_p(C_{H^k}(\mathbf{p}^\pi)) = \prod_i (-St_p(H^{a_i})).$$

De même, le groupe $C_{H^k}(\mathbf{p}^\pi) N_{S_k}(\mathbf{p}^\pi)$ est égal au produit direct des groupes $(H \times N(\mathbf{p}^i))_{a_i}$, et

$$\prod_i (-St_p(H^{a_i})) = \prod_i u_{a_i}(-St_p H).$$

Enfin, puisque $St_p(H^k) = -u_k(-St_p H)$, je peux écrire l'équation (3) sous-la forme

$$\begin{aligned} -St_p(H_k) &= u_k(-St_p H) + \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(k) \\ \pi = 1^{a_0}p^{a_1}\dots \\ \pi \neq 1^k}} \text{Ind}_{\prod_i (H \times N(\mathbf{p}^i))_{a_i}}^{H^k} \\ &\times \prod_i u_{a_i}(-St_p H) u_{a_i}(\mu(\mathbf{p}^i)) \end{aligned}$$

ou encore

$$-St_p(H_k) = \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(k) \\ \pi = 1^{a_0}p^{a_1}}} \text{Ind}_{\prod_i (H \times N(\mathbf{p}^i))_{a_i}}^{H^k} \prod_i u_{a_i}(-St_p H \cdot \mu(\mathbf{p}^i))$$

ou encore, en plongeant $H \times N(\mathfrak{p}^i)$ dans $H_{\mathfrak{p}^i}$

$$-St_p(H_k) = \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(k) \\ \pi = 1^{a_0} p^{a_1} \dots}} \text{Ind}_{\prod_i (H_{\mathfrak{p}^i})_{a_i}}^{H_k} \prod_i \text{Ind}_{(H \times N(\mathfrak{p}^i))_{a_i}}^{(H_{\mathfrak{p}^i})_{a_i}} u_{a_i}(-St_p H \cdot \mu(\mathfrak{p}^i)).$$

Il vient donc

$$-St_p(H_k) = \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(k) \\ \pi = 1^{a_0} p^{a_1} \dots}} \text{Ind}_{\prod_i (H_{\mathfrak{p}^i})_{a_i}}^{H_k} \prod_i u_{a_i}(-\text{Ind}_{H \times N(\mathfrak{p}^i)}^{H_{\mathfrak{p}^i}} St_p H \cdot \mu(\mathfrak{p}^i)).$$

En multipliant cette équation par T^k et en sommant sur k , il vient alors

$$-\sum_k St_p(H_k) \cdot T^k = \mathcal{E}xp \left(-\sum_{i \geq 0} \text{Ind}_{H \times N(\mathfrak{p}^i)}^{H_{\mathfrak{p}^i}} St_p H \cdot \mu(\mathfrak{p}^i) \cdot T^{p^i} \right)$$

et le théorème 2 est démontré, puisque l'argument de l'exponentielle est égal à $-St_p H \cdot T \otimes \Phi$.

4.3. Modules projectifs et exponentielle

Je note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des éléments p -projectifs de $\mathcal{B}(G)$, et $\mathbf{S}$ l'élément $\mathcal{E}xp \Phi$ de $\mathcal{B}(1)$.

Alors

PROPOSITION 6. *L'application $P \mapsto \mathbf{S}^{(P)}$ est une bijection de $\mathcal{J}(G) \cap \mathcal{P}(G)$ sur $\mathcal{U}(G) \cap \mathcal{P}(G)$.*

En effet, si P est p -projectif, alors $P = St(P)$, donc si $P \in \mathcal{J}(G) \cap \mathcal{P}(G)$

$$\mathbf{S}^{(P)} = \mathcal{E}xp(P \otimes \mathcal{L}og \mathbf{S}) = \mathcal{E}xp(St P \otimes \Phi) = St(\mathcal{E}xp P)$$

et $\mathbf{S}^{(P)} \in \mathcal{U}(G) \cap \mathcal{P}(G)$.

Inversement, si $\mathcal{P} \in \mathcal{U}(G) \cap \mathcal{P}(G)$, j'ai

$$P = St(P) = St(\mathcal{E}xp(\mathcal{L}og(P))) = \mathcal{E}xp(St(\mathcal{L}og P) \otimes \Phi) = \mathbf{S}^{(St(\mathcal{L}og P))}$$

et $St(\mathcal{L}og P)$ est dans $\mathcal{J}(G) \cap \mathcal{P}(G)$. D'où la surjectivité.

L'injectivité se déduit du

LEMME 13. *Il existe un élément $\hat{\Phi}$ dans $\mathcal{J}(1)$ tel que $\hat{\Phi} \otimes \Phi = T$.*

En effet, le lemme 5 fait de $\mathcal{J}(1)$ un anneau commutatif unitaire, pour l'addition ordinaire, et la multiplication donnée par le produit tensoriel. Alors Φ est dans le sous-anneau $\mathcal{J}_p(1) = \prod_{i \geq 0} b(S_{p^i})$ de $\mathcal{J}(1)$. Ce dernier est gradué additivement par i , et le lemme consiste à montrer que Φ est inversible dans $\mathcal{J}(G)$.

Or le coefficient du terme de degré 0 de Φ , à savoir T , est égal à 1, donc Φ est inversible dans $\mathcal{S}_p(G)$, d'inverse $\hat{\Phi}$.

Alors bien sûr si $S^{(P)} = S^{(Q)}$, j'ai $(S^{(P)})^{(\Phi)} = \mathcal{E}xp P = \mathcal{E}xp Q$, donc $P = Q$, d'où la proposition.

4.4. *Caractéristique d'Euler-Poincaré*

Comme corollaire, en notant $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite d'un ensemble ordonné X :

PROPOSITION 7. Soit $f_G(T) = |St(\mathcal{E}xp T)| = -\sum_k \chi(s_p(G_k))(T^k/|G_k|)$. Alors

1. Pour tout groupe fini G , j'ai $f_G(T) = (f_1(T))^{-\chi(s_p(G))/|G|}$ dans $\mathcal{Q}[[T]]$.

2. De plus

$$f_1(T) = Exp \left(\sum_k \frac{(-1)^k T^{p^k}}{p^k(p^k-1) \cdots (p-1)} \right).$$

En effet par l'assertion (2) du corollaire du théorème 2, j'ai

$$f_G(T) = |\mathcal{E}xp(-St_p G \cdot T \otimes \Phi)| = Exp(|-St_p G \cdot T \otimes \Phi|)$$

de plus pour X dans $b(G)$ et $Y = \sum_{i \geq 1} Y_i \cdot T^i$ dans $\mathcal{S}(1)$, j'ai

$$\begin{aligned} |XT \otimes Y| &= \left| \sum_{i \geq 1} \text{Ind}_{G \times S_i}^{G_i} X \cdot Y_i \cdot T^i \right| = \sum_{i \geq 1} \frac{|G_i|}{|G| i!} |X| |Y_i| \frac{T^i}{|G_i|} \\ &= \frac{|X|}{|G|} \sum_{i \geq 1} |Y_i| \frac{T^i}{i!} = \frac{|X|}{|G|} |Y|(T) \end{aligned}$$

d'où l'assertion (1), puisque $|\mathcal{E}xp(\Phi)| = f_1(T)$.

L'assertion (2) provient du fait que $|\mu(p^i)| = (-1)^i p^{i(i-1)/2}$, et du fait que $|N(p^i)| = p^i |GL(i, F_p)|$.

Les formules précédentes permettent de calculer les nombres $\chi(s_p(G_k))$ en fonction de $\chi(s_p(G))$:

COROLLAIRE. Pour tout groupe fini G , j'ai

$$\begin{aligned} \frac{\chi(s_p(G_n))}{|G_n|} &= - \sum_{\substack{\pi \in \pi_p(n) \\ \pi = 1^{a_0} p^{a_1} \dots}} \left(-\frac{\chi(s_p(G))}{|G|} \right)^{\sum a_i} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{\sum a_i}}{\prod [p^i(p^i-1) \cdots (p-1)]^{a_i} \cdot a_i!}. \end{aligned}$$

De même, en notant x le quotient $\chi(s_p(G))/|G|$ et κ_n le quotient $\chi(s_p(S_n))/n!$

$$\frac{\chi(s_p(G_n))}{|G_n|} = - \sum_{\substack{\pi \leftarrow n \\ \pi = 1^{a_1} \dots n^{a_n}}} \frac{x(x+1) \dots (x + \sum a_i - 1)}{\prod a_i!} \kappa_1^{a_1} \dots \kappa_n^{a_n}.$$

La première formule provient du calcul de l'exponentielle d'une série formelle sans terme constant, la second du calcul de la puissance x -ième d'une série formelle de terme constant égal à 1.

5. EXEMPLES: LE CAS OÙ $G = (1)$

5.1. Fonctions classiques

Soit a un entier strictement positif. Si n est un entier naturel, je note $P_a(n)$ l'ensemble des parties propres et non-vides de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dont le cardinal est multiple de a . Cet ensemble est ordonné par inclusion, et le groupe S_n opère sur $P_a(n)$. Alors:

PROPOSITION 8. 1. $\sum_{k \geq 0} A_{P_a(ka)} \cdot T^{ka} = 1/\sum_{k \geq 0} T^{ka}$ dans $\mathcal{B}(1)$.

2. De même, si r est un entier compris entre 1 et $p-1$

$$\sum_{k \geq 0} A_{P_a(ka+r)} \cdot T^{ka+r} = - \frac{\sum_{k \geq 0} T^{ka+r}}{\sum_{k \geq 0} T^{ka}}.$$

En effet, il suffit d'exprimer, pour $k > 0$

$$A_{P_a(ka)} = -S_{ka}/S_{ka} - \sum_{0 < h < k} \text{Ind}_{S_{ha} \times S_{(k-h)a}}^{S_{ka}} A_{P_a(ha)}$$

qui s'écrit encore

$$\sum_{0 \leq h \leq k} \text{Ind}_{S_{ha} \times S_{(k-h)a}}^{S_{ka}} A_{P_a(ha)} = 0.$$

En multipliant cette égalité par T^{ka} et en sommant sur k , je trouve

$$\left(\sum_k A_{P_a(ka)} \cdot T^{ka} \right) \left(\sum_l T^{la} \right) = 1$$

d'où l'assertion (1).

De même, pour l'assertion (2)

$$\tilde{A}_{P_a(ka+r)} = -S_{ka+r}/S_{ka+r} - \sum_{0 < h \leq k} \text{Ind}_{S_{ha} \times S_{(k-h)a+r}}^{S_{ka+r}} A_{P_a(ha)}.$$

En multipliant cette égalité par T^{ka+r} et en sommant sur k , il vient

$$\sum_{k \geq 0} A_{P_a(ka+r)} \cdot T^{ka+r} = - \left(\sum_k A_{P_a(ka)} \cdot T^{ka} \right) \left(\sum_l T^{la+r} \right)$$

d'où l'assertion (2), par l'assertion (1).

La première formule permet en prenant les degrés dans $\mathbf{Q}[[T]]$ le calcul de

$$\begin{aligned} & \chi(P_a(ma)) \\ &= \sum_{a_1+2a_2+\dots+ma_m=m} (-1)^{a_1+\dots+a_m} \frac{(a_1+\dots+a_m)!}{a_1! \dots a_m!} \frac{(ma)!}{(a!)^{a_1} \dots (ma!)^{a_m}}. \end{aligned}$$

En particulier pour $a=2$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} A_{P_2(2k)} \cdot T^{2k} &= \frac{1}{\sum_{k \geq 0} T^{2k}} \\ \sum_{k \geq 0} A_{P_2(2k+1)} \cdot T^{2k+1} &= - \frac{\sum_{k \geq 0} T^{2k+1}}{\sum_{k \geq 0} T^{2k}} \end{aligned}$$

et en prenant les modules dans $\mathbf{Q}[[T]]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{ch } T} &= \sum_{k \geq 0} \chi(P_2(2k)) \frac{T^{2k}}{(2k)!} \\ \text{th } T &= - \sum_{k \geq 0} \chi(P_2(2k+1)) \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

d'où par des formules classiques la valeur des nombres de Bernouilli

$$b_{2k} = - \frac{2k \cdot \chi(P_2(2k-1))}{2^{2k}(2^{2k}-1)} \quad (\text{et } b_{2k+1} = 0 \text{ si } k \geq 1).$$

Remarque. Il est possible de montrer que $P_a(n)$ a un seul module d'homologie non-nul, celui de rang $[(n-1)/a]-1$. Le signe de $\chi(P_a(ka))$ est donc égal à $(-1)^k$. De même, le module $(-1)^{n-1} A_{P_2(2n+1)}$ correspond à une vraie représentation linéaire du groupe S_{2n+1} .

5.2. Partitions

J'ai indiqué dans la proposition 3 comment les modules de Lefschetz $L_n = A_{\mathcal{A}\{n\}}$ interviennent dans le calcul du logarithme. Il est possible de connaître exactement l'élément L_n de $b(S_n)$:

PROPOSITION 9. Soit H un sous-groupe de S_n . Alors $\hat{\pi}\{n\}^H$ est contractile, sauf si tous les $H \cap S_{n-1}^x$ sont conjugués dans H (i.e. si la représentation de permutation de H sur $\{1, \dots, n\}$ est "isotypique"). Si K est l'un d'entre eux, et si $h = n/[H : K]$ est le nombre d'orbites de H , j'ai alors

$$\chi(\hat{\pi}\{n\}^H) = \chi[K, H[[N_H(K) : K]^{h-1} (-1)^{h-1} (h-1)!]$$

Si $x \in \{1, \dots, n\}$, je note H_x son stabilisateur dans H . Je définis une relation d'équivalence sur $\{1, \dots, n\}$ par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow H_x \text{ et } H_y \text{ sont conjugués dans } H$$

et je note ω la partition des classes d'équivalence obtenue. Alors les parties de ω sont toutes stables par H . Si ω est triviale, alors $H = (1)$ et ω est grossière. Donc ω n'est pas triviale. Si $\omega \in \hat{\pi}\{n\}$, et si $\pi \in \hat{\pi}\{n\}^H$, soient A une partie de π , et $x \neq y$ deux points de A .

Si $\pi \cap \omega$ est triviale, alors x et y sont dans des parties ω_1 et ω_2 distinctes de ω . Alors H_x stabilise A puisque $H_x \cdot x = \{x\}$, donc $H_x \cdot y \subseteq A \cap \omega_2$. Comme $A \cap \omega_2$ contient au plus le point y , j'ai $H_x \subseteq H_y$, et $H_x = H_y$ par symétrie. Alors $\omega_1 = \omega_2$, et cette contradiction prouve que $\pi \cap \omega$ n'est pas triviale. Alors $\hat{\pi}\{n\}^H$ est contractile par les contractions $\pi \mapsto \pi \cap \omega \mapsto \omega$. D'où la première partie de la proposition.

Soit alors μ la partition des orbites de H . Si μ est grossière, alors H est transitif. Soit $x \in \{1, \dots, n\}$, et $K = H_x$. Si $\pi \in \hat{\pi}\{n\}^H$, soit π_x la partie de π contenant x , et H_{π_x} son stabilisateur dans H . Alors H_{π_x} contient K strictement (sinon π est triviale), et est un sous-groupe propre de H (sinon π est grossière). L'application $\pi \mapsto H_{\pi_x}$ est alors une bijection croissante de $\hat{\pi}\{n\}^H$ sur $]K, H[$, ce qui prouve la proposition dans ce cas, puisque $h = 1$.

Si $H = (1)$, alors $\chi(\hat{\pi}\{n\}^H) = \chi(\hat{\pi}\{n\})$, et la proposition 2 entraîne en prenant les degrés que $\chi(\hat{\pi}\{n\}) = (-1)^{n-1} (n-1)!$, et la proposition est vraie dans ce cas.

Sinon, soit μ la partition des orbites de H . Je note $K(\mu)^H$ l'ensemble des compléments de μ dans $\hat{\pi}\{n\}^H$, i.e. l'ensemble des partitions π stables par H telles que $\pi \cap \mu$ soit triviale et $\pi \cup \mu$ grossière. Alors je sais que $\hat{\pi}\{n\}^H - K(\mu)^H$ est contractile (cf. [2]). Soit alors j l'injection de $\hat{\pi}\{n\}^H - K(\mu)^H$ dans $\hat{\pi}\{n\}^H$. Alors j^n est contractile si $\pi \notin K(\mu)^H$.

Si $\pi \in K(\mu)^H$, alors puisque $\pi \cup \mu$ est grossière, il existe une partie A de π telle que $\bigcup_{h \in H} h \cdot A = \{1, \dots, n\}$, et A rencontre toutes les orbites de H . De plus, puisque $\pi \cap \mu$ est triviale, alors A rencontre chaque orbite de H en un point. Si $x, y \in A$, alors H_x stabilise A , donc $H_x \cdot y$ rencontre l'orbite de y en un point, ce qui prouve que $H_x = H_y$. Ainsi A est obtenue en choisissant dans chaque orbite un point de stabilisateur donné K dans H , et π est alors composée des translatés par H de A .

Dans chaque orbite, il y a $[N_H(K) : K]$ choix possibles, et il y a h orbites. Comme des choix traduits par $N_H(K)$ fournissent la même partition, il y a finalement $[N_H(K) : K]^{h-1}$ compléments de μ dans $\tilde{\pi}\{n\}''$. Si π est l'un d'entre eux, alors j^π s'identifie à $\tilde{\pi}\{h\}$, et $]\pi, \cdot[$ à $]K, H[$. Donc

$$\chi(\tilde{\pi}\{n\}'') = [N_H(K) : K]^{h-1} \chi(\tilde{\pi}\{h\}) \chi]K, H[$$

d'où la proposition 9.

Remarque. Il est possible de montrer que $\tilde{\pi}\{n\}$ a un seul module d'homologie non-nul, celui de rang $n-3$. Donc L_n correspond au signe près à une vraie représentation de S_n .

5.3. p -Éléments

Soit p un nombre premier, et $E_{p,n}$ l'élément de $b(S_n)$ obtenu en faisant opérer S_n sur ses p -éléments.

PROPOSITION 10. *Soit C_{p^k} le sous-groupe engendré dans S_{p^k} par un cycle de longueur p^k . Alors.*

$$\sum_{n \geq 0} E_{p,n} \cdot T^n = \text{Exp} \left(\sum_{k \geq 0} S_{p^k} / C_{p^k} \cdot T^{p^k} \right).$$

C'est une conséquence directe des définitions, et du fait que le centralisateur dans S_{p^k} d'un cycle de longueur p^k est égal à C_{p^k} .

En prenant les modules, il vient la formule classique, où je note $\gamma_{p,n}$ le nombre de p -éléments de S_n :

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_{p,n} \frac{T^n}{n!} = \text{Exp} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{T^{p^k}}{p^k} \right).$$

5.4. Groupes alternés

Si p est différent de 2, alors le module de Steinberg du groupe alterné A_n est égal à celui de S_n , puisque tout p -sous-groupe de S_n est en fait dans A_n .

Si $p = 2$, la formule suivante relie le module de Steinberg de A_n à celui de S_n

PROPOSITION 11. *Dans $\mathcal{B}(1)$, j'ai*

$$\sum_{n \geq 0} St_2(A_n) \cdot T^n = (1 + T^2) \sum_{n \geq 0} St_2(S_n) \cdot T^n = -(1 + T^2) \text{Exp}(\Phi).$$

En effet, si P est un 2-sous-groupe abélien élémentaire de S_n tel que $O_2(C_{A_n}(P)) = (1)$, alors P est engendré par une transposition. Le lemme 12 permet alors d'affirmer que le complémentaire dans $a_2(S_n)$ de l'ensemble

des sous-groupes engendrés par une transposition est homotope à $a_2(A_n)$. Et si P est engendré par une transposition, alors $]P, \cdot[$ s'identifie avec $a_2(S_{n-2})$. Donc

$$A_{a_2(S_n)} = A_{a_2(a_n)} - \text{Ind}_{S_2 \times S_{n-2}}^{S_n} A_{a_2(S_{n-2})}$$

d'où la proposition 11, d'après le corollaire 2 du théorème 2.

5.5. *Caractères*

Soit $(t_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables. Je note $\mathcal{R}$ l'anneau des séries formelles à coefficients rationnels en les t_i , où je considère que t_i est degré i . Si X_n est dans $b(S_n)$, je note $K(X_n)$ l'élément de $\mathcal{R}$ défini par

$$K(X_n) = \sum_{\pi \in S_n} X_n(s_\pi) \prod_j \frac{t_j^{\gamma_j(s_\pi)}}{j^{\gamma_j(s_\pi)} \cdot (\gamma_j(s_\pi))!}$$

où s_π est une permutation de type π de S_n , et $\gamma_j(s_\pi)$ le nombre de cycles de longueur j de s_π , et $X_n(s_\pi)$ est la valeur en s_π du caractère de X_n .

Ainsi $K(X_n)$ n'est autre que le produit scalaire sur S_n de X_n par la fonction centrale à valeurs dans $\mathcal{R}$ qui à s associe $\prod_j t_j^{\gamma_j(s)}$.

Je pose par convention $K(n) = n$ pour $n \in b(S_0) = \mathbf{Z}$. Alors si $X = \sum X_n \cdot T^n \in \mathcal{B}(1)$, je pose $K(X) = \sum K(X_n)$.

LEMME 14. *L'application K ainsi définie est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{B}(1)$ dans $\mathcal{R}$.*

Soit $c_{(t_i)}$ la fonction centrale sur S_n à valeurs dans $\mathcal{R}$ qui à s associe $\prod_j t_j^{\gamma_j(s)}$. Alors si $X = X_n \cdot T^n$ et $Y = Y_m \cdot T^m$, j'ai

$$\begin{aligned} K(X \cdot Y) &= (\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} X_n Y_m, c_{(t_i)})_{S_{n+m}} \\ &= (X_n \cdot Y_m, \text{Res}_{S_n \times S_m} c_{(t_i)})_{S_n \times S_m} \\ &= (X_n, c_{(t_i)})_{S_n} (Y_m, c_{(t_i)})_{S_m} = K(X) \cdot K(Y) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

Remarque. L'application $X \mapsto |X|$ est la composée de K avec l'application qui envoie t_i sur 0 si $i \neq 1$, et t_1 sur T .

La connaissance de $K(X)$ permet alors de trouver les valeurs de tous les $X_n(s)$, donc détermine les caractères des X_n .

Si Y est un élément de $\mathcal{B}$, et i un entier strictement positif, je note $Y^{(i)}$ l'élément de $\mathcal{B}$ obtenu en remplaçant dans Y , et pour tout j , la variable t_j par t_{ij} .

PROPOSITION 12. Si $X = \sum_{n \geq 1} X_n \cdot T^n \in \mathcal{I}(1)$, alors

$$K(\mathcal{E}xp X) = \text{Exp} \left(\sum_{i, n \geq 1} \frac{1}{i} K(X_n)^{(i)} \right).$$

Je note tout d'abord que les deux membres transforment les sommes en produits, et les différences en quotient, et il suffit donc de considérer le cas où X est de la forme $X = S_n/H \cdot T^n$, où H est un sous-groupe de S_n .

Alors par définition, j'ai

$$\mathcal{E}xp X = \sum_k S_{nk}/H_k \cdot T^{nk}$$

de sorte que

$$K(\mathcal{E}xp X) = \sum_k (1, c_{(i)})_{H_k}.$$

Il s'agit donc de connaître, pour $(h_1, \dots, h_k) \in H^k$ et $\tau \in S_k$, le type de l'élément $s = (h_1, \dots, h_k, \tau)$ de H_k .

Or si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$, j'ai $s(i, j) = (h_{\tau(j)}(i), \tau(j))$. Je note $\Omega_l(s)$ (resp. $\Omega_l(\tau)$) l'ensemble des couples (i, j) (resp. des j) qui appartiennent à une orbite de longueur l de s (resp. de τ). Alors $(i, j) \in \Omega_l(s)$ si et seulement si il existe d divisant l tel que $j \in \Omega_d(\tau)$ et $i \in \Omega_{l/d}(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})$. En notant $\omega_l(s)$ (resp. $\omega_l(\tau)$) le cardinal de $\Omega_l(s)$ (resp. de $\Omega_l(\tau)$), j'ai alors

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \frac{1}{|H|^k k!} \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \in H \\ \tau \in S_k}} \prod_l t_l^{(1/l) \sum_{j \in \Omega_d(\tau)} \omega_{l/d}(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})}$$

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \frac{1}{|H|^k k!} \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \in H \\ \tau \in S_k}} \prod_{\substack{d|l \\ j \in \Omega_d(\tau)}} t_l^{(1/l) \omega_{l/d}(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})}$$

En posant $l/d = m$ et en notant que $\omega_l = l \gamma_l$, il vient

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \frac{1}{|H|^k k!} \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \in H \\ \tau \in S_k}} \prod_{\substack{d, m \\ j \in \Omega_d(\tau)}} t_{md}^{(1/d) \gamma_m(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})}$$

soit encore puisque $\gamma_m(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})$ ne dépend que de l'orbite de j par τ

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \frac{1}{|H|^k k!} \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \in H \\ \tau \in S_k}} \prod_{\substack{d, m \\ j \in \Omega_d(\tau)/\tau}} t_{md}^{\gamma_m(h_j h_{\tau^{d-1}(j)} \dots h_{\tau(j)})}.$$

Si je fixe τ et tous les h_j pour $j \neq r$, et si r est dans $\Omega_d(\tau)$, la somme

$$\sum_{h_r} \prod_m t_{md}^{\gamma_m(h_r h_{\tau^{d-1}(r)} \dots h_{\tau(r)})}$$

est égale au produit de $|H|$ par le produit scalaire sur H de 1 avec $c_{(i)}^{(d)}$, puisque $h_r h_{\tau^{-1}(r)} \cdots h_{\tau(r)}$ décrit le groupe $|H|$ lorsque h_r varie. Alors la somme sur les autres h_j , pour j dans l'orbite de r par τ , fournit un facteur $|H|^{d-1}$ supplémentaire. Donc la somme sur les h_j , pour j dans une orbite de longueur d de τ , des termes correspondants vaut $|H|^d (1, c_{(i)}^{(d)})_H$. Finalement

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \frac{1}{|H|^k k!} \sum_{\tau \in S_k} |H|^k \prod_d (1, c_{(i)}^{(d)})_H^{d(\tau)}.$$

Donc

$$(1, c_{(i)})_{H_k} = \sum_{\pi \mid k} \prod_d \frac{(1, c_{(i)}^{(d)})_H^{a_d}}{d^{a_d} a_d!}$$

Il reste à sommer sur k , et

$$K(\mathcal{E}xp X) = Exp \left(\sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} (1, c_{(i)}^{(d)})_H \right)$$

ce qui prouve la proposition, puisque $(1, c_{(i)}^{(d)})_H = (\text{Ind}_{H^n}^{S_n} 1, c_{(i)}^{(d)})_{S_n} = K^{(d)}(S_n/H \cdot T^n)$.

Dans le cas où $X = \Phi$, je sais que $\mathcal{E}xp X = -\sum_n St_p(S_n) \cdot T^n$, et le caractère de $St_p(S_n)$ est projectif, donc nul sur les éléments d'ordre multiple de p de S_n . En d'autres termes, je peux dans la formule précédente supposer que $t_i = 0$ si i est multiple de p . D'où

$$\sum_n K(St_p(S_n)) = -Exp \left(\sum_{\substack{n, k \geq 1 \\ (n, p) = 1}} \frac{1}{n} K^{(n)}(\text{Ind}_{N(\mathfrak{p}^k)}^{S_n^k} \mu(\mathfrak{p}^k)) \right).$$

Je noterai $M_{\mathfrak{p}^k}$ le module $\text{Ind}_{N(\mathfrak{p}^k)}^{S_n^k} \mu(\mathfrak{p}^k)$. Il est possible de calculer $K(M_{\mathfrak{p}^k})$ par la formule suivante:

PROPOSITION 13. *Si $t_i = 0$ pour p divisant i , alors*

$$K(M_{\mathfrak{p}^k}) = \sum_{\phi \in GL(k, \mathbb{F}_p) / GL(k, \mathbb{F}_p)} \frac{(-1)^{k(\phi)}}{p^{k_1} \prod_{w \in \text{Irr}(\phi)} |GL(k_w, \mathbb{F}_{p^{d_w}})|_{p'}} \prod_j t_j^{j(\phi)}$$

où ϕ décrit un système de représentants des classes de conjugaison des p' -éléments de $GL(k, \mathbb{F}_p)$. Sous l'action d'un tel ϕ semi-simple, l'espace se décompose en composantes irréductibles. Je note $\text{Irr}(\phi)$ l'ensemble de ces composantes. Alors k_w est la multiplicité de w , et d_w sa dimension. En particulier k_1 est la multiplicité du module trivial. Enfin je note $k(\phi)$ la somme des k_w pour $w \in \text{Irr}(\phi)$.

En effet, le groupe $N(\mathfrak{p}^k)$ est le produit semi-direct de $\mathfrak{p}^k$ par le groupe linéaire $GL(k, \mathbb{F}_p)$. Puisque $t_i = 0$ si $p \mid i$, alors $K(M_{p^k})$ s'écrit

$$K(M_{p^k}) = \frac{1}{p^k |GL(k, \mathbb{F}_p)|} \sum_{x \in N(\mathfrak{p}^k)_p} x(\cdot, \mathfrak{p}^k[\cdot^x]) \prod_i t_i^{\gamma_i(x)}.$$

Mais puisque $\mathfrak{p}^k$ est un p -groupe, un p' -élément x de $N(\mathfrak{p}^k)$ est conjugué par un élément w de $\mathfrak{p}^k$ d'un p' -élément ϕ de $GL(k, \mathbb{F}_p)$. Puisque $\phi^w = w^{-1}\phi(w) \cdot \phi$, je vois que x s'écrit sous la forme $v \cdot \phi$, où v est dans l'image de $\phi - 1$ (avec une notation additive).

Inversement, l'élément $v \cdot \phi$, pour $\phi \in GL(k, \mathbb{F}_p)_p$ et $v \in \text{Im}(\phi - 1)$, est dans $N(\mathfrak{p}^k)_p$, car il est conjugué de ϕ . Puisque v agit trivialement sur $\mathfrak{p}^k$, et puisque pour tout i , j'ai $\gamma_i(x) = \gamma_i(\phi)$, la somme précédente devient

$$K(M_{p^k}) = \frac{1}{p^k |GL(k, \mathbb{F}_p)|} \sum_{\phi \in GL(k, \mathbb{F}_p)_p} |\text{Im}(\phi - 1)| \chi(\cdot, \mathfrak{p}^k[\cdot^\phi]) \prod_i t_i^{\gamma_i(\phi)}.$$

Or avec les notations de la proposition, le quotient $p^k/|\text{Im}(\phi - 1)|$ est le cardinal du noyau de $\phi - 1$, c'est-à-dire p^{k_1} . D'autre part, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\cdot, \mathfrak{p}^k[\cdot^\phi]$ est la valeur en ϕ du caractère de Steinberg de $GL(k, \mathbb{F}_p)$ (cf. [2]), et est égale au signe $(-1)^{k(\phi)}$ près à la p -partie de l'ordre du centralisateur $C(\phi)$ de ϕ dans $GL(k, \mathbb{F}_p)$. Finalement

$$K(M_{p^k}) = \sum_{\phi \in GL(k, \mathbb{F}_p)_p / GL(k, \mathbb{F}_p)} \frac{(-1)^{k(\phi)} |C(\phi)|_p}{p^{k_1} |C(\phi)|} \prod_i t_i^{\gamma_i(\phi)}$$

d'où la proposition, puisque

$$|C(\phi)|_p = \prod_w |GL(k_w, \mathbb{F}_{d_w})|_p$$

Par exemple si $p = 2$, il vient

$$K(M_1) = t_1, \quad K(M_2) = -\frac{t_1^2}{2}, \quad K(M_4) = \frac{t_1^4}{12} - \frac{t_1 t_3}{3},$$

$$K(M_8) = -\frac{t_1^8}{168} + \frac{t_1^2 t_3^2}{6} - \frac{2t_1 t_7}{7}.$$

Les valeurs de caractères de Steinberg pour $p = 2$ des groupes symétriques S_n pour $n \leq 15$ sont données par le développement à l'ordre 15 de

$$-Exp \left(t_1 - \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_3}{3} + \frac{t_1^4}{12} - \frac{t_1 t_3}{3} + \frac{t_5}{5} - \frac{t_3^2}{6} + \frac{t_7}{7} - \frac{t_1^8}{168} + \frac{t_1^2 t_3^2}{6} - \frac{2t_1 t_7}{7} + \frac{t_9}{9} - \frac{t_5^2}{10} + \frac{t_{11}}{11} + \frac{t_3^4}{36} - \frac{t_3 t_9}{9} + \frac{t_{13}}{13} - \frac{t_7^2}{14} + \frac{t_{15}}{15} \right)$$

dans lequel t_i est de degré i .

L'usage d'un microordinateur et des matrices de décomposition données par James dans [3] fournissent alors les valeurs suivantes pour les modules de Steinberg des groupes symétriques pour $p=2$:

$$\begin{aligned}
 St_2(S_5) &= -P^{(3,2)}, & St_2(S_6) &= -P^{(3,2,1)}, \\
 St_2(S_7) &= P^{(4,2,1)} + P^{(4,3)}, & St_2(S_8) &= P^{(5,2,1)} + P^{(4,3,1)}, \\
 St_2(S_9) &= P^{(4,3,2)} - P^{(5,4)} + P^{(6,2,1)}, \\
 St_2(S_{10}) &= -3P^{(4,3,2,1)} - P^{(5,4,1)} - P^{(5,3,2)}, \\
 St_2(S_{11}) &= P^{(6,5)} - 3P^{(6,3,2)} - P^{(7,3,1)} + P^{(6,4,1)}, \\
 St_2(S_{12}) &= P^{(6,5,1)} + 2P^{(5,4,3)} + 2P^{(6,3,2,1)} + 3P^{(5,4,2,1)}, \\
 St_2(S_{13}) &= -P^{(7,6)} + P^{(8,4,1)} + 2P^{(8,3,2)} + 4P^{(7,4,2)} - P^{(6,5,2)} \\
 &\quad + 2P^{(6,4,3)} - 7P^{(7,3,2,1)} - P^{(6,4,2,1)} - 3P^{(5,4,3,1)}.
 \end{aligned}$$

Pour $n \leq 7$, ces modules sont déjà indiqués par Webb dans [4]. Ceux de S_9 , S_{11} et S_{13} sont intéressants car ce ne sont pas au signe près de vrais modules, ce qui indique que les ensembles $s_2(S_n)$ correspondants ont plus d'un module d'homologie non-nul.

5.6. Valeurs numériques

Les formules données plus haut donnent les valeurs suivantes pour $\chi(s_p(S_n))$:

n	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$
1	-1	-1	-1	-1
2	0	-1	-1	-1
3	2	0	-1	-1
4	0	3	-1	-1
5	-16	9	5	-1
6	-16	9	35	-1
7	160	-36	125	119
8	512	-225	335	959
9	-640	-2 997	755	4 319
10	-7 936	-24 381	-3 025	14 399
11	-20 736	-127 656	-47 125	39 599
12	235 520	37 179	-294 625	95 039
13	3 244 032	5 388 525	-1 289 575	205 919
14	2 232 320	44 534 853	-4 528 525	-24 298 561

BIBLIOGRAPHIE

1. S. BOUC, Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, modules de Steinberg généralisés, *J. Algebra* **139**, No. 2, June 1 (1991).
2. S. BOUC, Homologie de certains ensembles ordonnés, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **299**, n° 2 (1984).
3. G. D. JAMES, The representation theory of the symmetric groups, in "Lecture Notes in Mathematics, Vol. 682," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1978.
4. P. J. WEBB, Subgroup complexes, in "Proceedings, 1986 AMS Symposium on Representation Theory."