FONCTEURS D'ENSEMBLES MUNIS D'UNE DOUBLE ACTION

Serge Bouc

1 Introduction

La théorie des foncteurs de Mackey peut-être vue comme une axiomatisation des procédés d'induction et de restriction. Par exemple si H est un sous-groupe d'un groupe G, et si N (resp. M) est un module pour le groupe H (resp. pour le groupe G), alors il est possible de parler des modules $\mathrm{Ind}_H^G N$ et $\mathrm{Res}_H^G M$. Les foncteurs d'induction et de restriction définissent alors des applications $\mathbf{Z}$-linéaires entre l'anneau de Green de H et celui de G, qui outre des propriétés de transitivité, vérifient l'identité de Mackey. La généralisation formelle de ces propriétés conduit à l'étude des foncteurs de Mackey.

Or si à présent K est un sous-groupe normal du groupe G, si $H = G/K$, et si M est un G-module et N un H-module, alors il est possible de construire le module $\mathrm{Inf}_H^G N$, qui est un G-module, et le module des points "cofixes" par K sur M, i.e. le plus grand quotient de M sur lequel K agit trivialement, que je noterai M_K. C'est un H-module.

Une question naturelle est alors de savoir s'il est possible d'intégrer les opérations d'inflation et de "points cofixes", ou co-inflation, au formalisme des foncteurs de Mackey.

La première remarque consiste à dire que les quatre cas ci-dessus relèvent d'un même cadre: dans chaque cas, si H est le groupe de départ, et G le groupe d'arrivée, et si N est le H-module de départ, alors il existe un bimodule E sur lequel G agit à gauche, et H à droite, tel que le module d'arrivée M soit donné par

$$M = E \otimes_H N$$

La seconde remarque est que dans chaque cas, le bimodule E provient d'un ensemble sur lequel G agit par permutations à gauche et H à droite. Dans le cas de l'induction, cet ensemble est le groupe G lui-même, ainsi que dans le cas de la restriction (les groupes de départ et d'arrivée étant alors échangés). Dans le cas de l'inflation, cet ensemble est le groupe $H = G/K$, ainsi que pour la co-inflation (même remarque).

Plus généralement, si E est un ensemble sur lequel G agit à gauche et H à droite, de façon que

$$g(xh) = (gx)h \text{ pour tous } g \in G, x \in E, h \in H$$

si $[E]$ désigne le bimodule associé à E, et si N est un H-module, alors je peux construire le G-module $[E] \otimes_H N$. J'obtiens ainsi une application $M(E)$ de l'anneau de Green $M(H)$ de H dans celui de G.

En d'autre termes, j'ai pour tout groupe fini H, un $\mathbf{Z}$-module $M(H)$, et pour tout G-ensemble-H E un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules $M(E)$ de $M(H)$ dans $M(G)$. Si à présent K est un troisième groupe, et F un H-ensemble-K, alors il est facile de voir que

$$M(E)M(F) = M(E \times_H F)$$

où $E \times_H F$ désigne l'ensemble des orbites de H par son action sur le produit $E \times F$ donnée par $h.(x, y) = (xh^{-1}, hy)$. C'est un G-ensemble-K: si $g \in G$ et $k \in K$, alors par définition

$$g.\overline{(x, y)}.k = \overline{(gx, yk)}$$

Soit alors $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les groupes finis. Si H et G sont des objets de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(G, H)$ est par définition le groupe de Grothendieck des G-ensembles-H finis (i.e. les sommes algébriques finies de G-ensembles-H finis, la réunion disjointe $E \amalg E'$ étant identifiée à $E+E'$). Le produit des morphismes F de K dans H et E de H dans G est défini par linéarité comme ci-dessus par

$$E \circ F = E \times_H F$$

Le morphisme identique de G dans G n'est autre que l'ensemble G lui-même, muni de son action naturelle par multiplication à gauche et à droite.

Alors l'opération qui à tout groupe fini G associe son anneau de Green $M(G)$, et à tout G-ensemble-H E associe l'application $M(E)$ n'est autre qu'un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules. L'objet du présent article est détudier de tels foncteurs, ou plus généralement des foncteurs de sous-catégories de $\mathcal{C}$ (non-nécessairement pleines) dans des catégories de modules.

Outre le cas des modules, le foncteur qui associe à tout groupe fini G son anneau de Burnside $b(G)$ fournit un autre exemple de tel foncteur. De même, si K est un corps de caractéristique 0, le foncteur qui à G associe le groupe de Grothendieck $R_K(G)$ des KG-modules est aussi un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules. Par contre, si k est un corps de caractéristique $p > 0$, alors l'application qui à un groupe G associe le groupe de Grothendieck $R_k(G)$ n'est pas un foncteur sur $\mathcal{C}$: cela tient au fait que le produit tensoriel par E doit conserver les suites exactes. Il faut alors éliminer des morphismes possibles les ensembles E dont le module associé n'est pas projectif en caractéristique p: c'est possible en considérant par exemple la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$, le groupe $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}'}(G, H)$ étant le groupe de Grothendieck des G-ensembles-H libres à droite. Alors R_k est un foncteur pour $\mathcal{C}'$.

2 Notations. Généralités

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive, i.e. telle que si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est doté d'une structure de groupe abélien, pour laquelle la loi de composition est bi-additive, et A un anneau commutatif.

Je noterai $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de catégories additives de $\mathcal{C}$ dans la catégorie ${}_A Mod$ des A-modules, les morphismes étant les morphismes de foncteurs. Ainsi, un objet M de $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ est caractérisé par la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un A-module $M(X)$, et pour tout morphisme ϕ de X dans Y d'un morphisme de A-modules $M(\phi)$ de $M(X)$ dans $M(Y)$. Ces données sont sujettes aux conditions habituelles concernant les foncteurs, à savoir

$$M(\phi)M(\psi) = M(\phi\psi) \qquad M(Id) = Id$$

Un morphisme θ d'un objet M de $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ dans un objet N est caractérisé par la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme de A-modules θ_X de $M(X)$ dans $N(X)$, de manière à ce que tous les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{\theta_X} & N(X) \\ M(\phi)\downarrow & & \downarrow N(\phi) \\ M(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & N(Y) \end{array}$$

soient commutatifs.

Alors $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ est une catégorie abélienne (le noyau d'un morphisme θ est défini par $\mathrm{Ker}\theta(X) = \mathrm{Ker}(\theta_X)$, de même $\mathrm{Im}\theta(X) = \mathrm{Im}(\theta_X)$, $(M \oplus M')(X) = M(X) \oplus M'(X)$, etc...). D'où la notion de sous-foncteur et de foncteur quotient. Un foncteur simple est par définition un foncteur n'ayant aucun sous-foncteur propre. Un foncteur M est projectif (resp. injectif) si le foncteur $N \mapsto \mathcal{H}om_{Fonct}(M,N)$ (resp. le foncteur $N \mapsto \mathcal{H}om_{Fonct}(N,M)$) est exact, comme foncteur de $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ dans ${}_A Mod$ (comme A est commutatif, le groupe $\mathcal{H}om_{Fonct}(N,M)$ est bien un A-module).

Il y a un foncteur naturel de $\mathcal{C}$ dans $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$: si X est un objet de $\mathcal{C}$, soit L_X l'application qui à Y objet de $\mathcal{C}$ associe

$$L_X(Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y) = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

Si ϕ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ de Y dans Z, alors

$$L_X(\phi)(a \otimes \psi) = a \otimes \phi\psi$$

Il est alors bien connu que

$$\mathcal{H}om_{Fonct}(L_X, M) = M(X)$$

et en particulier $\mathcal{H}om_{Fonct}(L_X, L_Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y)$.

Soit alors $\mathcal{C}_A$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$, et telle que $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_A}(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y)$. Alors la catégorie $\mathcal{C}_A$ est une catégorie A-additive, au sens où si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}_A$, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_A}(X,Y)$ a une structure de A-module, les compositions des morphismes étant des applications A-bilinéaires.

Si $\mathcal{D}$ est une catégorie A-additive, je note $Fonct_A(\mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs (entre catégories A-additives) de $\mathcal{D}$ dans ${}_AMod$ (qui est A-additive car A est commutatif). Il est facile de voir que les catégories $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ et $Fonct_A(\mathcal{C}_A)$ sont équivalentes, donc que $Fonct(\mathcal{C},{}_A Mod)$ ne dépend que de $\mathcal{C}_A$. Je supposerai donc dans la suite que $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a une structure naturelle de A-module, et j'oublierai les indices A autant que possible.

Dans ces conditions, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'anneau $\mathcal{E}nd(X) = \mathcal{E}nd_{\mathcal{C}}(X)$ est une algèbre sur A. De plus, il y a un foncteur E_X d'évaluation en X de $Fonct_A(\mathcal{C})$ dans ${}_{\mathcal{E}nd(X)}Mod$, défini par $E_X(M) = M(X)$: le A-module $M(X)$ est en fait un $\mathcal{E}nd(X)$-module si l'action de $\phi \in \mathrm{End}(X)$ sur $m \in M(X)$ est définie par $\phi.m = M(\phi)(m)$.

Le foncteur E_X a un adjoint à gauche, qui à un $\mathcal{E}nd(X)$-module V associe le foncteur $L_{X,V}$ de $Fonct_A(\mathcal{C})$ défini par

$$L_{X,V}(Y) = \mathrm{Hom}(X,Y) \otimes_{\mathcal{E}nd(X)} V \qquad L_{X,V}(\phi)(\psi \otimes v) = \phi\psi \otimes v$$

Il a également un adjoint à droite $L^{o}_{X,V}$ défini par

$$L^{o}_{X,V}(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}nd(X)}(\mathrm{Hom}(Y,X),V) \qquad L^{o}_{X,V}(\phi)(\alpha)(\beta) = \alpha(\beta\phi)$$

si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}nd(X)}(\mathrm{Hom}(Y,X),V)$, et $\beta \in \mathrm{Hom}(Z,X)$.

Comme $E_X L_{X,V} = L_{X,V}(X) = \mathcal{E}nd(X) \otimes_{\mathcal{E}nd(X)} V = V$, et comme

$$\mathcal{H}om_{Fonct}(L_{X,V}, L_{X,W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}nd(X)}(V, L_{X,W}(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}nd(X)}(V,W)$$

je peux voir ${}_{\mathcal{E}nd(X)}Mod$ comme sous-catégorie pleine de $Fonct_A(\mathcal{C})$.

Si V est un $\mathcal{E}nd(X)$ module projectif (resp. projectif indécomposable), alors $L_{X,V}$ est un foncteur projectif (resp. projectif indécomposable), car le foncteur qui à V associe $L_{X,V}$ est adjoint à gauche d'un foncteur exact. Par contre, si V est un $\mathcal{E}nd(X)$-module simple, en général $L_{X,V}$ n'est pas simple, mais:

Lemme 1: Si V est un $\mathcal{E}nd(X)$-module simple, alors $L_{X,V}$ a un unique sous-foncteur maximal $J_{X,V}$, et le quotient $S_{X,V} = L_{X,V}/J_{X,V}$ est simple, tel que $S_{X,V}(X) = V$.

En effet, soit M un sous-foncteur de $L_{X,V}$. Alors pour tout Y, le module $M(Y)$ est un sous-module de $L_{X,V}(Y) = \mathcal{H}om(X,Y) \otimes_{\mathcal{E}nd(X)} V$. En particulier, le module $M(X)$ est un sous-$\mathcal{E}nd(X)$-module de $L_{X,V}(X) = V$. Comme V est simple, il y a deux cas:

a) Ou bien $M(X) = V$. Alors si Y est un objet de $\mathcal{C}$, si ϕ est un morphisme de X dans Y, et si $v \in V$, comme $\phi \otimes v = L_{X,V}(\phi)(Id \otimes v)$, et comme $Id \otimes v \in M(X)$, je vois que $M(Y) = L_{X,V}(Y)$ pour tout Y, donc que $M = L_{X,V}$ dans ce cas.

b) Ou bien $M(X)=0$. Alors si $\sum_i \phi_i\otimes v_i\in M(Y)$, et si ψ est un morphisme de Y dans X, alors

$$M(\psi)(\sum_i \phi_i\otimes v_i)=\sum_i \psi\phi_i\otimes v_i=\sum_i(\psi\phi_i)v_i\in M(X)=0$$

Si je pose

$$J_{X,V}(Y)=\{\sum_i \phi_i\otimes v_i\in M(Y)\mid \forall\psi:Y\to X,\sum_i(\psi\phi_i)v_i=0\}$$

je vois que $M(Y)\subseteq J_{X,V}(Y)$. De plus la définition ci-dessus fait de $J_{X,V}$ un sous-foncteur de $L_{X,V}$: en effet, si Z est un objet de $\mathcal{C}$, si ϕ est un morphisme de Y dans Z, et si $\sum_i \phi_i\otimes v_i\in M(Y)$, alors

$$L_{X,V}(\phi)(\sum_i \phi_i\otimes v_i)=\sum_i \phi\phi_i\otimes v_i$$

Si ψ est un morphisme de Z dans X,

$$\sum_i(\psi\phi\phi_i)v_i=\sum_i((\psi\phi)\phi_i)\otimes v_i=0$$

car $\psi\phi$ est un morphisme de Y dans X.

Donc $J_{X,V}$ est l'unique sous-foncteur maximal de $L_{X,V}$. Le quotient $S_{X,V}$ est donc simple. Il est clair de plus que $J_{X,V}(X)=0$, donc que $S_{X,V}(X)=V$. c.q.f.d.

Ainsi à un couple (X,E), où X est un objet de $\mathcal{C}$ et E un $\mathcal{E}nd(X)$-module projectif indécomposable, je peux associer un foncteur projectif indécomposable $L_{X,E}$. De même, à un couple (X,V), où X est un objet de $\mathcal{C}$ et V un $\mathcal{E}nd(X)$-module simple, je peux associer un foncteur simple $S_{X,V}$. En fait:

Lemme 2: Si E est un enveloppe projective de V, alors $L_{X,E}$ est une enveloppe projective de $S_{X,V}$.

Le lemme 2 se démontre par le même argument que le lemme 1, en utilisant le fait que le morphisme $E\to V$ est essentiel.

Il y a donc là un moyen d'indexer certains foncteurs projectifs et certains foncteurs simples par des couples formés d'un objet X de $\mathcal{C}$ et d'un $\mathcal{E}nd(X)$ module. Mais je ne dis pas que cette correspondance est surjective, ni injective: il se pourrait en effet qu'il y ait d'autres foncteurs simples que les $S_{X,V}$, et il arrive souvent que des couples (X,V) et (Y,W) différents donnent des foncteurs $S_{X,V}$ et $S_{Y,W}$ isomorphes.

Remarque: Si e est un idempotent primitif de $\mathcal{E}nd(X)$, alors $L_{X,\mathcal{E}nd(X)e}(Y)$ s'identifie à $\mathcal{H}om(X,Y)e$, i.e. aux morphismes de X dans Y qui factorisent à travers e. De plus

$$\mathcal{H}om_{Fonct}(L_{X,\mathcal{E}nd(X)e},M)=eM(X)$$

3 Ensembles munis d'une double action

Dans toute la suite, la catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$ sera celle dont les objets sont les groupes finis. Si G et H sont des objets de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H, G)$ est le produit tensoriel par A du groupe de Grothendieck de la catégorie des G-ensembles-H, le produit de deux morphismes étant défini par A-linéarité à partir du produit d'ensembles défini dans l'introduction.

Je serai amené à considérer certaines sous-catégories de $\mathcal{C}$, non-néces saire-ment pleines mais ayant "des propriétés raisonnables", dont la définition nécessite quelques notations et remarques.

3.1 Notations

a) Tout G-ensemble-H est réunion disjointe de G-ensembles-H transitifs, qui sont aussi des $G \times H^{op}$-ensembles de permutation transitifs, donc associés à un sous-groupe de $G \times H^{op}$. Si K est un sous-groupe de $G \times H$, je noterai $G \times H/K$ le G-ensemble-H des classes à gauche de $G \times H$ par K, la double action du couple $(g, h) \in G \times H$ étant donnés par

$$g.(\alpha, \beta)K.h = (g\alpha, h^{-1}\beta)K$$

Ces ensembles constituent une base du A-module $\mathcal{H}om(H, G)$.
b) Si K est un sous-groupe du produit $G \times H$, je note $p_1(K)$ (resp. $p_2(K)$) sa projection sur G (resp. sur H), i.e.

$$p_1(K) = \{g \in G \mid \exists h \in H,\ (g, h) \in K\}$$

De même, je note

$$k_1(K) = \{g \in G \mid (g, 1) \in K\} \text{ et } k_2(K) = \{h \in H \mid (1, h) \in K\}$$

Alors $k_1(K)$ (resp. $k_2(K)$) est un sous-groupe normal de $p_1(K)$ (resp. $p_2(K)$). Le produit $k_1(K) \times k_2(K)$ est un sous-groupe normal de K, et de plus les quotients $K/k_1(K) \times k_2(K)$, $p_1(K)/k_1(K)$ et $p_2(K)/k_2(K)$ sont isomorphes. Je noterai $q(K)$ ce quotient commun.

Ainsi je peux récupérer le groupe K en choisissant un sous-groupe G_1 de G, un sous-groupe H_1 de H, un groupe Q quotient commun de G_1 et H_1, une surjection s de G_1 dans Q, une surjection t de H_1 dans Q, en posant

$$K = \{(g, h) \in G_1 \times H_1 \mid s(g) = t(h)\}$$

c) Si G, H et K sont des groupes, si L est un sous-groupe de $G \times H$, et si M est un sous-groupe de $H \times K$, je pose

$$L * M = \{(g, k) \in G \times K \mid \exists h \in H,\ (g, h) \in L,\ (h, k) \in M\}$$

C'est un sous-groupe de $G \times K$.

3.2 Formule de Mackey

Les notations précédentes permettent d'établir l'analogue dans ce cadre de la formule de Mackey:

Proposition 1: Soit L un sous-groupe de $G \times H$, et M un sous-groupe de $H \times K$. Alors

$$(G \times H/L) \ \times_H \ (H \times K/M) \ = \sum_{h \in p_2(L)\backslash H/p_1(M)} G \times K/L *^{(h,1)} M$$

En effet, les orbites de $G \times K$ sur $X = (G \times H/L) \ \times_H \ (H \times K/M)$ sont en bijection avec l'ensemble $p_2(L)\backslash H/p_1(M)$ par les applications

$$G((g,h)L \times_H (h',k)M)K \in G\backslash X/K \longmapsto p_2(L)h^{-1}h'p_1(M) \in p_2(L)\backslash H/p_1(M)$$

$$p_2(L)hp_1(M) \in p_2(L)\backslash H/p_1(M) \longmapsto G((1,1)L \times_H (h,1)M)K \in G\backslash X/K$$

D'autre part, si E est un G-ensemble-H et F un H-ensemble-K, si U est le stabilisateur dans $G \times H$ du point $e \in E$ et V le stabilisateur dans $H \times K$ du point $f \in F$, alors le stabilisateur dans $G \times K$ du point (e,f) de $E \times_H F$ est égal à $U * V$. Donc le stabilisateur dans $G \times K$ du point $(1,1)L \times_H (h,1)M$ est égal à $L *^{(h,1)} M$, ce qui prouve la proposition.

3.3 Décomposition d'un morphisme

Soient G et H des groupes finis. Si M est un sous-groupe d'un produit $G \times H$, je note M^* le sous-groupe de $H \times G$ défini par

$$M^* = \{(h,g) \in H \times G \mid (g,h) \in M\}$$

De même, si X est un G-ensemble-H, je note X^* le H-ensemble-G dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble X, l'action du couple (h,g) sur l'élément x de X étant donnée par $h.x.g = g^{-1}xh^{-1}$. Avec ces notations, il est clair que $(G \times H/M)^* = H \times G/(M^*)$

Si H est un sous-groupe de G, je note $\Delta(H)$ le sous-groupe de $G \times H$ défini par $\Delta(H) = \{(h,h) \mid h \in H\}$. Plus généralement, si ϕ est un morphisme de groupes de H dans G, et K un sous-groupe de H, je note $\Delta_\phi(K)$ le sous-groupe de $G \times H$ défini par $\Delta_\phi(K) = \{(\phi(k),k) \mid k \in K\}$.

Soit alors L un sous-groupe de $G \times H$. En notant G_1 (resp. H_1) la première projection (resp. la deuxième projection) de L, et K le groupe $q(L)$, il existe une surjection s de G_1 dans K et une surjection t de H_1 dans K telles que

$$L = \{(g,h) \in G_1 \times H_1 \mid s(g) = t(h)\}$$

Soit X le H_1-ensemble-H défini par $X = H_1 \times H/\Delta(H_1)^*$. Je note de même T le G-ensemble-G_1 défini par $T = G \times G_1/\Delta(G_1)$.

Je note Y le K-ensemble-H_1 défini par $Y = K \times H_1/\Delta_t(H_1)$, et Z le G_1-ensemble-K défini par $Z = G_1 \times K/\Delta_s(G_1)^*$.

Avec ces notations:

Lemme 3: Le G-ensemble-H $G \times H/L$ se décompose en

$$G \times H/L = T \times_{G_1} Z \times_K Y \times_{H_1} X$$

En effet, par la formule de Mackey,

$$Y \times_{H_1} X = K \times H/\Delta_t(H_1) * \Delta(H_1) = K \times H/\{(t(h), h) \mid h \in H_1\}$$

De même

$$T \times_{G_1} Z = G \times K/\{(g, s(g) \mid g \in G_1\}$$

Donc

$$T \times_{G_1} Z \times_K Y \times_{H_1} X = G \times H/\{(g, s(g) \mid g \in G_1\} * \{(t(h), h) \mid h \in H_1\}$$

et le lemme résulte alors de ce que

$$\{(g, s(g) \mid g \in G_1\} * \{(t(h), h) \mid h \in H_1\} = \{(g, h) \in G_1 \times H_1 \mid s(g) = t(h)\} = L$$

Remarques: L'ensemble X est "de type restriction", l'ensemble Y est "de type points cofixes", l'ensemble Z est "de type inflation", et l'ensemble T "de type induction": le formalisme des ensembles munis d'une double action n'introduit donc pas de phénomène essentiellement nouveau.

3.4 Sous-catégories

Je vais considérer des sous-catégories $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ ayant les propriétés suivantes:

- A) Si G et H sont des objets de $\mathcal{D}$, alors il existe un ensemble $S(G, H)$ de sous-groupes de $G \times H$ tel que $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H, G)$ soit le sous-A-module de $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H, G)$ engendré par les ensembles $G \times H/K$, pour $K \in S(G, H)$. Autrement dit, le module $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H, G)$ a pour base un partie de la base de $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H, G)$.

– B) Si $K \in S(G,H)$, alors $q(K)$ est un objet de $\mathcal{D}$. De plus, si s et t sont des surjections de $p_1(K)$ dans $q(K)$ et de $p_2(K)$ dans $q(K)$ telles que

$$K = \{(g,h) \in p_1(K) \times p_2(K) \mid s(g) = t(h)\}$$

alors $\Delta_s(p_1(K))^* \in S(G, q(K))$ et $\Delta_t(p_2(K)) \in S(q(K), H)$. En d'autres termes, le morphisme $G \times H/K$ de H dans G factorise dans $\mathcal{D}$ par le groupe $q(K)$.

Il semble que ces deux hypothèses soient nécessaires pour pouvoir par exemple tenter de classifier les objets simples de $Fonct_A(\mathcal{D})$. Elles permettent également de traiter les cas naturels évoqués dans l'introduction.
Remarque: Comme le groupe $q(L)$ n'est défini qu'à isomorphisme près, la condition B) entraîne que $\mathcal{D}$ est stable par isomorphisme de groupe, ce qui est la moindre des choses...

3.4.1 Ensembles $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libres

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux familles non-vides de groupes finis ayant les propriétés suivantes:

1. Si P est dans $\mathcal{P}$, et si P' est un sous-groupe de P, alors P' est dans $\mathcal{P}$.

2. Si P est dans $\mathcal{P}$, et si P' est un sous-groupe normal de P, alors P/P' est dans $\mathcal{P}$.

3. Si P' est un sous-groupe normal du groupe P, si P' et P/P' sont dans $\mathcal{P}$, alors P est dans $\mathcal{P}$.

Remarque: La condition 2), jointe au fait que $\mathcal{P}$ est non-vide, entraîne que $\mathcal{P}$ contient le groupe trivial.

Comme exemple de telles familles, il y a la famille réduite au groupe trivial, la famille des p-groupes, celle des p'-groupes, celle des groupes résolubles, celle de tous les groupes finis...

Si G et H sont des groupes finis, et si E est un G-ensemble-H, je dirai que E est $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre si le stabilisateur à gauche d'un point quelconque de E est dans $\mathcal{P}$, et son stabilisateur à droite dans $\mathcal{Q}$. Dans le cas où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont réduites au groupe trivial, un ensemble $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre est simplement un ensemble libre à gauche et à droite. Si $E = G \times H/K$,alors E est $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre si et seulement si $k_1(K)$ est dans $\mathcal{P}$ et $k_2(K)$ dans $\mathcal{Q}$.

Soit alors $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ la catégorie dont les objets sont les groupes finis. Si G et H sont des objets de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}}(H,G)$ est le sous-module de $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H,G)$ engendré par les G-ensembles-H qui sont $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libres. Alors:

Lemme 4: Cette définition fait de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, ayant les propriétés A) et B).

En effet, la première partie de la condition B) est trivialement réalisée, puisque tous les groupes finis sont objets de $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$. La seconde résulte du fait que si $M = \Delta_s(p_1(K))^*$, alors $k_1(M) = k_1(K) \in \mathcal{P}$ et $k_2(M) = (1) \in \mathcal{Q}$. De même, si $L = \Delta_t(p_2(K))$, alors $k_1(L) = (1) \in \mathcal{P}$ et $k_2(L) = k_2(K) \in \mathcal{Q}$.

La condition A) résulte de la définition. De plus, si G est un groupe fini, alors l'ensemble G doté de son action naturelle par multiplication à gauche et à droite est $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre, car il est libre à gauche et à droite. Donc l'identité est un morphisme de G.

Il reste à voir que les ensembles $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libres se multiplient entre eux. Soient donc G, H, et K des groupes finis, soit E un G-ensemble-H $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre, et F un H-ensemble-K $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre. Soit (e,f) un point du produit $E\times_H F$. Le stabilisateur à gauche de (e,f) est

$$G_1 = \{g\in G \mid \exists h\in H,\ geh=e,\ hf=f\}$$

Soit alors

$$H_1 = \{h\in H \mid \exists g\in G,\ geh=e,\ hf=f\}$$

Alors H_1 est un sous-groupe du stabilisateur à gauche de f dans H. Donc H_1 est dans $\mathcal{P}$.

Soit de même

$$G_2 = \{g\in G \mid ge=e\}$$

Alors G_2 est dans $\mathcal{P}$, et c'est un sous-groupe de G_1.

Soit enfin

$$H_2 = \{h\in H \mid eh=e,\ hf=f\}$$

C'est un sous-groupe normal de H_1, donc H_1/H_2 est un élément de $\mathcal{P}$.

Or il y a un morphisme surjectif naturel de G_1 dans H_1/H_2, qui fait correspondre à $g\in G$ la classe d'un élément h tel que $geh=e$ et $hf=f$. Le noyau de ce morphisme est G_2. Alors G_2 et G_1/G_2 sont dans $\mathcal{P}$, et G_1 est dans $\mathcal{P}$. Le même raisonnement de l'autre côté montre que $E\times_H F$ est $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$-libre, donc que $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ est bien une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, ce qui prouve le lemme.

3.4.2 Groupes réductifs

Soit p un nombre premier, et $\mathcal{C}_p$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les groupes réductifs finis en caractéristique p. Si P est un sous-groupe parabolique d'un objet G de $\mathcal{C}_p$, je noterai $r(P)$ son radical unipotent, égal à $O_p(P)$, et $\overline{P}$ le quotient $P/r(P)$. Je note π_P ou $p\mapsto\overline{p}$ la projection naturelle de P sur $\overline{P}$.

Si G et H sont des objets de $\mathcal{C}_p$, soit $S(G,H)$ l'ensemble des sous-groupes K de $G\times H$ tels qu'il existe un sous-groupe parabolique P de G, un sous-groupe parabolique Q de H, et un isomorphisme θ de $\overline{P}$ sur $\overline{Q}$, tels que

$$K = \{(p,q) \in P \times Q \mid \theta(\overline{p}) = \overline{q}\}$$

Remarque: Dans ces conditions, le groupe P est égal à $p_1(K)$, et le groupe Q à $p_2(K)$. Donc $p_1(K)$ (resp. $p_2(K)$) est parabolique, et $k_1(K)$ (resp. $k_2(K)$) est son radical unipotent. Inversement, ces conditions entraînent que $K \in S(G,H)$.

Alors par définition, le module $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}_p}(H,G)$ est le sous-module de $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H,G)$ engendré par les ensembles $G \times H/K$, pour $K \in S(G,H)$.

Lemme 5: Ces définitions font de $\mathcal{C}_p$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, ayant les propriétés A) et B).

La propriété A) est vraie par définition. La propriété B) résulte du fait qu'avec les notations ci-dessus, le groupe $q(K)$ n'est autre que le groupe $\overline{P}$, isomorphe à $\overline{Q}$: c'est donc le quotient d'un groupe parabolique par son radical unipotent, donc un groupe réductif. Il est clair d'autre part que $\{(p,x) \in P \times \overline{Q} \mid \theta(\overline{p}) = x\}$ (resp. $\{(x,q) \in \overline{Q} \times Q \mid x = \overline{q}\}$) est dans $S(G,\overline{Q})$ (resp. dans $S(\overline{Q},H)$).

D'autre part, si G est un groupe réductif, alors la diagonale

$$\Delta(G) = \{(g,g) \in G \times G \mid g \in G\}$$

est bien dans $S(G,G)$, et l'identité est un morphisme de G.

Il reste à voir que les morphismes se multiplient entre eux. Par la formule de Mackey, il suffit de montrer que si P (resp. Q, R, S) est un sous-groupe parabolique de G (resp. H, H, K), si θ (resp. ϕ) est un isomorphisme de $\overline{P}$ sur $\overline{Q}$ (resp. de $\overline{R}$ sur $\overline{S}$), si $h \in H$ et si

$$L = \{(p,q) \in P \times Q \mid \theta(\overline{p}) = \overline{q}\}$$

$$M = \{(r,s) \in R \times S \mid \phi(\overline{r}) = \overline{s}\}$$

alors le groupe $N = L *^{(h,1)} M$ est un élément de $S(G,K)$.

Or la première projection de N est l'ensemble des $p \in P$ pour lesquels il existe un $q \in Q$ et un $s \in S$ tels que

$$\theta(\overline{p}) = \overline{q} \qquad q^h \in R \qquad \phi(\overline{q^h}) = \overline{s}$$

Alors $q \in Q \cap^h R$, et $p_1(N) = \pi_P^{-1}\theta^{-1}\pi_Q(Q \cap^h R)$, ou encore

$$p_1(N) = \pi_P^{-1}\theta^{-1}\pi_Q((Q \cap^h R)r(Q))$$

Or π_P induit une bijection entre les sous-groupes paraboliques de P et les sous-groupes paraboliques de $\overline{P}$. De même, l'isomorphisme θ induit une bijection entre les sous-groupes paraboliques de $\overline{P}$ et ceux de $\overline{Q}$ (car un sous-groupe parabolique peut être défini de façon abstraite par l'égalité $P = N_G(O_p(P))$). Comme de plus, le groupe $(Q \cap^h R).r(Q)$ est un sous-groupe parabolique de Q (cf. [DI-MI], chapitre 2, [CU1]), il en résulte que $p_1(N)$ est un sous-groupe parabolique de G. De même, le groupe $p_2(N)$ est un sous-groupe parabolique de K.

Un raisonnement analogue montre que

$$k_1(N) = \pi_P^{-1}\theta^{-1}\pi_Q((Q \cap^h r(R))r(Q))$$

et comme $(Q \cap^h r(R))r(Q)$ est le radical unipotent de $(Q \cap^h R)r(Q)$, il en résulte que $k_1(K)$ est le radical unipotent de $p_1(K)$, ce qui prouve la proposition.

4 Foncteurs simples

Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ vérifiant les conditions A) et B), et S un objet simple de $Fonct_A(\mathcal{D})$. Soit H un objet de $\mathcal{D}$ d'ordre minimal tel que $S(H) \neq 0$.

Soit de plus $V = S(H)$, et W un sous-$\mathcal{E}nd(H)$-module non-nul de V. Alors

$$\mathcal{H}om_{Fonct}(L_{H,W}, S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}nd(H)}(W, V) \neq 0$$

Comme S est simple, il en résulte que S est un quotient de $L_{H,W}$. Comme $L_{H,W}(H) = W$, j'ai donc $W = V$, ce qui prouve que V est un $\mathcal{E}nd(H)$-module simple. Alors comme $L_{H,V}$ a un unique quotient simple $S_{H,V}$, il en résulte que S est isomorphe à $S_{H,V}$.

De plus, si X est un H-ensemble-H qui factorise par un groupe K d'ordre strictement plus petit que celui de H, alors $S(X).S(H) = X.V = 0$, car $S(K) = 0$. Donc V est annulé par tous les H-ensembles-H de ce type. Ces derniers engendrent un idéal I_H de $\mathcal{E}nd(H)$.

Alors si L est un sous-groupe de $H \times H$, si H_1 et H_2 sont ses projections sur H, si $K = q(L)$ et si s et t sont des surjections de H_1 dans K et de H_2 dans K telles que

$$L = \{(a, b) \in H_1 \times H_2 \mid s(a) = t(b)\}$$

et si de plus $H \times H/L \notin I_H$, alors le groupe K doit être d'ordre supérieur ou égal à celui de H. Comme K est une section de H, il en résulte que K est isomorphe à H, que H_1 et H_2 sont égaux à H, et que s et t sont des isomorphismes. En d'autres termes, il existe un automorphisme ϕ de H tel que $L = \Delta_\phi(H)$.

Il est facile de voir d'autre part que les sous-groupes $\Delta_\phi(H)$ et $\Delta_\psi(H)$ sont conjugués dans $H \times H$ si et seulement si il existe un automorphisme intérieur i de H tel que $\psi = \phi i$. Comme de plus

$$\Delta_\phi(H) * \Delta_\psi(H) = \Delta_{\phi\psi}(H)$$

j'ai un homomorphisme d'algèbres naturel de l'algèbre $AExt(H)$ du groupe $Ext(H)$ des automorphismes extérieurs de H dans $\mathcal{E}nd(H)$, qui à la classe de ϕ fait correspondre $H \times H/\Delta_\phi(H)$, et cet homomorphisme est de plus injectif. J'identifierai $AExt(H)$ à son image dans $\mathcal{E}nd(H)$.

Les remarques ci-dessus montrent alors que

$$\mathcal{E}nd(H) = AExt(H) + I_H$$

En fait, cette somme est directe: en effet, si un élément de $AExt(H)$, de la forme $\sum_\phi \lambda_\phi H\times H/\Delta_\phi(H)$ est dans I_H, alors il s'écrit comme une somme de morphismes factorisant par des groupes K d'ordre strictement plus petits que $|H|$. Ces derniers sont eux-mêmes de la forme

$$(\sum_L \alpha_L.H \times K/L)(\sum_M \beta_M.K \times H/M)$$

donc sommes de termes de la forme

$$\alpha_L\beta_M.H \times H/L *^{(x,1)} M$$

et en particulier, pour tout ϕ tel que $\lambda_\phi \neq 0$, il existe un groupe K d'ordre strictement plus petit que $|H|$, un sous-groupe L de $H \times K$, et un sous-groupe M de $K \times H$, tels que $\Delta_\phi(H)$ soit conjugué dans $H \times H$ de $L * M$. Et ceci est impossible par le

Lemme 6: Soient H et K des groupes, soit L un sous-groupe de $H \times K$ et M un sous-groupe de $K \times H$, et ϕ un automorphisme de H tels que $L * M = \Delta_\phi(H)$. Alors H est une section de K.

En effet, soit $a \in k_1(L)$. Comme $(a,1) \in L$, et comme $(1,1) \in M$, alors $(a,1)$ appartient à $L * M = \Delta_\phi(H)$. Alors $a = \phi(1) = 1$, donc $k_1(L) = (1)$. De même, j'ai $k_2(M) = (1)$. D'autre part, pour tout $a \in H$, comme $(a, \phi^{-1}(A) \in \Delta_\phi(H) = L * M$, il existe $c \in K$ tel que $(a,c) \in L$ et $(c, \phi^{-1}(a)) \in M$. Donc $p_1(L) = H$. De même, j'ai $p_2(M) = H$. Alors soit $Q = q(L)$, soit s une surjection de $p_1(L) = H$ dans Q et t une surjection de $p_2(L) = K_1$ dans Q telles que

$$L = \{(a,b) \in H \times K_1 \mid s(a) = t(b)\}$$

Alors $k_1(L) = \mathrm{Ker}\ s$, et s est donc injectif. Alors H est un quotient de K_1, donc une section de K.c.q.f.d.

Corollaire: L'algèbre $\mathcal{E}nd(H)$ se décompose en

$$\mathcal{E}nd(H) = AExt(H) \oplus I_H$$

Revenant au foncteur simple S, je vois que si H est un objet de $\mathcal{D}$ d'ordre minimal tel que $S(H) \neq 0$, alors $V = S(H)$ est un $AExt(H)$-module simple. Inversement, si V est un $AExt(H)$-module simple, je peux en faire un $\mathcal{E}nd(H)$ module (simple) par le corollaire ci-dessus. Alors le foncteur $S_{H,V}$ est simple, tel que $S_{H,V}(H) = V$. De plus

Lemme 7: Soit H un objet de $\mathcal{D}$ et V un $AExt(H)$-module simple. Si K est un objet de $\mathcal{D}$ tel que $S_{H,V}(K) \neq 0$, alors H est une section de K.

En effet, si $S_{H,V}(K) \neq 0$, comme

$$S_{H,V}(K) = \mathcal{H}om(H,K) \otimes_{\mathcal{E}nd(H)} V / \{\sum_i \phi_i \otimes v_i \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(K,H), \sum_i (\psi\phi_i)v_i = 0\}$$

je vois qu'il existe un sous-groupe L de $H \times K$, un sous-groupe M de $K \times H$, et un vecteur v de V, tels que

$$(H \times K/L) \times_K (K \times H/M).v \neq 0$$

En particulier, il existe un automorphisme ϕ de H et $x \in K$ tel que $L *^{(x,1)} M = \Delta_\phi(H)$. Le lemme 6 assure alors que H est une section de K. D'où le lemme 7. Dans ces conditions, si K est un objet de $\mathcal{D}$ d'ordre minimal tel que $S_{H,V}(K) \neq 0$, alors K est isomorphe à H, ce qui caractérise H en fonction de $S_{H,V}$. Le module V est alors la valeur en H de $S_{H,V}$. Finalement

Proposition 2: Les objets simples de $Fonct_A(\mathcal{D})$ sont en bijection avec les couples (H,V), où H est un objet de $\mathcal{D}$ à isomorphisme (de groupe) près, et V un $AExt(H)$-module à isomorphisme près, par la correspondance qui au couple (H,V) associe le foncteur $S_{H,V}$.

Remarque: Dans le cas où $\mathcal{D}$ est l'une des catégories $\mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, l'ensemble indexant les simples ne dépend pas de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, mais les foncteurs simples $S_{H,V}$, eux, en dépendent: hormis le cas où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont réduites au groupe trivial, ils sont d'ailleurs bien mal nommés, puisque de structure assez compliquée...

5 Une théorie de vortex et de source

Les conditions A) et B) imposées à la sous-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ trouvent une autre justification dans le fait qu'elles permettent de développer une théorie de vortex et de source. L'hypothèse supplémentaire est que l'anneau A est tel que pour tout objet G de $\mathcal{D}$, un AG-module (de type fini) M admet une décomposition unique en AG-modules indécomposables.

Je dirai qu'un quadruplet (G,H,G_1,s) composé d'objets G et H de $\mathcal{D}$, d'un sous-groupe G_1 de G et d'une surjection s de G_1 dans H est *admissible* si le groupe $\Delta_s(G_1)^*$ est dans $S(G,H)$ et si le groupe $\Delta_s(G_1)$ est dans $S(H,G)$. Si (G,H,G_1,s) est un quadruplet admissible, je note $J_H^G[G_1,s]$ le foncteur de la catégorie des AH-modules dans celle des AG-modules défini par

$$J_H^G[G_1,s](N) = [G \times H/\Delta_s(G_1)^*] \otimes_H N$$

Je note de même $T_H^G[G_1,s]$ le foncteur de la catégorie des AG-modules dans celle des AH-modules défini par

$$T_H^G[G_1,s](M) = [H\times G/\Delta_s(G_1)]\otimes_G M$$

Les foncteurs définis ci-dessus ont des propriétés de multiplication remarquables:

Lemme 8: Soient (G,H,G_1,s) et (H,K,H_1,t) des quadruplets admissibles. Alors le quadruplet $(G,K,s^{-1}(H_1),ts)$ est admissible et

$$J_H^G[G_1,s]J_K^H[H_1,t] = J_K^G[s^{-1}(H_1),ts]$$

$$T_K^H[H_1,t]T_H^G[G_1,s] = T_K^G[s^{-1}(H_1),ts]$$

En effet

$$(G\times H/\Delta_s(G_1)^*)\times_H (H\times K/\Delta_t(H_1)^*) = G\times K/\Delta_s(G_1)*\Delta_t(H_1)$$

et

$$\Delta_s(G_1)*\Delta_t(H_1) = \{(g,k)\in G\times K \mid \exists h\in H,\ g\in G_1,\ s(g)=h,\ h\in H_1,\ t(h)=k\}$$

ou encore

$$\Delta_s(G_1)*\Delta_t(H_1) = \Delta_{ts}(s^{-1}(H_1))$$

Il y a de même un formule de Mackey reliant les foncteurs J et T: soient (G,H,G_1,s) et (G,K,G_2,t) des quadruplets admissibles. Si $x\in G$, soit

$$L_x = (G_2\cap^x G_1)/(G_2\cap^x \mathrm{Ker}\ s)(\mathrm{Ker}\ t\cap^x G_1)$$

Soit de plus K_x l'image par t du sous-groupe $G_2\cap^x G_1$ de G_2, et β_x la surjection naturelle de K_x sur L_x. Soit de même H_x l'image par s du sous-groupe $G_2^x\cap G_1$ de G_1, et α_x la surjection naturelle de H_x dans L_x. Avec ces notations

Lemme 9: Pour tout $x\in G$, les quadruplets (K,L_x,K_x,β_x) et (H,L_x,H_x,α_x) sont admissibles, et

$$T_K^G[G_2,t]J_H^G[G_1,s] = \sum_{x\in G_2\backslash G/G_1} J_{L_x}^K[K_x,\beta_x]T_{L_x}^H[H_x,\alpha_x]$$

En effet, par la formule de Mackey, le produit sur G des ensembles $K\times G/\Delta_t(G_2)$ et $G\times H/\Delta_s(G_1)^*$ est égal à

$$\sum_{x\in G_2\backslash G/G_1} K\times H/\Delta_t(G_2)*^{(x,1)}\Delta_s(G_1)^*$$

En notant X_x le groupe $\Delta_t(G_2) *^{(x,1)} \Delta_s(G_1)^*$, j'ai

$$X_x = \{(k,h) \in K \times H \mid \exists g \in G,\ g \in G_2,\ t(g) = k,\ g^x \in G_1,\ s(g^x) = h\}$$

ou encore

$$X_x = \{(t(g), s(g^x)) \mid g \in G_2 \cap^x G_1\}$$

Alors

$$p_1(X_x) = t(G_2 \cap^x G_1) = K_x \text{ et } p_2(X_x) = s(G_2^x \cap G_1) = H_x$$

de même

$$k_1(X_x) = t(G_2 \cap^x \text{Ker } s) = \text{Ker } \beta_x \text{ et } k_2(X_x) = s(\text{Ker } t^x \cap G_1) = \text{Ker } \alpha_x$$

Le groupe L_x s'identifie donc à $q(X_x)$, et de plus, par définition de β_x et α_x, j'ai

$$X_x = \{(k,h) \in K_x \times H_x \mid \beta_x(k) = \alpha_x(h)\}$$

ce qui prouve le lemme, en passant aux foncteurs associés.

Lemme 10: Le foncteur $T_H^G[G_1, s]$ est adjoint à gauche du foncteur $J_H^G[G_1, s]$

En effet, soit X le bimodule associé à $H \times G/\Delta_s(G_1)$, et X^* le module associé à $G \times H/\Delta_s(G_1)^*$. Le module X^* se décompose en

$$X^* = [G \times G_1/\Delta(G_1)] \times_{G_1} [G_1 \times H/\Delta_s(G_1)^*]$$

Le produit tensoriel sur H par le facteur de droite correspond à l'inflation suivant s: le module $[G_1 \times H/\Delta_s(G_1)^*] \times_H N$ est en effet le module N sur lequel l'élément $g \in G_1$ agit par $g.n = s(g)n$. Je noterai $\text{Inf}_{s,H}^{G_1}(N)$ ce module.

Alors le produit tensoriel sur G_1 par le facteur de gauche correspond à l'induction de G_1 à G. Donc

$$J_H^G[G_1, s](N) = \text{Ind}_{G_1}^G \text{Inf}_{s,H}^{G_1}(N)$$

De même, le module X se décompose en

$$X = [H \times G_1/\Delta_s(G_1)] \otimes_{G_1} [G_1 \times G/\Delta(G_1)]$$

Le facteur de droite correspond à la restriction de G à G_1. Le facteur de gauche correspond au passage aux “points cofixes suivant s”: si Y est un AG_1-module, alors $[H \times G_1/\Delta_s(G_1)] \otimes_{G_1} Y$ est le quotient $Y_{Ker\ s}$ de Y par le A-module engendré par les éléments de la forme $gy - y$, pour $g \in \text{Ker } s$ et $y \in Y$. En notant $y \mapsto \overline{y}$ la projection naturelle de Y sur $Y_{Ker\ s}$, le groupe H agit sur $Y_{Ker\ s}$ par

$$h.\overline{y} = \overline{gy} \text{ si } s(g) = h$$

Finalement
$$T_H^G[G_1, s](P) = (\mathrm{Res}_{G_1}^G P)_{Ker\ s}$$

Or le foncteur de restriction de G à G_1 est adjoint à gauche du foncteur d'induction de G_1 à G, et le foncteur "points cofixes suivant s" est adjoint à gauche du foncteur d'inflation suivant s. D'où le lemme.

Il est possible de définir une notion d'injectivité relative au foncteur $T_H^G[G_1, s]$ (cf. [BO1]): je dirai qu'un AG-module M est $T_H^G[G_1, s]$-*injectif* (ou (G_1, s)-injectif) si pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ X & \to & Y \\ \beta \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

tel que le morphisme $T_H^G[G_1, s](\alpha)$ soit une injection directe, il existe un morphisme ϕ de Y dans M tel que $\beta = \phi\alpha$. Alors:

Lemme 11:(cf. [BO1]) Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **Le module M est $T_H^G[G_1, s]$-injectif.**
2. **Il existe un AH-module N tel que M soit facteur direct de $J_H^G[G_1, s](N)$.**
3. **Le module M est facteur direct de $J_H^G[G_1, s]T_H^G[G_1, s](M)$.**

Soit alors G un objet de $\mathcal{D}$, et M un AG-module indécomposable.

J'appelle $\mathcal{D}$-vortex de M un objet H de $\mathcal{D}$ d'ordre minimal tel qu'il existe un sous-groupe G_1 de G et une surjection s de G_1 dans H, tels que
a) Le quadruplet (G, H, G_1, s) est admissible.
b) Le module M est (G_1, s)-injectif.
J'appelle alors $\mathcal{D}$-source de M un facteur direct indécomposable N de

$T_H^G[G_1, s](M)$ tel que M soit facteur direct de $J_H^G[G_1, s](N)$.

L'existence de $\mathcal{D}$-vortex et $\mathcal{D}$-source est assurée par le fait que M est toujours (G, Id)-injectif, et par le fait que pour tout objet G de $\mathcal{D}$, tout AG-module admet une décomposition unique en AG-modules indécomposables.

Proposition 3: Soit G un objet de $\mathcal{D}$, et M un AG-module indécomposable. Soit H un $\mathcal{D}$-vortex de M, et (G, K, G_2, t) un quadruplet admissible

tel que M soit (G_2, t)-injectif. Alors H est une section de K.
Corollaire: Si K est un $\mathcal{D}$-vortex de M, alors K est isomorphe à H.

En effet, si H est un $\mathcal{D}$-vortex de M, il existe un quadruplet admissible (G, H, G_1, s) et un AH-module N tel que M soit facteur direct de $J_H^G[G_1, s](N)$. Mais comme M est (G_2, t)-injectif, alors M est facteur direct de
$J_K^G[G_2, t]T_H^G[G_2, t](M)$, donc facteur direct de

$$P = J_K^G[G_2, t]T_H^G[G_2, t]J_H^G[G_1, s](N)$$

Avec les notations des lemmes 8 et 9, j'ai

$$P = \sum_{x \in G_2 \backslash G / G_1} J_K^G[G_2, t]J_{L_x}^K[K_x, \beta_x]T_{L_x}^H[H_x, \alpha_x](N)$$

Soit

$$P = \sum_{x \in G_2 \backslash G / G_1} J_{L_x}^G[t^{-1}(K_x), \beta_x t]T_{L_x}^H[H_x, \alpha_x](N)$$

Comme H est un $\mathcal{D}$-vortex de M, et comme L_x est une section de H, il doit exister $x \in G$ tel que L_x soit isomorphe à H. Dans ces conditions, je dois avoir

$$(G_2^x \cap G_1).\mathrm{Ker}\ s = G_1 \text{ et } \mathrm{Ker}\ t^x \cap G_1 \subseteq G_2^x \cap \mathrm{Ker}\ s$$

Comme de plus L_x est un quotient du groupe $G_2 \cap^x G_1/\mathrm{Ker}\ t \cap^x G_1$, lui-même sous-groupe de $G_2/\mathrm{Ker}\ t$, isomorphe à K, je vois que H est une section de K. Alors si H et K sont deux $\mathcal{D}$-vortex de M, ils sont isomorphes, ce qui prouve la proposition.

Alors si H est un $\mathcal{D}$-vortex de M, et si N est une $\mathcal{D}$-source de M, associée au quadruplet admissible (G, H, G_1, s), alors N a comme $\mathcal{D}$-vortex le groupe H: en effet, si L est un $\mathcal{D}$-vortex de N, et si (H, L, H_1, r) un quadruplet admissible ayant les propriétés de la définition, alors il existe un AL-module P tel que N soit facteur direct de $J_L^H[H_1, r](P)$. Alors M est facteur direct de $J_H^G[G_1, s]J_L^H[H_1, r](P) = J_L^G[s^{-1}(H_1), rs](P)$. Donc L est isomorphe à H.

Soit alors N' un autre H-module $\mathcal{D}$-source de M, associé au quadruplet admissible (G, H, G_2, t). Je sais que M est facteur direct de $J_H^G[G_1, s](N)$. Comme N' est facteur direct de $T_H^G[G_2, t](M)$, il est aussi facteur direct de $T_H^G[G_2, t]J_H^G[G_1, s](N)$. Ce dernier est égal à

$$\sum_{x \in G_2 \backslash G / G_1} J_{L_x}^H[K_x, \beta_x]T_{L_x}^H[H_x, \alpha_x](N)$$

en notant K_x le groupe $t(G_2 \cap^x G_1)$, et H_x le groupe $s(G_2^x \cap G_1)$. Comme N' est indécomposable, il doit exister $x \in G$ tel que N' soit facteur direct de $J_{L_x}^H[K_x, \beta_x]T_{L_x}^H[H_x, \alpha_x](N)$. Mais comme il est aussi de vortex H, cela impose que L_x soit isomorphe à H.

Comme L_x est isomorphe à $(G_2 \cap^x G_1)/(G_2 \cap^x \text{Ker } s)(\text{Ker } t \cap^x G_1)$, quotient du sous-groupe $s(G_2^x \cap G_1)$ de H, je dois avoir

$$(G_2^x \cap G_1).\text{Ker } s = G_1 \text{ et Ker } t^x \cap G_1 \subseteq \text{Ker } s$$

De même, le groupe L_x est isomorphe à un quotient du sous-groupe $t(G_2 \cap^x G_1)$ de H. Donc

$$(G_2 \cap^x G_1).\text{Ker } t = G_2 \text{ et } G_2 \cap^x \text{Ker } s) \subseteq \text{Ker } t$$

Ces conditions se résument à

$$(G_2 \cap^x G_1).^x\text{Ker } s =^x G_1,\ (G_2 \cap^x G_1).\text{Ker } t = G_2,\ G_2 \cap^x \text{Ker } s = \text{Ker } t \cap^x G_1$$

ou encore

$$G_2.^x\text{Ker } s = \text{Ker } t.^xG_1 \text{ et } G_2 \cap^x \text{Ker } s = \text{Ker } t \cap^x G_1$$

Une telle situation définit un automorphisme θ_x de H: si h est un élément de H, alors h s'écrit $t(u)$, pour un u de $G_2 \cap^x G_1$. Alors, les conditions si dessus font que l'égalité

$$\theta_x(h) = s(u^x)$$

définit sans ambiguité l'élément $\theta_x(h)$ de H.

Il est alors clair que N est facteur direct de l'image de N' par l'automorphisme θ_x, donc qu'il lui est isomorphe. Finalement

Proposition 4: Si H est un $\mathcal{D}$-vortex de M, et si N et N' sont deux H-modules $\mathcal{D}$-sources de M, alors il existe un automorphisme θ de H tel que N soit isomorphe à $\theta(N')$.

Le calcul ci-dessus montre de plus quel type de rapport il y a entre cet automorphisme et le groupe G, plus compliqué que la simple conjugaison par un élément de G comme dans le cas classique du vortex d'un module indécomposable...

6 Une seconde théorie de vortex et source

La section précédente demeure un peu énigmatique quant aux conditions A) et B), car elle oblige à considérer simultanément toute une classe $\mathcal{D}$ de groupes finis. Il serait plus agréable, étant donné un groupe fini G et une certaine famille d'objets associés, de pouvoir faire un théorie analogue.

Je supposerai que l'anneau A est tel que pour toute section de G, tout AG-module admet une décomposition unique en AG-modules indécomposables.

L'exemple des groupes réductifs incite à considérer une famille F de couples (P, U), où P est un sous-groupe de G et U un sous-groupe normal de P. Si $(P, U) \in F$, je peux parler de la catégorie $Mod(P, U)$ des P-modules U-triviaux, i.e. des P-modules sur lesquels U agit trivialement.

La famille F possède un ordre naturel: si (P,U) et (Q,V) sont dans F, je dis que $(P,U) \leq (Q,V)$ si $V \subseteq U \subseteq P \subseteq Q$. Alors, si $(P,U) \leq (Q,V)$, il y a un foncteur naturel de $Mod(P,U)$ dans $Mod(Q,V)$, qui est l'induction de P à Q: si X est un P-module U-trivial, alors $\mathrm{Ind}_P^Q X$ est un Q-module V-trivial. Je note $j_{P,U}^{Q,V}$ ce foncteur, défini par

$$j_{P,U}^{Q,V}(X) = \mathrm{Ind}_P^Q X = [Q \times P/\Delta(P)] \otimes_P X$$

Inversement, si Y est un Q-module V-trivial, je peux regarder sa restriction à P, puis les points cofixes par U de cette restriction, considéré cette fois comme un P-module. J'obtiens ainsi un foncteur $t_{P,U}^{Q,V}$ de $Mod(Q,V)$ dans $Mod(P,U)$, défini par

$$t_{P,U}^{Q,V}(Y) = \mathrm{Inf}_{P/U}^P (\mathrm{Res}_P^Q Y)_U$$

Ces foncteurs vérifient des relations de transitivité évidentes. Il est clair également que $j_{P,U}^{Q,V}$ est adjoint à droite de $t_{P,U}^{Q,V}$.

J'ai alors une notion d'injectivité relative: si M est un Q-module V-trivial, et si $(P,U) \leq (Q,V)$, je dis que M est (P,U)-*injectif* s'il existe un P-module U-trivial N tel que M soit facteur direct de $j_{P,U}^{Q,V}(N)$.

Alors si M est un Q-module V-trivial indécomposable, un F-*vortex* de M est par définition un couple $(P,U) \in F$ minimal tel que $(P,U) \leq (Q,V)$ et tel que M soit (P,U)-injectif.

Une F-*source* de M est alors un facteur direct indécomposable N de $t_{P,U}^{Q,V}(M)$ tel que M soit facteur direct de $j_{P,U}^{Q,V}(N)$.

L'existence de F-vortex et F-source est assurée par le fait que les foncteurs $j_{Q,V}^{Q,V}$ sont les foncteurs identité, et par les hypothèses faites sur l'anneau A.

Les relations de transitivité mentionnées plus haut entraînent alors que si M est un Q-module V-trivial de F-vortex (P,U), et si N est une F-source de M, alors (P,U) est le seul F-vortex de N.

Jusque là, la famille F peut être absolument quelconque. Bien sûr, pour assurer une certaine unicité des F-vortex et F-sources, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur F: je supposerai donc que F vérifie les deux conditions suivantes:

a) Si $(P,U) \in F$, et si $x \in G$, alors $(P^x, U^x) \in F$.

b) Si $(P,U) \in F$ et $(Q,V) \in F$, alors $((P \cap Q).U, (P \cap V).U) \in F$.

Remarque: Il n'y a alors aucun inconvévient à supposer que $(G,1) \in F$, ce que je ferai désormais, puisque je veux parler de F-vortex et F-source d'un AG-module.

Si (P,U) et (Q,V) sont deux couples de F, je dis qu'ils sont *liés* , ce que je note $(P,U) — (Q,V)$ si

$$(P \cap Q).U = P,\ (P \cap Q).V = Q,\ P \cap V = Q \cap U$$

ou, de manière moins symétrique mais plus concise

$$P.V = U.Q,\ P \cap V = Q \cap U$$

Alors si $(P,U) — (Q,V)$, et si L est un Q-module V-trivial, je note

$$\theta_{(P,U),(Q,V)}(L)$$

le module L sur lequel le groupe P agit ainsi: si $p \in P$, alors p s'écrit $p = p'.u$, pour $p' \in P \cap Q$ et $u \in U$. Alors si $l \in L$, je pose $p.l = p'.l$. Il est facile de voir que je fais ainsi de L un P-module U-trivial, et que $\theta_{(P,U),(Q,V)}$ est un foncteur de $Mod(Q,V)$ dans $Mod(P,U)$.

De même, si $x \in G$, je note ${}^xM$ le ${}^xQ$-module ${}^xV$-trivial L sur lequel l'élément $q \in^x Q$ agit par $q.l(\text{dans } {}^xL) = q^x.l(\text{dans } L)$.

Les notations et hypothèses précédentes permettent alors d'établir la

Proposition 5: Soient $(R,W) \leq (Q,V) \geq (P,U)$ des éléments de F, et M un AP-module U-trivial. Alors, pour tout $x \in G$, j'ai

$$(R,W) \geq ((R\cap^x P).W,(R\cap^x U).W) — ((R\cap^x P).^xU,(W\cap^x P).^xU) \leq (^xP,^x U)$$

et de plus en posant

$$\theta_x = \theta_{((R\cap^x P).W,(R\cap^x U).W),((R\cap^x P).^xU,(W\cap^x P).^xU)}$$

$$t_{R,W}^{Q,V} j_{P,U}^{Q,V}(M) = \sum_{q\in R\backslash Q/P} j^{R,W}_{((R\cap^q P).W,(R\cap^q U).W)}\theta_q t^{^qP,^qU}_{((R\cap^q P).^qU,(W\cap^q P).^qU)}(^qM)$$

Corollaire 1: Si M est indécomposable, et à la fois (P,U)-injectif et (R,W)-injectif, alors il existe $x \in G$ tel que M soit $((R\cap^x P).W,(R\cap^x U).W)$-injectif.
Corollaire 2: Si M est indécomposable, si (R,W) est un F-vortex de M, et si M est (P,U)-injectif, alors il existe $x \in G$ tel que

$$R = (R\cap^x P).W,\ W = (R\cap^x U)W$$

et en particulier, le groupe R/W est une section de P/U.
Corollaire 3: Si M est idécomposable, et si (R,W) et (P,U) sont deux F-vortex de M, alors il existe $x \in G$ tel que $(R,W) — (^xP,^x U)$, et en particulier les groupes R/W et P/U sont isomorphes.

La première assertion de la proposition résulte des inclusions:

$$R \supseteq (R\cap^x P).W \supseteq (R\cap^x U).W \supseteq W$$

et des égalités

$$(R\cap^x P).W(W\cap^x P).^xU = (R\cap^x P).W.^xU = W.(R\cap^x P).^xU$$

et

$$(R\cap^x U).W(R\cap^x P).^xU = (R\cap^x U).(R\cap^x P).W.^xU = (R\cap^x P).W.^xU = W.(R\cap^x P).^xU$$

De même

$$(R \cap^x P).W \cap (W \cap^x P).^xU = (W \cap^x P).((R \cap^x P).W \cap^x U) =$$

$$= (W \cap^x P).(R \cap ({}^xP.W) \cap^x U) = (W \cap^x P).(R \cap^x U)$$

et

$$(R \cap^x U).W \cap (R \cap^x P).^xU = (R \cap^x U).(W \cap (R \cap^x P).^xU) =$$

$$= (R \cap^x U).(W \cap (R.^xU) \cap^x P) = (R \cap^x U).(W \cap^x P)$$

et du fait que $W \cap^x P$ normalise $R \cap^x U$, ces deux dernières expressions sont égales.

En notant α (resp. β, γ) les projections de P sur P/U (resp. de Q sur Q/V, de R sur R/W), il est clair que le foncteur $j_{P,U}^{Q,V}$ peut être défini par

$$j_{P,U}^{Q,V}(N) = [Q \times (P/U)/\Delta_\alpha(P)^*] \otimes_{P/U} [(P/U) \times P/\Delta_\alpha(P)] \otimes_P N$$

car le terme de droite correspond aux points cofixes par U du module U-trivial N, et le terme de gauche à l'inflation de P/U à P, suivie de l'induction de P à Q.

De même, le foncteur $t_{R,W}^{Q,V}$ peut aussi être défini par

$$t_{R,W}^{Q,V}(M) = [R \times (R/W)/\Delta_\gamma(R)^*] \otimes_{R/W} [(R/W) \times Q/\Delta_\gamma(R)] \otimes_Q M$$

Le foncteur composé $t_{R,W}^{Q,V} j_{P,U}^{Q,V}$ correspond donc au produit tensoriel sur P par le module associé à l'ensemble

$$X = (R \times (R/W)/\Delta_\gamma(R)^*) \times_{R/W} ((R/W) \times Q/\Delta_\gamma(R)) \times_Q \ldots$$

$$\ldots (Q \times (P/U)/\Delta_\alpha(P)^*) \times_{P/U} ((P/U) \times P/\Delta_\alpha(P))$$

Par la formule de Mackey, le produit des deux premiers termes est égal à

$$R \times Q/\{(r, r') \in R \times R \mid r^{-1}r' \in W\}$$

et le produit des deux derniers à

$$Q \times P/\{(p, p') \in P \times P \mid p^{-1}p' \in U\}$$

Une nouvelle application de la formule de Mackey donne alors l'ensemble X sous la forme $X = \sum_{q \in R\backslash Q/P} R \times P/L_q$, où j'ai posé

$$L_q = \{(r, r') \in R \times R \mid r^{-1}r' \in W\} *^{(q,1)} \{(p, p') \in Q \times P \mid p^{-1}p' \in U\}$$

J'ai alors

$$L_q = \{(r, p) \in R \times P \mid \exists x \in Q,\ x \in R,\ r^{-1}x \in W,\ x^q \in P,\ (x^q)^{-1}p \in U\}$$

ou encore

$$L_q = \{(r,p) \in R \times P \mid \exists x \in R \cap^q P,\ r^{-1}x \in W,\ x^{-1}({}^q p) \in^q U\}$$

Alors si $(r,p) \in L_q$, j'ai

$$r \in (R \cap^q P).W,\ w \in (R^q \cap P).U,\ r^{-1}({}^q p) \in W.{}^q U$$

Inversement, si ces conditions sont remplies, je peux écrire $r = yw$, pour $y \in R \cap^q P$ et $w \in W$, et $p = (y'^q)u$, pour $y' \in R \cap^q P$ et $u \in U$. Alors

$$r^{-1}({}^q p) = w^{-1}y^{-1}y'({}^q u) \in W.{}^q U$$

donc $y^{-1}y' \in (W.{}^q U) \cap R \cap^q P = W.({}^q U \cap R) \cap^q P = (W \cap^q P).({}^q U \cap R)$. Je peux alors écrire $y^{-1}y' = w'({}^q u')$, pour $w' \in W \cap^q P$ et $u' \in U \cap R^q$. Posant alors $x = yw'$, j'ai

$$r^{-1}x = w^{-1}w' \in W,\ x^{-1}({}^q p) = w'^{-1}y^{-1}y'({}^q u) =^q (u'u) \in^q U$$

et de plus $x \in (R \cap^q P)(W \cap^q P) = R \cap^q P$. Donc

$$L_q = \{(r,p) \in R \times P \mid r \in (R \cap^q P).W,\ w \in (R^q \cap P).U,\ r^{-1}({}^q p) \in W.{}^q U\}$$

Il reste à exprimer le second membre de l'égalité de la proposition sous forme d'une somme de produits tensoriels par les bimodules associés à des R-ensembles-P.

Lemme 12: Soit (P,U) — (Q,V). Alors si M est un Q-module V-trivial,

$$\theta_{(P,U),(Q,V)}(M) = [P \times Q / \{(p,q) \mid p^{-1}q \in U.V\}] \otimes_Q M$$

En effet, si (P,Q) — (Q,V), soit $\overline{\theta}$ l'isomorphisme de Q/V dans P/U déterminé par la liaison: je pose $\overline{\theta}(qV) = xU$, si $x \in P \cap Q$ et $x^{-1}q \in V$. Alors, appliquer $\theta_{(P,U),(Q,V)}$ à M revient à prendre les points cofixes de M par V, c'est à dire puisque M est V-trivial, à regarder M comme un Q/V-module, puis à transporter ce module au groupe P/U par l'isomorphisme $\overline{\theta}$, et à considérer le résultat comme un P-module, i.e. pratiquer l'inflation de P/U à P.

Ces trois opérations s'expriment par des produits tensoriels par des modules associés à des ensembles munis d'une double action: plus précisément, en notant α (resp. β) la projection de P sur P/U (resp. de Q sur Q/V):

$$\theta_{(P,U),(Q,V)}(M) = [P \times (P/U)/\Delta_\alpha(P)^*] \otimes_{P/U} [(P/U) \times (Q/V)/\Delta_{\overline{\theta}}(Q/V)] \otimes_{Q/V} \dots$$

$$\dots [(Q/V) \times Q/\Delta_\beta(Q)] \otimes_Q M$$

ce qui s'écrit encore

$$\theta_{(P,U),(Q,V)}(M) = [P \times Q/\{(p,q) \mid \alpha(p) = \overline{\theta}\beta(q)\}] \otimes_Q M$$

Mais dire que $\alpha(p) = \overline{\theta}\beta(q)$ revient à dire qu'il existe $x \in P \cap Q$ tel que $pU = xU$ et $qV = xV$. En particulier, $p^{-1}q = p^{-1}x.x^{-1}q \in U.V$. Inversement, si $p^{-1}q \in U.V$, alors comme p peut s'écrire $p = p'u$, pour $p' \in P \cap Q$ et $u \in U$, et comme q peut s'écrire $q = q'v$, pour $q' \in P \cap Q$ et $v \in U$, j'ai aussi $p'^{-1}q' \in U.V$, donc

$$p'^{-1}q' \in U.V \cap P \cap Q = U.(V \cap P) \cap Q = U \cap Q = V \cap P = U \cap V$$

Alors $q' \in P \cap Q$, et $q'V = qV$. De plus $pU = p'U = p'(p'^{-1}q')U = q'U$, et j'ai bien $\alpha(p) = \overline{\theta}\beta(q)$. D'où le lemme.

Alors en posant

$$A_q = (R \cap^q P).W,\ B_q = (R \cap^q U).W,\ C_q = (R \cap^q P).^qU,\ D_q = (W \cap^q P).^qU$$

et en notant γ_q l'homomorphisme de conjugaison par q de P dans ${}^qP$, le terme en q de l'égalité de la proposition correspond au produit tensoriel sur P par le module associé à l'ensemble

$$E_q = (R \times A_q/\{(a,a') \in A_q \times A_q \mid a^{-1}a' \in B_q\}) \times_{A_q} (A_q \times C_q/\{(a,c) \mid a^{-1}c \in B_q D_q\}) \times_{C_q} \ldots$$

$$\ldots (C_q \times^q P/\{(c,^q p) \mid c^{-1}.^q p \in D_q\}) \times_{^qP} ({}^qP \times P/\Delta_{\gamma_q}(P))$$

Le produit des deux derniers termes est égal à

$$C_q \times P/\{(c,p) \mid c^{-1}.^q p \in D_q\}$$

D'autre part

$$B_q D_q = (R \cap^q U).W.(W \cap^q P).^qU = (R \cap^q U).W.^qU = W.(R \cap^q U).^qU = W.^qU$$

et le produit des deux premiers termes est égal à

$$R \times C_q/\{(a,c) \in A_q \times C_q \mid a^{-1}c \in W.^qU\}$$

Finalement, j'ai $E_q = R \times P/L'_q$, en posant

$$L'_q = \{(a,c) \in A_q \times C_q \mid a^{-1}c \in W.^qU\} * \{(c,p) \in C_q \times P \mid c^{-1}.^q p \in D_q\}$$

Alors si $(r,p) \in L'_q$, j'ai

$$r \in A_q,\ p \in (C_q D_q)^q = (C_q)^q,\ r^{-1}.^q p \in W.^qU.D_q = W.^qU$$

Inversement, si ces conditions sont remplies, en posant $c =^q p$, j'ai bien

$$(r,c) \in A_q \times C_q,\ r^{-1}c \in W.^qU,\ (c,p) \in C_q \times P,\ c^{-1}.^q p \in D_q$$

donc

$$L'_q = \{(r,p) \in (R \cap^q P).W \times (R^q \cap P).U \mid r^{-1}.{}^q p \in W.{}^q U\}$$

de sorte que $L'_q = L_q$, ce qui prouve la proposition.

Alors si un G-module indécomposable N est à la fois (P,U)-injectif et (R,W)-injectif, il existe un P-module U-trivial M tel que N soit facteur direct de $j_{P,U}^{G,1}(M)$, et de $j_{R,W}^{G,1} t_{R,W}^{G,1}(N)$. Alors N est facteur direct de

$$j_{R,W}^{G,1} t_{R,W}^{G,1} j_{P,U}^{G,1}(M)$$

et la proposition appliquée à $(Q,V) = (G,1)$ entraîne alors qu'il existe $x \in G$ tel que N soit facteur direct de

$$j^{G,1}_{(R\cap^x P).W,(R\cap^x U).W} \theta_x t^{{}^qP,{}^qU}_{(R\cap^q P).{}^qU,(W\cap^q P).{}^qU}({}^qM)$$

et N est donc $((R \cap^x P).W, (R \cap^x U).W)$-injectif, ce qui prouve le corollaire 1.

Dans ces conditions, si (R,W) est un F-vortex de N, alors comme

$$((R \cap^x P).W, (R \cap^x U).W) \leq (R,W)$$

je dois avoir

$$R = (R \cap^x P).W \text{ et } W = (R \cap^x U).W$$

Alors R/W est isomorphe à $R \cap^x P/W \cap^x P$, donc au quotient du sous-groupe $R^x \cap P/R^x \cap U$ de P/U par son sous-groupe normal $W^x \cap P/R^x \cap U$ (en effet, la seconde égalité ci-dessus entraîne que $R^x \cap U \subseteq W^x \cap P$). Ceci prouve le corollaire 2.

Alors si (P,U) est aussi un F-vortex de N, les groupes P/U et R/W sont section l'un de l'autre. Ils sont donc isomorphes, et alors

$$W^x \cap P = R^x \cap U \text{ et } (R^x \cap P).U = P$$

autrement dit, j'ai $(R,W) — ({}^xP, {}^xU)$, ce qui prouve le corollaire 3.

Proposition 6: Soit M un G-module indécomposable. Si (P,U) et (Q,V) sont deux F-vortex de M, si L est un P module U-trivial F-source de M, et N un Q-module V-trivial F-source de M, alors il existe $x \in G$ tel que $(Q,V) — ({}^xP, {}^xU)$ et

$$N = \theta_{(Q,V),({}^xP,{}^xU)}({}^xL)$$

En particulier, si $(P,U) = (Q,V)$, il existe un automorphisme θ de P/U tel que

$$N = \mathbf{Inf}_{P/U}^{P} \theta(L_U)$$

En effet, dans ces conditions, le module M est facteur direct de $j_{P,U}^{G,1}(L)$, et le module N est facteur direct de $t_{Q,V}^{G,1}(M)$. Donc le module N est facteur direct de $t_{Q,V}^{G,1}j_{P,U}^{G,1}(L)$. Il existe donc $x \in G$ tel que N soit facteur direct de

$$j_{(Q\cap^x P).V,(Q\cap^x U).V}^{Q,V}\theta_x t_{(Q\cap^x P).^x U,(V\cap^x P).^x U}^{^xP,^xU}(^xL)$$

où j'ai posé $\theta_x = \theta_{((Q\cap^x P).V,(Q\cap^x U).V)),((Q\cap^x P).^x U,(V\cap^x P).^x U))}$. Mais comme N est de F-vortex (Q,V), je dois avoir

$$Q = (Q\cap^x P).V \text{ et } V = (Q\cap^x U).V$$

Comme de plus les groupes Q/V et P/U sont isomorphes, il en résulte que (Q,V) — $(^xP,^xU)$ et que N est facteur direct de $\theta_{(Q,V),(^xP,^xU)}(^xL)$, donc qu'il lui est isomorphe. D'où la première assertion de la proposition. La seconde est alors triviale.

Remarques et exemples: 1) Si F et F' sont deux familles vérifiant les hypothèses a) et b), alors $F\cap F'$ vérifie aussi a) et b). Comme la famille de tous les couples (P,U), où P est un sous-groupe de G et U un sous-groupe normal de P, vérifie a) et b), il y a une plus petite famille vérifiant a) et b) contenant une famille donnée de couples (P,U).
2) La théorie usuelle de vortex et source correspond au cas où F est la famille des couples $(P,1)$, pour P sous-groupe de G.
3) Si F est la famille de tous les couples (P,U) possibles, et si A est un corps de caractéristique $p>0$, alors un F-vortex (P,U) du AG-module indécomposable M est constitué d'un vortex usuel P de M, et du plus grand sous-groupe U de P opérant trivialement sur un P-module de source usuel de M.
4) Si F est une famille vérifiant a) et b), et si (P,U) et (P,V) sont dans F, alors $(P,U.V)$ est aussi dans F. Alors étant donné P tel qu'il existe U avec $(P,U)\in F$, il existe un sous-groupe normal $r(P)$ de P tel que

$$(P,U)\in F \Rightarrow U\subseteq r(P)$$

De même, si $(P,U)\in F$ et $(Q,U)\in F$, alors $(P\cap Q,U)\in F$. Alors si U est un sous-groupe de G tel qu'il existe P avec $(P,U)\in F$, il existe un sous-groupe $s(U)$ de $N_G(U)$ tel que

$$(P,U)\in F \Rightarrow P\supseteq s(U)$$

5) Si G est un groupe algébrique réductif fini, alors la famille des couples (P,U), où P est un sous-groupe parabolique de G et U son radical unipotent, vérifie a) et b). Cette situation à été étudiée par Dipper et Du (cf. [DI-DU]), d'un point de vue légèrement différent: Dipper et Du définissent en effet le foncteur $\mathrm{Res}_{(P,U)}^G$, analogue du foncteur $t_{P,U}^{G,1}$, à partir des points fixes de U, et non des points cofixes. Il semble que celà nécessite alors une hypothèse supplémentaire

sur la caractéristique du corps de base.
6) Si F est une famille de sous-groupes de G stable par intersection et conjugaison, alors la famille $\overline{F}$ des couples $(P,1)$, pour $P \in F$ vérifie a) et b). Cette situation est plus agréable: en effet, deux couples $(P,1)$ et $(Q,1)$ sont liés si et seulement si ils sont égaux. La $\overline{F}$-source d'un module de $\overline{F}$-vortex P est alors déterminée modulo conjugaison par $N_G(P)$.
Par exemple, si G est le groupe symétrique S_n, la famille F peut être celle des sous-groupes de Young, ce qui permet de définir le vortex de Young d'un S_n-module indécomposable.

7 Le foncteur de Burnside

Dans cette section, la catégorie considérée sera la catégorie $\mathcal{C}$ toute entière. Je note $b(G)$ l'anneau de Burnside de G, à coefficients dans A.

7.1 Un homomorphisme de $b(G)$ dans $\mathcal{E}nd(G)$

Soit G un groupe fini, et X un G-ensemble. Je note $\tilde{X}$ l'ensemble $X \times G$, sur lequel le groupe $G \times G$ agit par

$$g_1.(x,g).g_2 = (g_1x, g_1gg_2)$$

Alors $\tilde{X}$ est un G-ensemble-G, libre à gauche et à droite. De plus

Lemme 13: L'application de $b(G)$ dans $\mathcal{E}ndG$ qui étend par A-linéarité l'application $X \mapsto \tilde{X}$ est un homomorphisme d'algèbres.

Cela revient à dire que si X et Y sont des G-ensembles, alors

$$\tilde{X} \times_G \tilde{Y} = \widetilde{X \times Y}$$

Pour établir cet isomorphisme, il suffit de vérifier que l'application de $\tilde{X} \times_G \tilde{Y}$ dans $\widetilde{X \times Y}$

$$(x,g) \times_G (y,h) \mapsto (x, gy, gh)$$

est bien définie, et compatible à l'action de $G \times G$, et que l'application de $\widetilde{X \times Y}$ dans $\tilde{X} \times_G \tilde{Y}$ définie par

$$(x,y,g) \mapsto (x,1) \times_G (y,g)$$

est compatible à l'action de $G \times G$, et inverse de la précédente.

Remarques: a) Inversement, si E est un G-ensemble-G, je note $\delta(E)$ le G-ensemble "diagonal" E, i.e. l'ensemble E sur lequel G agit par

$$g.e \text{ (dans } \delta(E)) = geg^{-1} \text{ (dans } E)$$

Alors le foncteur $X \mapsto \tilde{X}$ est adjoint à gauche du foncteur $E \mapsto \delta(E)$, i.e.

$$\mathrm{Hom}_{G-ens-G}(\tilde{X}, E) = \mathrm{Hom}_{G-ens}(X, \delta(E))$$

b) Si X est le G-ensemble G/U, alors $\tilde{X}$ s'identifie à $G \times G/\Delta(U)$, où je note $\Delta(U)$ l'image diagonale de U dans $G \times G$. En effet, si X est un G-ensemble quelconque, alors le stabilisateur dans $G \times G$ du point (x, h) de $\tilde{X}$ est l'ensemble des couple (g, g') tels que

$$g.(x, h).g'^{-1} = (x, h)$$

C'est donc l'ensemble des couples (g, g^h), pour $g \in G_x = \{x \in G \mid gx = x\}$, ou encore $\Delta(G_x)^{(1,h)}$. D'autre part l'ensemble des orbites de $G \times G$ sur $\tilde{X}$ s'identifie à l'ensemble des orbites de G sur X.

Alors si $X = G/U$, le groupe $G \times G$ est transitif sur $\tilde{X}$, et le stabilisateur d'un point est conjugué de $\Delta(U)$. Donc $\tilde{X}$ est isomorphe à $G \times G/\Delta(U)$.

Lemme 14: Soit K un sous-groupe du groupe G, et X un G-ensemble. Alors

$$\tilde{X} \times_G (G \times K/\Delta(K)) = (G \times K/\Delta(K)) \times_K (\widetilde{\mathbf{Res}_K^G X})$$

Il suffit de prouver le lemme lorsque $X = G/U$. Dans ce cas

$$\tilde{X} \times_G (G \times K/\Delta(K)) = (G \times G/\Delta(U)) \times_G (G \times K/\Delta(K))$$

et par la formule de Mackey

$$\tilde{X} \times_G (G \times K/\Delta(K)) = \sum_{x \in U \backslash G/K} G \times K/\Delta(U) *^{(x,1)}\Delta(K) = \sum_{x \in U \backslash G/K} G \times K/^{(x,1)}\Delta(K_x)$$

en notant K_x le groupe $U^x \cap K$.
De plus $G \times K/^{(x,1)}\Delta(K_x) = G \times K/\Delta(K_x)$ et

$$G \times K/\Delta(K_x) = (G \times K/\Delta(K)) \times_K (K \times K/\Delta(K_x)) = (G \times K/\Delta(K)) \times_K (\widetilde{K/K_x})$$

D'où le lemme, puisque

$$\mathrm{Res}_K^G G/U = \sum_{x \in U \backslash G/K} K/K_x$$

L'intéret des lemmes précédents apparait surtout lorsque A est un corps de caractéristique 0. Dans ce cas, l'algèbre $b(G)$ est semi-simple. Ses idempotents primitifs sont indexés par les classes de conjugaison de sous-groupes de G, et donnés par la formule

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \subseteq H} |K|\tilde{\chi}]K, H[G/K$$

où je note $\tilde{\chi}]K,H[$ la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite de "l'intervalle ouvert" $]K,H[$.

Ces idempotents sont caractérisés à une constante multiplicative près par le fait que pour tout G-ensemble X

$$e_H^G X = |X^H| e_H^G$$

Cette caractérisation permet de montrer que si K est un sous-groupe de G, alors

$$\mathrm{Res}_K^G e_H^G = \sum_{x\in \overline{T}_G(H,K)} e_{H^x}^K$$

où je note $T_G(H,K)$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $H^x \subseteq K$, et $\overline{T}_G(H,K)$ le quotient $N_G(H)\backslash T_G(H,K)/K$.

De même

$$\mathrm{Ind}_K^G e_H^K = \frac{|N_G(H)|}{|N_K(H)|} e_H^G$$

En particulier, je vois que $\mathrm{Res}_K^G e_K^G = e_K^K$, et le lemme 14 devient

$$\tilde{e_K^G} \times_G (G\times K/\Delta(K)) = (G\times K/\Delta(K)) \times_K \tilde{e_K^K} \qquad (1)$$

D'autre part, si X est un G-ensemble-H, j'ai défini plus haut le H-ensemble "dual" X^* de X. Si Y est un H-ensemble-K, il est clair que

$$(X\times_H Y)^* = Y^* \times_H X^*$$

L'égalité (1) donne alors par dualité

$$(K\times G/\Delta(K)^*) \times_G \tilde{e_K^G} = \tilde{e_K^K} \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) \qquad (2)$$

Soit alors M un foncteur sur $\mathcal{C}$, dans le cas où A est un corps de caractéristique 0. L'égalité (1) montre que l'application $a = M(G\times K/\Delta(K))$ envoie le A-module $\tilde{e_K^K} M(K) (= M(\tilde{e_K^K})M(K))$ dans $\tilde{e_K^G} M(G)$.

L'égalité (2) montre que l'application $b = M(K\times G/\Delta(K)^*)$ envoie le A-module $\tilde{e_K^G} M(G)$ dans $\tilde{e_K^K} M(K)$. En fait, le groupe $N_G(K)$ agit sur ce module: si $x\in N_G(K)$, et si γ_x désigne la conjugaison par x, alors

$$(K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K \tilde{e_K^K} = \tilde{e_K^K} \times_K (K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K))$$

et l'image de b est contenue dans $(\tilde{e_K^K} M(K))^{N_G(K)}$: en effet

$$(K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) \times_G \tilde{e_K^G} =$$

$$= (K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K \tilde{e_K^K} \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) =$$

$$= \tilde{e_K^K} \times_K (K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) =$$
$$= \tilde{e_K^K} \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) \times_G (G\times G/\Delta_{\gamma_x}(G))$$

De plus $G\times G/\Delta_{\gamma_x}(G) = G\times G/\Delta(G)$. Donc

$$(K\times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) \times_G \tilde{e_K^G} = \tilde{e_K^K} \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) =$$
$$= (K\times G/\Delta(K)^*) \times_G \tilde{e_K^G}$$

J'ai donc bien $\mathrm{Im}\, b \subseteq (\tilde{e_K^K} M(K))^{N_G(K)}$.

Comme de plus

$$(G\times K/\Delta(K)) \times_K (K\times G/\Delta(K)^*) = G\times G/\Delta(K) = \widetilde{G/K}$$

il vient

$$G\times G/\Delta(K) \times_G \tilde{e_K^G} = (\widetilde{G/K} \tilde{e_K^G}) = |(G/K)^K| \tilde{e_K^G} = |N_G(K)/K| \tilde{e_K^G}$$

En d'autre termes, le produit $a.b$ est égal à $|N_G(K)/K| Id_{\tilde{e_K^G}M(G)}$.

Inversement

$$(K\times G/\Delta(K)^*) \times_G (G\times K/\Delta(K)) = \sum_{x\in K\backslash G/K} K\times K/\Delta(K\cap^x K)^{(1,x)} \qquad (3)$$

Pour calculer le produit par $\tilde{e_K^K}$ de ces expressions, j'utilise le lemme suivant:

Lemme 15: Soient G et H des groupes finis, soit X un G-ensemble-H, et Y un H ensemble. Alors l'ensemble $(X \times_H \tilde{Y})$ s'identifie au produit $X\times Y$, sur lequel le couple (g,h) de $G\times H$ agit par

$$g.(x,y).h = (gxh, h^{-1}y)$$

Corollaire: Si K est un sous-groupe de $G\times H$, alors

$$|(X\times_H \tilde{Y})^K| = |X^K||Y^{p_2(K)}|$$

En effet, le point $x\times_H (y,h)$ de $X\times_H \tilde{Y}$ est égal au point $xh \times_H (h^{-1}y, 1)$. L'application

$$x\times_H (y,h) \in X\times_H \tilde{Y} \mapsto (xh, h^{-1}y) \in X\times Y$$

fournit l'identification souhaitée, l'application inverse étant donnée par

$$(x,y)\in X\times Y \mapsto x\times_H (y,1) \in X\times_H \tilde{Y}$$

Le point (x, y) de $X \times Y$ est alors invariant par $(g, h) \in K$ si

$$g.(x, y).h^{-1} = (gxh^{-1}, hy) = (x, y)$$

ce qui prouve le corollaire.

Revenant à l'égalité (3), je vois que si

$$Z_x = (K \times K/\Delta(K \cap^x K)^{(1,x)}) \times_K \tilde{e}_K^K$$

et si H est un sous-groupe de $K \times K$, alors $|Z_x^H| = 0$ sauf si $p_2(H) = K$ et si H est contenu dans $\Delta(K \cap^x K)$ à conjugaison près par $K \times K$. Donc $Z_x = 0$ si $K \neq^x K$, i.e. si $x \notin N_G(K)$. Et si $x \in N_G(K)$, alors en notant γ_x l'homomorphisme de conjugaison par x de K dans K, je peux écrire $Z_x = K \times K/\Delta_{\gamma_x}(K)$, et finalement

$$(K \times G/\Delta(K)^*) \times_G (G \times K/\Delta(K)) \times_K \tilde{e}_K^K = \sum_{x \in N_G(K)/K} (K \times K/\Delta_{\gamma_x}(K)) \times_K \tilde{e}_K^K$$

de sorte que ba n'est autre que l'application de trace relative $Tr_1^{N_G(K)/K}$. Alors si a' est la restriction de a à $(\tilde{e}_K^K M(K))^{N_G(K)}$, j'ai

$$ba' = |N_G(K)/K| Id_{(\tilde{e}_K^K M(K))^{N_G(K)}} \text{ et} a'b = |N_G(K)/K| Id_{\tilde{e}_K^G M(G)}$$

En particulier, l'application b est un isomorphisme de $\tilde{e}_K^G M(G)$ sur $(\tilde{e}_K^K M(K))^{N_G(K)}$.

Comme les e_K^G, pour K modulo G, sont deux à deux orthogonaux de somme l'identité, il en est de même des $\tilde{e}_K^G$, et

$$M(G) = \oplus_{K mod.\ G} \tilde{e}_K^G M(G) = \oplus_{K mod.\ G} (\tilde{e}_K^K M(K))^{N_G(K)}$$

Proposition 7: Si A est un corps de caractéristique 0, et si M est un foncteur de $Fonct_A(\mathcal{C})$, alors pour tout groupe fini G

$$M(G) = \oplus_{K mod.\ G} (\tilde{e}_K^K M(K))^{N_G(K)}$$

Remarques: a) Le module $\tilde{e}_K^K M(K)$ est une sorte de "résidu en K" du foncteur M: c'est l'ensemble des m de $M(K)$ tels que

$$M(H \times K/\Delta(H)^*).m = 0 \text{ pour tout sous-groupe propre } H \text{ de } K$$

Cette notion de résidu n'est pas tout à fait satisfaisante, car elle ne tient compte que des restrictions, et ignore les points cofixes.

b) Le même raisonnement que ci-dessus permet de montrer que les algèbres $\tilde{e}_K^G \mathcal{E}nd(G) \tilde{e}_K^G$ et $(\tilde{e}_K^K \mathcal{E}nd(K) \tilde{e}_K^K)^{N_G(K)}$ sont isomorphes. Il suffit donc, pour décomposer $\tilde{e}_K^G$ en somme d'idempotents primitifs, d'étudier les algèbres $\tilde{e}_K^K \mathcal{E}nd(K) \tilde{e}_K^K$, et leurs points fixes par l'action de G.

7.2 Les sous-foncteurs du foncteur de Burnside en caractéristique 0

Je suppose ici que $A = k$ est un corps de caractéristique 0. Je vais étudier les sous-foncteurs du foncteur de Burnside.

7.2.1 Premier exemple

Je note tout d'abord que le foncteur $L_{1,k}$ s'identifie au foncteur de Burnside: en effet, pour tout groupe fini G, j'ai

$$L_{1,k}(G) = \mathcal{H}om(1, G) \otimes_{\mathcal{E}nd(1)} k$$

Or $\mathcal{H}om(1, G)$ est le groupe de Grothendieck des G-ensembles-(1), i.e. des G ensembles, et $\mathcal{E}nd(1)$ est réduit à k. Donc $L_{1,k}(G) = b(G)$, et cette identification est un isomorphisme de foncteurs.

Il en résulte que b a un unique sous-foncteur maximal $J_{1,k}$, défini par

$$J_{1,k}(G) = \{X \in b(G) \mid \forall Y \text{ (1)-ensemble-}G,\ Y \times_G X = 0\}$$

Or si $Y = 1 \times G/1 \times U$ et $X = G \times 1/V \times 1$, alors en identifiant $\mathcal{E}nd(1)$ à k, j'ai

$$Y \times_G X = |U \backslash G/V|$$

La dimension du quotient $S_{1,k}(G) = b(G)/J_{1,k}(G)$ est donc le rang de la forme bilinéaire sur $b(G)$ qui au couple $(G/U, G/V)$ associe $< G/U, G/V >_G = |U \backslash G/V|$. Il est alors facile de voir que:

a) Si X et Y sont dans $b(G)$, alors

$$< X, Y >_G = < XY, G/G >_G$$

En particulier, les e_H^G sont deux à deux orthogonaux pour la forme $< \, , \, >_G$.

b) Comme de plus

$$< e_H^G, e_H^G >_G = < e_H^G, G/G >_G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \subseteq H} |K| \tilde{\chi}]K, H[=$$

$$= \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{x \in G} \sum_{<x> \subseteq K \subseteq H} \tilde{\chi}]K, H[$$

il en résulte que

$$< e_H^G, e_H^G >_G = \frac{\phi_1(G)}{|N_G(H)|}$$

en notant $\phi_1(G)$ le nombre d'éléments x de G tels que $< x > = G$ (nul si G n'est pas cyclique). La dimension de $S_{1,k}(G)$ est donc le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G.

Mais si je note $R_Q(G)$ l'anneau des représentations rationnelles de G, je définis un objet de $Fonct_k(\mathcal{C})$ en tensorisant $R_Q(G)$ par k. Il y a alors un morphisme évident de b dans $k \otimes R_Q$, qui à un G-ensemble associe son caractère. L'image de ce morphisme admet $S_{1,k}$ comme quotient, car $S_{1,k}$ est l'unique quotient simple de b. Comme la dimension de $k \otimes R_Q(G)$ est précisément le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G, il en résulte la

Proposition 8: Le foncteur $S_{1,k}$ est isomorphe à $k \otimes R_Q$, qui est donc un foncteur simple.

7.2.2 Les constantes $m_{G,N}$

Plus généralement, soit I un sous-foncteur de b. Alors:
a) Pour tout groupe fini G, le module $I(G)$ est un idéal de $b(G)$: j'ai déjà observé en effet que si X et Y sont des G-ensembles, alors $\tilde{Y} \times_G X$ s'identifie à YX. Donc si $X \in I(G)$, alors $YX \in I(G)$ pour tout Y de $b(G)$. Comme $b(G)$ est semi-simple, il existe une partie $\mathcal{A}(G)$ de l'ensemble des sous-groupes de G telle que $I(G)$ soit le sous-k-espace vectoriel de $b(G)$ engendré par les e_H^G, pour $H \in \mathcal{A}(G)$.
b) Si H est un sous-groupe de G, je dois avoir

$$\mathrm{Ind}_H^G I(H) \subseteq I(G)$$

et comme $\mathrm{Ind}_H^G e_K^H$ est un multiple non-nul de e_K^G, je dois avoir

$$H \subseteq G,\ K \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow K \in \mathcal{A}(G)$$

c) De même, je dois avoir

$$\mathrm{Res}_H^G I(G) \subseteq I(H)$$

et comme

$$\mathrm{Res}_H^G e_K^G = \sum_{x \in \overline{T}_G(K,H)} e_{K^x}^H$$

j'ai l'implication

$$H \subseteq G,\ K \in \mathcal{A}(G),\ x \in G,\ K^x \subseteq H \Rightarrow K^x \in \mathcal{A}(H)$$

c) En particulier, si $K \in \mathcal{A}(G)$, alors $K \in \mathcal{A}(K)$. Inversement, si $K \in \mathcal{A}(K)$, alors $K \in \mathcal{A}(G)$. En notant $\mathcal{A}$ l'ensemble des groupes finis K pour lesquels $K \in \mathcal{A}(K)$, je vois que

$$\mathcal{A}(G) = \{K \subseteq G \mid K \in \mathcal{A}\}$$

d) Soit N un sous-groupe normal du groupe G, et U un sous-groupe de G contenant N. Alors

$$\mathrm{Inf}_{G/N}^G e_{U/N}^{G/N} = \sum_{\substack{XN = U \\ X\ mod.\ G}} e_X^G$$

Donc, j'ai l'implication

$$U/N \in \mathcal{A},\ X \subseteq G,\ XN = U \Rightarrow\ X \in \mathcal{A}$$

Autrement dit, puisque U/N est isomorphe à $X/X \cap N$,

$$M \lhd X,\ X/M \in \mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{A}$$

d) Il reste à exprimer le fait que I doit être stable par coinflation. Or si N est un sous-groupe normal du groupe G, et si π désigne la projection de G sur G/N, il est facile de voir que si X est un G-ensemble, alors $((G/N) \times G/\Delta_\pi(G)) \times_G X$ s'identifie à l'ensemble $N\backslash X$ des orbites de N sur X, considéré comme G/N-ensemble. Je noterai encore $X \mapsto N\backslash X$ l'application $b((G/N) \times G/\Delta_\pi(G))$ de $b(G)$ dans $b(G/N)$.

Si $Y \in b(G/N)$ et $X \in b(G)$, il est facile de voir que

$$N\backslash(X.\mathrm{Inf}_{G/N}^G Y) = (N\backslash X).Y$$

et en particulier si $X = e_H^G$, il vient

$$|Y^{HN/N}|(N\backslash e_H^G) = (N\backslash e_H^G).Y$$

et cela prouve qu'il existe une constante rationnelle $m_{H,N}^G$ telle que

$$N\backslash e_H^G = m_{H,N}^G e_{HN/N}^{G/N}$$

Ces constantes $m_{H,N}^G$ peuvent toutes être déduites du cas où $H = G$: en effet,

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)/H|}\mathrm{Ind}_H^G e_H^H$$

et de plus, pour tout Y de $b(H)$

$$N\backslash\mathrm{Ind}_H^G Y = \mathrm{Ind}_{HN/N}^{G/N}\theta((N \cap H)\backslash Y)$$

en notant θ l'isomorphisme de $H/H \cap N$ sur HN/N. Alors:

$$N\backslash e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)/H|}\mathrm{Ind}_{HN/N}^{G/N}\theta(m_{H,H\cap N}^H e_{H/H\cap N}^{H/H\cap N}) = \frac{|N_G(HN)/HN|}{|N_G(H)/H|} m_{H,H\cap N}^H e_{HN/N}^{G/N}$$

ce qui donne finalement

$$m_{H,N}^G = \frac{|N_G(HN)/HN|}{|N_G(H)/H|} m_{H,H\cap N}$$

ou j'ai posé $m_{H,H\cap N} = m_{H,H\cap N}^H$.

Si N est un sous-groupe normal du groupe G, je note $m_{G,N}$ le nombre rationnel tel que

$$N\backslash e_G^G = m_{G,N} e_{G/N}^{G/N}$$

Comme $N\backslash(G/U) = (G/N)/(UN/N)$, la traduction de cette définition donne alors

$$\frac{1}{|G|}\sum_{X\subseteq G}|X|\tilde{\chi}]X,G[(G/N)/(XN/N) = m_{G,N}\frac{1}{|G|}\sum_{N\subseteq Y\subseteq G}|Y|\tilde{\chi}]Y,G[(G/N)/(Y/N)$$

ce qui prouve le lemme suivant:

Lemme 16: Soit N un sous-groupe normal du groupe G, et Y un sous-groupe de G contenant N. Alors

$$\sum_{XN=Y}|X|\tilde{\chi}]X,G[= m_{G,N}|Y|\tilde{\chi}]Y,G[$$

et en particulier

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|}\sum_{XN=G}|X|\tilde{\chi}]X,G[$$

7.2.3 Les b-groupes

Ainsi, la famille $\mathcal{A}$ est telle que
a) Si $G/N \in \mathcal{A}$, alors $G \in \mathcal{A}$.
b) Si $G \in \mathcal{A}$ et si $m_{G,N} \neq 0$, alors $G/N \in \mathcal{A}$.
Les éléments minimaux de $\mathcal{A}$ justifient alors la définition suivante:

Je dirai qu'un groupe fini G est un b-groupe si pour tout sous-groupe normal N non-trivial de G, la constante $m_{G,N}$ est nulle.

Remarque: La constante $m_{G,1}$ est toujours égale à 1, ce qui est bien normal. Plus généralement, si N est un sous-groupe du sous-groupe de Frattini de G, alors $m_{G,N} = 1$: en effet dans ce cas, l'égalité $XN = G$ entraîne que $X = G$. En particulier, un b-groupe a un sous-groupe de Frattini trivial.

Le lemme suivant étudie le cas où j'ai deux sous-groupes normaux de G:

Lemme 17: Soit G un groupe fini, et N et M des sous-groupes normaux de G. Alors:

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|}\sum_{YN=YM=G}|Y|\tilde{\chi}]Y,G[m_{G/M,(Y\cap N)M/M}$$

Remarque: L'énoncé ci-dessus a un sens, car si $YM = G$, alors $(Y \cap N)M$ est un sous-groupe normal de G.
La démonstration de ce lemme utilise le fait que si je note $K_{]X,G[}(XM)$ l'ensemble des compléments dans $]X,G[$ de XM, i.e. l'ensemble des sous-groupes U de G contenant X tels que $UM = G$ et $U \cap XM = X$, alors l'ensemble $]X,G[-K_{]X,G[}(XM)$ est contractile (cf. [BO2]). Si i est l'inclusion de cet ensemble dans $]X,G[$, et si $Y \in]X,G[$, alors i^Y est contractile si Y n'est pas un complément de XM, et égal à $]X,Y[$ sinon. Il vient

$$\tilde{\chi}]X,G[= \sum_{\substack{YM=G\\ Y\supseteq X\\ Y\cap M = X\cap M}} \tilde{\chi}]X,Y[\tilde{\chi}]Y,G[$$

et cette égalité reste vraie même dans le cas où M est contenu dans X, ou dans le cas où $XM = G$, ces deux cas étant un peu douteux dans le raisonnement ci-dessus, puisqu'alors $XM \notin]X,G[$.

Je peux donc écrire

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|}\sum_{X,Y} |X|\tilde{\chi}]X,Y[\tilde{\chi}]Y,G[$$

où je somme sur les couples (X,Y) de sous-groupes de G tels que

$$X \subseteq Y,\ XN = G,\ YM = G,\ Y\cap M = X \cap M$$

Ces conditions se résument à

$$YN = YM = G,\ X(Y\cap N) = M,\ X \supseteq Y \cap M$$

Alors, pour Y donné, la somme en X revient à sommer sur un sous-groupe R (égal à $X/Y\cap M$) de $Y/Y\cap M$, tel que

$$R.(Y\cap N)(Y\cap M)/(Y\cap M) = Y/Y\cap M$$

La somme en X est donc égale à

$$|Y\cap M|\sum_R |R|\tilde{\chi}]R, Y/Y\cap M[= |Y\cap M||Y/Y\cap M|m_{Y/Y\cap M,(Y\cap N)(Y\cap M)/(Y\cap M)}$$

Or le groupe $Y/Y\cap M$ est isomorphe à G/M, et cet isomorphisme envoie le sous-groupe $(Y\cap N)(Y\cap M)/(Y\cap M)$ sur $(Y\cap N)M/M$. Finalement

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|}\sum_{YN=YM=G} |Y|\tilde{\chi}]Y,G[m_{G/M,(Y\cap N)M/M}$$

ce qui prouve le lemme.

En particulier, si $N \supseteq M$, et si $YM = G$, alors $N = (Y \cap N)M$ et

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{YM=G} |Y|\tilde{\chi}]Y, G[m_{G/M,N/M} = m_{G,M} m_{G/M,N/M}$$

relation de transitivité qu'il est d'ailleurs immédiat de déduire de la définition des constantes $m_{G,N}$. Elle montre que si M est un sous-groupe normal maximal de G tel que $m_{G,M} \neq 0$, alors G/M est un b-groupe. Elle montre aussi qu'un groupe G est un b-groupe si et seulement si $m_{G,N} = 0$ pour tout sous-groupe normal minimal non-trivial N de G.

Soient donc M et N deux sous-groupes normaux de G. Si G/M est un b-groupe, l'égalité du lemme 17 devient

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{YN = YM = G \\ Y \cap N \subseteq M}} |Y|\tilde{\chi}]Y, G[$$

Alors si $m_{G,N} \neq 0$, il existe un sous-groupe Y de G tel que $YN = YM = G$, et $Y \cap N \subseteq M$. Alors le groupe G/M, isomorphe à $Y/Y \cap M$, est un quotient du groupe $Y/Y \cap N$, isomorphe à G/N. Donc si M' est un sous-groupe normal maximal de G tel que $m_{G,M'} \neq 0$, le quotient G/M' est un b-groupe, donc quotient de G/N. Et puisque $m_{G,M'} \neq 0$, le groupe G/M est quotient de G/M'.
Alors si M'' est un autre sous-groupe normal maximal de G tel que $m_{G,M''} \neq 0$, les quotients G/M' et G/M'' sont isomorphes. Je noterai $\beta(G)$ ce quotient commun. Tout b-groupe quotient de G est quotient de $\beta(G)$, et si N est un sous-groupe normal de G tel que $m_{G,N} \neq 0$, alors $\beta(G)$ est quotient de G/N. D'où:

Proposition 9: Soit G un groupe fini. Il existe un unique quotient $\beta(G)$ de G tel que

1. **Si H est un b-groupe quotient de G, alors H est quotient de $\beta(G)$.**
2. **Si N est un sous-groupe normal de G tel que $m_{G,N} \neq 0$, alors $\beta(G)$ est quotient de G/N.**

Remarque: En général, il existe plusieurs sous-groupes normaux M de G tels que G/M soit isomorphe à $\beta(G)$: le noyau d'une surjection de G dans $\beta(G)$ n'est pas déterminé de manière unique.

Soient N et M deux sous-groupes normaux de G, tels que les quotients G/N et G/M soient isomorphes à $\beta(G)$. Alors:

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{YN = YM = G \\ Y \cap N \subseteq M}} |Y|\tilde{\chi}]Y, G[$$

et je peux sommer sur le groupe $Z = Y(M \cap N)$. Il vient

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{ZM = ZN = G \\ Z \cap N = M \cap N}} \sum_{Y(M \cap N) = Z} |Y|\tilde{\chi}]Y, G[$$

ou encore par le lemme 16

$$m_{G,N} = \frac{m_{G,M \cap N}}{|G|} \sum_{\substack{ZM = ZN = G \\ Z \cap N = M \cap N}} |Z|\tilde{\chi}]Z, G[$$

et comme G/N et G/M sont isomorphes, les conditions

$$ZN = ZM = G, \; Z \cap N = M \cap N$$

entraînent que $Z \cap M = M \cap N$. L'expression de $m_{G,N}$ ci-dessus devient alors symétrique en M et N, ce qui prouve que $m_{G,N} = m_{G,M}$. Je noterai $m(G)$ cette constante commune, qui est non-nulle d'après les remarques ci-dessus.

Il est possible de modifier un peu cette expression de $m(G)$: en effet, dire que

$$ZN = ZM = G, \; Z \cap N = Z \cap M = M \cap N$$

revient à dire que le groupe $Z' = Z/M \cap N$ est un complément commun des sous-groupes normaux $N' = N/M \cap N$ et $M' = M/M \cap N$ dans le groupe $G' = G/M \cap N$. L'intervalle $]Z, G[$ s'identifie à $]Z', G'[$. Ce dernier est lui même isomorphe à $]1, N'[^{Z'}$ par l'application

$$U \in]Z', G'[\mapsto U \cap N' \in]1, N'[^{Z'}$$

dont l'application inverse est

$$V \in]1, N'[^{Z'} \mapsto VZ' \in]Z', G'[$$

Et comme $N' \cap M' = (1)$, les groupe N' et M' se centralisent, donc

$$]1, N'[^{Z'} =]1, N'[^{Z'M'} =]1, N'[^{G'}$$

qui s'identifie aussi à $]M \cap N, N[^G$. Finalement

$$m(G) = m_{G,N} = m_{G,M} =$$

$$\frac{m_{G,M \cap N}|M \cap N|}{|G|} \tilde{\chi}]M \cap N, N[^G |K_{G/M \cap N}(M/M \cap N) \cap K_{G/M \cap N}(N/M \cap N)|$$

Plus généralement, si M et N sont des sous-groupes normaux de G tels que G/M soit isomorphe à G/N, je vais montrer que $m_{G,M} = m_{G,N}$. J'utiliserai le lemme suivant:

Lemme 18: Soit N un sous-groupe normal du groupe G. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **La constante $m_{G,N}$ est non-nulle.**
2. **Le groupe $\beta(G/N)$ est isomorphe à $\beta(G)$.**

En effet, si $m_{G,N} \neq 0$, alors $\beta(G)$ est quotient de G/N. C'est un b-groupe, il est donc quotient de $\beta(G/N)$. Mais $\beta(G/N)$ est un b-groupe quotient de G/N, donc de G, donc de $\beta(G)$. Donc $\beta(G)$ et $\beta(G/N)$ sont isomorphes.

Inversement, si $\beta(G)$ et $\beta(G/N)$ sont isomorphes, soit M/N un sous-groupe de G/N tel que $(G/N)/(M/N)$ soit isomorphe à $\beta(G/N)$. Alors

$$m_{G,M} = m_{G,N} m_{G/N,M/N}$$

Mais comme G/M est isomorphe à $\beta(G)$, j'ai $m_{G,M} = m(G) \neq 0$. De même, j'ai $m_{G/N,M/N} = m(G/N) \neq 0$, donc $m_{G,N} = m(G)/m(G/N) \neq 0$. D'où le lemme.

Alors si M et N sont des sous-groupes normaux de G tels que G/M soit isomorphe à G/N, et si $m_{G,N} = 0$, le lemme 18 montre que comme $\beta(G/M)$ n'est pas isomorphe à $\beta(G)$, j'ai aussi $m_{G,M} = 0$. Et si $m_{G,N}$ et $m_{G,M}$ sont tous deux non-nuls, alors ils sont égaux à $m(G)/m(G/N)$. Donc:

Corollaire: Si M et N sont des sous-groupes normaux de G tels que G/M soit isomorphe à G/N, alors $m_{G,M} = m_{G,N}$.

7.2.4 Les sous-foncteurs de b

Considérant de nouveau l'ensemble $\mathcal{A}$ défini à partir du sous-foncteur I du foncteur de Burnside, je note $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui n'ont aucun quotient propre dans $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{B}$ est formé de b-groupes: en effet, si $N \triangleleft G \in \mathcal{A}$, et si $m_{G,N} \neq 0$, alors $G/N \in \mathcal{A}$.

De plus si un groupe G a un quotient dans $\mathcal{B}$, alors $G \in \mathcal{A}$. Inversement, si $G \in \mathcal{A}$, et si H est un quotient minimal de G qui soit dans $\mathcal{A}$, alors $H \in \mathcal{B}$.

Donc $\mathcal{A}$ est l'ensemble des groupes qui ont un quotient dans $\mathcal{B}$. Inversement, si $\mathcal{B}$ est un ensemble de b-groupes, soit $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ l'ensemble des groupes ayant un quotient dans $\mathcal{B}$. Je pose

$$I_\mathcal{B}(G) = < e_H^G \mid H \subseteq G,\ H \in \mathcal{A}_\mathcal{B} > \subseteq b(G)$$

Cette expression définit un sous-foncteur $I_\mathcal{B}$ de b: il est clair que $I_\mathcal{B}$ est stable par restriction et induction. Il est de même stable par inflation, car tout groupe ayant un quotient dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Enfin, si $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, si $B \in \mathcal{B}$ est un quotient de H et si $N \triangleleft H$ est tel que $m_{H,N} \neq 0$, alors B est un b-groupe quotient de H. Donc B est quotient de $\beta(H)$, et $\beta(H) \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Mais comme $m_{H,N} \neq 0$, j'ai $\beta(H) = \beta(H/N)$, donc H/N a un quotient dans $\mathcal{B}$, et $H/N \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Donc $I_{\mathcal{B}}$ est stable par coinflation, et c'est donc un sous-foncteur de b.

Ainsi tout sous-foncteur de b est de la forme $I_{\mathcal{B}}$, pour un ensemble $\mathcal{B}$ convenable de b-groupes. Soient alors $I_{\mathcal{B}} \subset I_{\mathcal{B}'}$ deux sous-foncteurs de b, tels que le quotient $I_{\mathcal{B}'}/I_{\mathcal{B}}$ soit simple, isomorphe à $S_{H,V}$, pour un groupe H et un $Ext(H)$-module V. Alors le quotient $I_{\mathcal{B}'}(H)/I_{\mathcal{B}}(H)$ est isomorphe à V, et $I_{\mathcal{B}'}(K) = I_{\mathcal{B}}(K)$ pour tout groupe K d'ordre strictement plus petit que $|H|$.

En particulier, si K est un sous-groupe propre de H qui est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}$, alors K est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Comme $I_{\mathcal{B}'}(H) \neq I_{\mathcal{B}}(H)$, il s'ensuit que $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}'} - \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Alors, si $H \neq \beta(H)$, le groupe $\beta(H)$ est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$: en effet, l'idempotent e_H^H est dans $I_{\mathcal{B}'}(H)$, et si $N \triangleleft H$ est tel que $H/N = \beta(H)$, alors $m_{H,N} \neq 0$, donc $e_{\beta(H)}^{\beta(H)} \in I_{\mathcal{B}'}(H) = I_{\mathcal{B}}(H)$. Alors H a un quotient dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$, donc H est dans $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.

Cela prouve donc que $H = \beta(H)$, donc que H est un b-groupe. De plus, le quotient $I_{\mathcal{B}'}(H)/I_{\mathcal{B}}(H)$ est non-trivial, mais il est au plus engendré par e_H^H. Cet élément est invariant par $Ext(H)$, ce qui prouve que V est le module trivial. Donc si $S_{H,V}$ intervient dans b, alors H est un b-groupe et V est le module trivial.

Inversement, si H est un b-groupe, soit $I_{\mathcal{B}}$ un sous-foncteur propre du foncteur $I_{\{H\}}$. Alors si $B \in \mathcal{B}$, le groupe B est dans $\mathcal{A}_{\{H\}}$, donc H est un quotient de B. Et comme $I_{\mathcal{B}} \neq I_{\{H\}}$, le groupe H n'a aucun quotient dans $\mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B}$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{B}_H$ des b-groupes qui admettent H comme quotient propre. Donc $I_{\mathcal{B}}$ est contenu dans $I_{\mathcal{B}_H}$. Comme le groupe H n'a aucun quotient dans $\mathcal{B}_H$, j'ai $I_{\mathcal{B}_H} \neq I_{\{H\}}$, et $I_{\mathcal{B}_H}$ est l'unique sous-foncteur maximal de $I_{\{H\}}$.

Le quotient $I_{\{H\}}/I_{\mathcal{B}_H}$ est alors simple, isomorphe à $S_{K,k}$, pour un b-groupe K convenable. Comme aucun sous-groupe de H n'admet H comme quotient propre, j'ai $I_{\mathcal{B}_H}(H) = 0$. D'autre part, le module $I_{\{H\}}(H)$ est engendré par e_H^H. Donc $S_{K,k}(H)$ est isomorphe à k. Et si L est un groupe d'ordre strictement inférieur à $|H|$, alors $I_{\{H\}}(L) = I_{\mathcal{B}_H}(L) = 0$, donc $S_{K,k}(L) = 0$. Par définition de $S_{K,k}$, il en résulte que $K = H$, donc que le foncteur $S_{H,k}$ intervient dans b. D'où

Proposition 10: Soit H un groupe et V un $kExt(H)$-module simple. Le foncteur $S_{H,V}$ intervient dans le foncteur de Burnside si et seulement si H est un b-groupe et $V = k$.

Si G est un groupe et H est un b-groupe, alors $S_{H,k}(G)$ est isomorphe au quotient $I_{\{H\}}(G)/I_{\mathcal{B}_H}(G)$. Il a donc comme dimension sur k le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes K de G qui admettent H comme quotient, mais qui n'ont aucun quotient dans $\mathcal{B}_H$. Si K est un tel groupe, alors H est quotient de $\beta(K)$, car c'est un b-groupe quotient de K. Alors si $\beta(K) \neq H$, le groupe $\beta(K)$ est dans $\mathcal{B}_H$, et le groupe K a un quotient dans $\mathcal{B}_H$. Donc $\beta(K) = H$. Inversement, si K est un groupe tel que $\beta(K) = H$, et si L est un b-groupe quotient de K, alors L

est quotient de H, et H ne peut pas être quotient propre de L.

Donc

Proposition 11: Soit G un groupe et H un b-groupe. Le module $S_{H,k}(G)$ a pour dimension sur k le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes K de G tels que $\beta(K) = H$.

Remarque: Dire que $\beta(K) = 1$ revient à dire que $m_{K,K} \neq 0$, donc que K est cyclique. La dimension de $S_{1,k}(G)$ est donc bien le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G.

Il reste à trouver la "multiplicité" de $S_{H,k}$ comme "facteur de composition" de b: si i_H est un idempotent de $\mathcal{E}nd(H)$ tel que $\mathcal{E}nd(H)i_H$ soit une enveloppe projective du $kExtH$-module k étendu à $\mathcal{E}nd(H)$, cette multiplicité est par définition la dimension de $\mathcal{H}om_{Fonct}(L_{H,\mathcal{E}nd(H)i_H}, b)$ (cf. Lemme 2), ou encore la dimension de $i_H b(H)$. Comme $\tilde{e}_K^H$ agit par 0 sur k si K est un sous-groupe propre de G, je peux supposer que $i_H \in \tilde{e}_H^H \mathcal{E}nd(H) \tilde{e}_H^H$. Alors

$$\dim_k i_H b(H) \leq \dim_k \tilde{e}_H^H b(H)$$

De plus $\tilde{e}_H^H \times_H H/U = 0$ si $U \neq H$, et $\tilde{e}_H^H \times_H H/H = e_H^H$ (cf. lemme 15). Donc $\tilde{e}_H^H b(H)$ est de dimension 1. Comme $S_{H,k}$ intervient dans b, le module $i_H b(H)$ est non-nul. Il est donc de dimension 1.

Proposition 12: Si H est un b-groupe, le foncteur $S_{H,k}$ intervient une seule fois dans b.

Remarque: Le foncteur de Burnside admet une "suite de composition", au sens suivant: soient $H_1, H_2, \ldots H_n, \ldots$ les classes d'isomorphisme de b-groupes, rangées dans un ordre tel que

$$i < j \Rightarrow |H_i| \leq |H_j|$$

et soit $\mathcal{B}_n = \{H_n, H_{n+1}, \ldots\}$. Alors $\mathcal{B}_n \supset \mathcal{B}_{n+1}$. De plus, le quotient $I_{\mathcal{B}_n}/I_{\mathcal{B}_{n+1}}$ est isomorphe à $S_{H_n,k}$, et l'intersection $\cap_n I_{\mathcal{B}_n}$ est nulle. Chaque facteur $S_{H,k}$, pour H b-groupe, apparait exactement une fois comme quotient de cette suite.

7.2.5 Exemples de b-groupes

1) J'ai déjà observé que $\beta(G)$ est trivial si et seulement si G est cyclique. Ainsi, le seul groupe cyclique qui est un b-groupe est le groupe trivial.
2) Si $\Phi(G)$ est le sous-groupe de Frattini de G, alors il est clair que pour tout sous-groupe normal N de G

$$m_{G,N} = m_{G,N\Phi(G)}$$

puisque $XN = G \Leftrightarrow X(N\Phi(G)) = G$. En particulier, si G est un b-groupe, alors $\Phi(G) = (1)$. Donc si G est de plus un p-groupe, alors G est abélien élémentaire.
3) Soit N un sous-groupe normal minimal d'un groupe G. Si N est abélien, et si X est un sous-groupe propre de G tel que $XN = G$, alors X est un complément de N, et X est un sous-groupe maximal de G: en effet, si $X \subseteq Y$, alors $Y \cap N$ est un sous-groupe normal de G (car il est normalisé par Y et N qui est abélien, donc par $YN = G$). Donc ou bien $Y \cap N = N$ et $Y = G$, ou bien $Y \cap N = (1)$, et $Y = X$ est un complément de N.

Cette remarque permet de calculer $m_{G,N}$: en notant $K_G(N)$ l'ensemble des compléments dans G de N, j'ai

$$m_{G,N} = 1 - \frac{|K_G(N)|}{|N|}$$

4) Il résulte des points 1), 2) et 3) que si G est un p-groupe non-trivial qui est aussi un b-groupe, alors G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$.
5) Le cas des b-groupes nilpotents sera réglé par les points précédents si je sais ce qui se passe pour un produit direct de groupes (d'ordres premiers entre eux). Il est commode pour cela de généraliser les calculs relatifs aux constantes $m_{G,N}$.

Soit (X_S) une suite de variables indexée par les classes de groupes finis simples S. Si G est un groupe fini, je note $v_S(G)$ la multiplicité de S comme facteur de composition de G, et je pose

$$P(G) = \prod_S X_S^{v_S(G)}$$

considéré comme un polynôme de $\mathbf{Z}[(X_S)]$. Je pose

$$\tilde{P}(G) = \sum_{H \subseteq G} P(H)\tilde{\chi}]H, G[$$

La propriété “générique” de l'application $G \mapsto P(G)$ est que si N est un sous-groupe normal de G, alors

$$P(G) = P(N)P(G/N)$$

De même:

Lemme 19: Soit N un sous-groupe normal du groupe G. Je pose

$$Q_{G,N} = \sum_{YN=G} P(Y \cap N)\tilde{\chi}]Y, G[$$

Alors si R est un sous-groupe de G contenant N

$$\sum_{HN=R} P(H)\tilde{\chi}]H, G[= Q_{G,N} P(R/N)\tilde{\chi}]R/N, G/N[$$

et en particulier

$$\tilde{P}(G) = \tilde{P}(G/N)Q_{G,N}$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 17: je sais que

$$\tilde{\chi}]H,G[= \sum_{\substack{YN=G \\ Y\supseteq H \\ Y\cap N = H\cap N}} \tilde{\chi}]H,Y[\tilde{\chi}]Y,G[$$

Mais si $HN = R$, j'ai $P(H)P(N) = P(R)P(H\cap N)$, ou encore

$$P(H) = P(R/N)P(H\cap N)$$

De plus, si $YN = G$ et $Y\cap N = H\cap N$, alors $]H,Y[$ est isomorphe à $]HN,G[$, donc à $]R/N,G/N[$ si $HN = R$. D'où la première égalité.

Alors dans la somme définissant $\tilde{P}(G)$, je regroupe les termes H correspondant à un groupe $HN = R$ donné. Il vient

$$\tilde{P}(G) = \sum_{N\subseteq R\subseteq G} \sum_{HN=R} P(H)\tilde{\chi}]H,G[$$

et la première égalité prouve alors le lemme.

La démonstration du lemme 17, transcrite mot pour mot ici, donne le

Lemme 20: Soient M et N des sous-groupes normaux du groupe G. Alors

$$Q_{G,N} = \sum_{YN=YM=G} P(Y\cap N\cap M)\tilde{\chi}]Y,G[Q_{G/M,(Y\cap N)M/M}$$

En particulier, si G est le produit direct $M\times N$, alors dire que $YN = YM = G$ revient à dire que la première projection de Y est égale à M et sa seconde projection à N. Dans ces conditions:

Lemme 21: Si Y est un sous-groupe de $M\times N$ tel que $p_1(Y) = M$ et $p_2(Y) = M$, alors $]Y, M\times N[$ s'identifie à $](1), q(Y)[^{q(Y)}$, ensemble des sous-groupes normaux propres non-triviaux de $q(Y)$.

En effet, soit s (resp. t) une surjection de M dans $q(Y)$ (resp. de N dans $q(Y)$), telle que

$$Y = \{(m,n)\in M\times N \mid s(m) = t(n)\}$$

Si Z est un sous-groupe de $M\times N$ contenant Y, alors $f(Z) = s(k_1(Z))$ est un sous-groupe normal de $q(Y)$. Inversement, si P est un sous-groupe normal de $q(Y)$, alors

$$g(P) = \{(m,n)\in M\times N \mid s(m)t(n)^{-1}\in P\}$$

est un sous-groupe de $M \times N$ contenant Y. Il est facile de voir que f et g sont des bijections inverses l'une de l'autre, ce qui prouve le lemme.

Dans le cas où $G = M \times N$, le lemme 20 s'écrit

$$Q_{M\times N,N} = \sum_{p_1(Y)=M,\, p_2(Y)=N} \tilde{\chi}](1), q(Y)[^{q(Y)} Q_{N,k_2(Y)}$$

ou encore puisque $Q_{G,N} = \frac{\tilde{P}(G)}{\tilde{P}(G/N)}$, et puisque $N/k_2(Y) = q(Y)$

Lemme 22: Soient M et N des groupes finis. Alors

$$\tilde{P}(M \times N) = \tilde{P}(M)\tilde{P}(N) \sum_{p_1(Y)=M,\, p_2(Y)=N} \frac{\tilde{\chi}](1), q(Y)[^{q(Y)}}{\tilde{P}(q(Y))}$$

En particulier, si M et N n'ont aucun quotient commun non-trivial, alors

$$\tilde{P}(M \times N) = \tilde{P}(M)\tilde{P}(N)$$

Remarques:a) Il n'y a pas de problème à diviser par $\tilde{P}(q(Y))$: en effet, si G est un groupe, alors $\tilde{P}(G) \neq 0$, car le terme de plus haut degré de $\tilde{P}(G)$ est égal à $P(G)$, donc non-nul.

b) L'ensemble des sous-groupes normaux propres non-triviaux d'un groupe G est contractile, sauf si G est produit direct de ses sous-groupes normaux minimaux, i.e. produit direct de groupes simples (dans le cas contraire, le groupe G admet en effet un sous-groupe normal propre non-trivial n'ayant aucun complément normal dans G). En notant G_s le plus grand quotient semi-simple de G, le lemme 22 montre en fait que

$$\frac{\tilde{P}(M \times N)}{\tilde{P}(M_s \times N_s)} = \frac{\tilde{P}(M)}{\tilde{P}(M_s)} \frac{\tilde{P}(N)}{\tilde{P}(N_s)}$$

D'autre part, si S est un groupe simple, et k un entier positif, en posant $M = S^{k-1}$ et $N = S$, le lemme 22 permet de calculer

$$\tilde{P}(S^k) = \tilde{P}(S^{k-1})\tilde{P}(S)(1 - \frac{s(S^{k-1}, S)}{\tilde{P}(S)})$$

ce qui donne

$$\tilde{P}(S^k) = \prod_{i=0}^{k-1} (\tilde{P}(S) - s(S^i, S))$$

en notant $s(S^{k-1}, S)$ le nombre de surjections de S^{k-1} dans S, égal à $p^{k-1} - 1$ si $S = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et à $(k-1)|Aut(S)|$ si S est non-abélien. L'ensemble de ces formules permet donc le calcul de $\tilde{P}(M\times N)$ en fonction de $\tilde{P}(M)$, de $\tilde{P}(N)$ et des groupes M_s et N_s.

Proposition 13: Soient M et N des groupes n'ayant aucun quotient commun non-trivial. Alors $\beta(M\times N)=\beta(M)\times\beta(N)$, et $m(M\times N)=m(M)m(N)$.

En effet, soit A un sous-groupe normal de M tel que $M/A=\beta(M)$, et B un sous-groupe normal de N tel que $N/B=\beta(N)$. Je peux écrire

$$\tilde{P}(M\times N)=\tilde{P}(M)\tilde{P}(N)$$

et

$$\tilde{P}(M\times N/(A\times B))=\tilde{P}(M/A)\tilde{P}(N/B)$$

En faisant le quotient de ces deux égalités, il vient

$$Q_{M\times N,A\times B}=Q_{M,A}Q_{N,B} \qquad (1)$$

De plus la définition de $Q_{M,A}$ donne

$$Q_{M,A}=\sum_{HA=M}P(H\cap A)\tilde{\chi}]H,M[$$

En multipliant cette égalité par $P(M)$, comme $P(H)P(A)=P(M)P(H\cap A)$ si $HA=M$, il vient

$$P(M)Q_{M,A}=P(A)\sum_{HA=M}P(H)\tilde{\chi}]H,G[$$

Je noterai p (resp. q, $\tilde{p}$) l'évaluation du polynôme P (resp. Q, $\tilde{P}$) obtenue en remplaçant pour tout groupe simple S la variable X_S par $|S|$. Alors $p(G)=|G|$, et l'évaluation de l'égalité ci-dessus donne

$$|M|q_{M,A}=|A||M|m_{M,A}$$

par définition de $m_{M,A}$. Donc $q_{M,A}=|A|m_{M,A}$, et l'évaluation de l'égalité (1) donne

$$|A||B|m_{M\times N,A\times B}=|A|m_{M,A}|B|m_{N,B}$$

soit

$$m_{M\times N,A\times B}=m_{M,A}m_{N,B}=m(M)m(N) \qquad (2)$$

Donc $m_{M\times N,A\times B}\neq 0$, et $\beta(M\times N)$ est un quotient de $M\times N/(A\times B)=\beta(M)\times\beta(N)$.

Mais $\beta(M)$ et $\beta(N)$ sont des b-groupes quotient de $M\times N$, donc de $\beta(M\times N)$. Si s (resp. t) est une surjection de $\beta(M\times N)$ dans $\beta(M)$ (resp. dans $\beta(N)$), et si Y est l'image de $\beta(M\times N)$ par $s\times t$ dans $\beta(M)\times\beta(N)$, alors $p_1(Y)=\beta(M)$, et $p_2(Y) = \beta(N)$. Comme $\beta(M)$ et $\beta(N)$ n'ont aucun quotient commun, il en résulte que $q(Y) = (1)$, donc que $Y = \beta(M) \times \beta(N)$. Alors $\beta(M) \times \beta(N)$ est un quotient de $\beta(M \times N)$, et ces groupes sont donc isomorphes. La seconde assertion de la proposition résulte alors de l'égalité (2).

Corollaire: Si M et N sont des b-groupes n'ayant aucun quotient commun non-trivial, alors $M \times N$ est un b-groupe.

C'est le cas $M = \beta(M)$ et $N = \beta(N)$ de la proposition.

Alors soit G un groupe nilpotent. Le groupe G est produit direct de ses p-Sylows. Soit I l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels le p-Sylow S_p de G n'est pas cyclique. Il résulte du point 4) que $\beta(S_p) = (1)$ si $p \notin I$, et que $\beta(S_p) = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ sinon. Alors $\beta(G)$ est le produit direct des groupes $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$ pour $p \in I$. En notant n le produit des éléments de I, j'ai donc

$$\beta(G) = (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$$

et n est un entier sans facteur carré. Donc si G est un b-groupe nilpotent, alors il existe un entier n sans facteur carré tel que G soit isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$. Inversement, un tel groupe est le produit pour p divisant n des groupes $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$, qui sont des b-groupes sans quotient commun non-trivial. Alors G est un b-groupe, ce qui prouve la proposition suivante:

Proposition 14: Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **Le groupe G est un b-groupe nilpotent.**
2. **Il existe un entier n sans facteur carré tel que G soit isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$.**

6) Si S est un groupe simple non-abélien, alors S est évidemment un b-groupe. Le calcul de $\tilde{P}(S^k)$ effectué ci-dessus permet de montrer que S^k est un b-groupe si et seulement si $k = 0$ ou $k = 1$. Donc si G est un b-groupe semi-simple, alors G est le produit direct d'un b-groupe nilpotent (voir ci-dessus) et d'un produit de groupes simples non-abéliens deux à deux non isomorphes. Inversement, de tels groupes sont des b-groupes.
7) Les groupes symétriques S_n, pour $n \neq 2$, sont des b-groupes: en effet, le seul quotient propre non-trivial de S_n, pour $n = 3$ ou $n \geq 5$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, qui n'est pas un b-groupe. Or $\beta(S_n)$ n'est pas trivial car S_n n'est pas cyclique. Le cas $n = 4$ se traite en montrant de plus que si N est le sous-groupe normal d'ordre 4 de S_4, alors $m_{S_4,N} = 0$: en effet, N est un sous-groupe normal minimal de S_4, et N a $4 = |N|$ compléments dans S_4 (cf. point 3)).
8) Plus généralement, un groupe résoluble G est un b-groupe si et seulement si

tout sous-groupe normal minimal N de G a exactement $|N|$ compléments dans G. Si N est non-central, cela revient à dire que N admet des compléments dans G, tous conjugués. Et si N est central, d'ordre premier p, cela revient à dire que $G = N \times H$, où H est un groupe tel que le p-Sylow de $H/[H,H]$ soit cyclique et non-trivial.

8 Exemples de foncteurs simples

L'exemple des foncteurs $S_{H,k}$, lorsque H est un b-groupe et k un corps de caractéristique 0 montre que les foncteurs simples ont une structure assez complexe: que-dire en effet du nombre de classes de conjugaison de sous-groupes K d'un groupe G pour lesquels $\beta(K) = H$? Que dire de $S_{H,k}$ lorsque H n'est pas un b-groupe, où lorsque k est un corps de caractéristique $p > 0$?

Tout d'abord une remarque, valable dans le cas général: j'ai vu que si $S_{X,V}$ est un objet simple de $Fonct_A(\mathcal{C})$, et si Y est un objet de $\mathcal{C}$, alors

$$S_{X,V}(Y) = \mathcal{H}om(X,Y) \otimes_{\mathcal{E}nd(X)} V / \{\sum_i \phi_i \otimes v_i \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(Y,X),\ \sum_i (\psi\phi_i)v_i = 0\}$$

Mais si $v \in V - \{0\}$, comme V est un $\mathcal{E}nd(X)$-module simple, alors $V = \mathcal{E}nd(X)v$. Alors l'application de $\mathcal{H}om(X,Y)$ dans $S_{X,V}(Y)$ qui à ϕ associe l'image de $\phi \otimes v$ est surjective. Son noyau est l'ensemble des ϕ tels que pour tout $\psi \in \mathcal{H}om(Y,X)$, le produit $\psi\phi$ annule v. Donc, j'ai aussi

$$S_{X,V}(Y) = \mathcal{H}om(X,Y)/\{\phi \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(Y,X),\ (\psi\phi)v = 0\}$$

formule un peu plus simple, mais moins canonique.

8.1 Le cas des foncteurs de Mackey globaux

C'est le cas où les foncteurs simples sont vraiment simples... Ici, l'anneau A est un corps k quelconque, et la catégorie considéré est la catégorie $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$, lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont réduites au groupe trivial. Les objets de $\mathcal{D}$ sont donc les groupes finis, et si H et G sont deux groupes finis, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H,G)$ est le produit tensoriel par k du groupe de Grothendieck des G-ensembles-H qui sont libres à gauche et à droite.

Alors un objet de $Fonct_k(\mathcal{D})$ n'est autre que ce que Webb appelait un foncteur de Mackey global (cf. [WE1]): il ne tient compte que de l'induction, la restriction, et du transport par isomorphisme.

Soit H un groupe fini, et V un $kExt(H)$ module simple. Je vais montrer comment l'expression ci-dessus permet de retrouver celle donnée par Webb dans [WE1].

Si G est un groupe fini, j'ai

$$S_{H,V}(G) = \mathcal{H}om(H,G)/\{\phi \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(G,H),\ (\psi\phi)v = 0\}$$

D'autre part, le module V est annulé par tous les H-ensembles-H qui factorisent par un groupe d'ordre strictement inférieur à celui de H. Alors si $\phi = G \times H/L \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(H,G)$, je dois avoir $k_1(L) = k_2(L) = (1)$ si ϕ est libre à gauche et à droite. Et si l'image $\overline{\phi}$ de ϕ dans $S_{H,V}(G)$ est non-nulle, alors ϕ ne factorise pas par un groupe d'ordre strictement plus petit que celui de H, ce qui impose $q(L) = H$. Alors il existe un morphisme injectif f de H dans K tel que $L = \Delta_f(H)$.

Soit alors $\lambda = \sum_f \lambda_f G \times H/\Delta_f(H)$ un élément de $\mathcal{H}om(H,G)$. L'image de λ dans $S_{H.V}(G)$ est nulle si et seulement si pour tout $\psi \in \mathcal{H}om(H,G)$

$$\sum_f \lambda_f(\psi \times_G (G \times H/\Delta_f(H))).v = 0 \qquad (Z_\psi)$$

Il suffit de considérer les conditions (Z_ψ) lorsque ψ est de la forme $H \times G/M$, et ne factorise pas par un groupe d'ordre strictement plus petit que celui de H, donc lorsque M est de la forme $\Delta_g(H)^*$, pour une injection g de H dans G.

Par la formule de Mackey, la condition (Z_ψ) s'écrit alors

$$\sum_{\substack{f \\ z \in g(H)\backslash G/f(H)}} \lambda_f H \times H/\{(h, g(h))\} *^{(z,1)} \{(f(h), h)\}.v = 0$$

ou encore

$$\sum_{\substack{f \\ z \in g(H)\backslash G/f(H)}} \lambda_f H \times H/\{(g^{-1}(c), f^{-1}(c^z)) \mid c \in g(H) \cap^z f(H)\}.v = 0$$

Les seuls termes non-nuls de cette somme sont ceux pour lesquels $g(H) =^z f(H)$, car les autres H-ensembles-H qui y figurent annulent V. Les conditions (Z_ψ) se décomposent donc en une série de conditions indépendantes suivant la classe de conjugaison dans G de $g(H)$.

De plus si $g(H) =^z f(H)$, le groupe $\Delta_f(H)$ est conjugué dans $G \times H$ d'un groupe $\Delta_{f'}(H)$, où f' est un isomorphisme de H sur $g(H)$, donc de la forme $f' = g\theta$, où θ est un automorphisme de H. Finalement, les conditions (Z_ψ) se résument à

$$\sum_{z \in N_G(g(H))/g(H)} \lambda_{g\theta} H \times H/\{(g^{-1}(c), \theta^{-1}g^{-1}(c^z)) \mid c \in g(H)\}.v = 0$$

Or si $z \in N_G(g(H))$, soit g_z l'automorphisme de H défini par $g_z(H) = g^{-1}({}^z g(h))$. L'équation ci-dessus s'écrit encore

$$\sum_{z \in N_G(g(H))/g(H)} \lambda_{g\theta} H \times H/\{(g_z(h), \theta^{-1}(h)) \mid h \in H\}.v = 0$$

Or

$$H \times H/\{(g_z(h), \theta^{-1}(h)) \mid h \in H\} = (H \times H/\Delta_{g_z}(H)) \times_H (H \times H/\Delta_\theta(H))$$

et $H \times H/\Delta_\theta(H).v = \theta.v$. La condition s'écrit donc

$$Tr_{(1)}^{N_G(g(H))/g(H)}(\sum_\theta \lambda_{g\theta}\theta.v) = 0$$

où je fais agir $z \in N_G(g(H))/g(H)$ sur V par l'automorphisme g_z.

Alors l'application de $\mathcal{H}om(H, G)$ dans $W = (\oplus_K Tr_1^{N_G(K)/K}(V))^G$, où la somme porte sur les sous-groupes de G isomorphes à H, qui envoie $G \times H/\Delta_f(H)$ sur $Tr_{(1)}^{N_G(f(H))/f(H)}(v)$ passe au quotient et induit un isomorphisme entre $S_{H,V}(G)$ et W. D'où

Proposition 15: Si $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{(1),(1)}$, si H est un groupe, et V un $kExt(H)$ module simple, alors

$$S_{H,V}(G) = \bigoplus_{[K]} Tr_{(1)}^{N_G(K)/K}(V)$$

la somme portant sur les classes de conjugaison de sous-groupes de G isomorphes à H.

8.2 Les foncteurs $S_{H,k}$

Ici, je considère la catégorie $\mathcal{C}$ toute entière, et je suppose que l'anneau A est un corps k. Si H est un groupe fini, si k est le $kExt(H)$ module trivial, et si G est un groupe fini, alors $S_{H,k}(G)$ est donné comme précédemment par

$$S_{H,k}(G) = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(H, G)/\{\phi \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(G, H),\ \psi\phi.1 = 0\}$$

La dimension de $S_{H,k}(G)$ est donc le rang sur k de la forme bilinéaire sur $\mathcal{H}om(H, G)$ qui à f et g associe

$$< f, g >_G = g^*.f.1 \in k$$

Si $f = G \times H/L$ factorise par un groupe H d'ordre strictement plus petit que l'ordre de H, alors f est dans le noyau de cette forme. Il reste donc à considérer les sous-groupes L de la forme $\Delta_s(K)^*$, où K est un sous-groupe de G et s une surjection de K dans H. Si t est une autre surjection de K dans H, telle que Ker s = Ker t, alors il existe un auomorphisme θ de H tel que $t = \theta s$, et

$$G \times H/\Delta_t(K)^* = (G \times H)/\Delta_s(K)^*) \times_H (H \times H/\Delta_\theta(H)^*)$$

de sorte que pour tout $\phi \in \mathcal{H}om(H, G)$

$$< \phi, G \times H/\Delta_t(K)^* >_G = < \phi, G \times H/\Delta_s(K)^* >_G$$

et la différence

$$G \times H/\Delta_t(K)^* - G \times H/\Delta_s(K)^*$$

est dans le noyau de $< \, , \, >_G$.
D'autre part, si L est un sous-groupe de G et t une surjection de L dans H, alors

$$(H \times_G /\Delta_s(K)) \times_G (G \times H/\Delta_t(L)^*) = \sum_{x \in K\backslash G/L} H \times H/\{(s(g), t(g^x)) \mid g \in K \cap^x L\}$$

Les termes de cette somme qui n'annulent pas le $kExt(H)$ module k sont ceux pour lesquel le groupe $\{(s(g), t(g^x)) \mid g \in K \cap^x L\}$ est de la forme $\Delta_\theta(H)$, pour un automorphisme θ convenable de H. L'existence de θ équivaut aux conditions suivantes:

$$s(K \cap^x L) = t(K^x \cap L) = H \text{ et } \mathrm{Ker}\ s \cap^x L = K \cap^x \mathrm{Ker}\ t$$

ou encore $(K, \mathrm{Ker}\ s) — ({}^xL, {}^x\mathrm{Ker}\ t)$. Alors

$$< G \times H/\Delta_t(L)^*, G \times H/\Delta_s(K)^* >_G = |\{x \in K\backslash G/L \mid (K, \mathrm{Ker}\ s) — ({}^xL, {}^x\mathrm{Ker}\ t)\}|$$

Alors, soit $b_H(G)$ l'espace ayant pour base les classes de conjugaison par G de couples (K, N) tels que K/N soit isomorphe à H. La dimension de $S_{H,k}(G)$ est le rang de la forme bilinéaire sur $b_H(G)$ à valeurs dans k définie par

$$< (K, N), (L, M) >_G = |\{x \in K\backslash G/L \mid (K, N) — ({}^xL, {}^xM)\}|$$

Dans le cas où $H = (1)$, l'espace $b_H(G)$ s'identifie à l'anneau de Burnside de G, et la forme ci-dessus est la même que celle utilisée plus haut, puisque deux couples (K, K) et (H, H) sont toujours liés.

Proposition 16: Soient H et G des groupes finis. Soit $b_H(G)$ l'espace vectoriel sur k ayant pour base les classes de conjugaison par G de couples (K, N) tels que K/N soit isomorphe à H. Alors la dimension de $S_{H,k}(G)$ est le rang de la forme bilinéaire sur $b_H(G)$ à valeurs dans k définie par

$$< (K, N), (L, M) >_G = |\{x \in K\backslash G/L \mid (K, N) — ({}^xL, {}^xM)\}|$$

Corollaire: Si H est un b-groupe, et k de caractéristique 0, ce rang est le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes K de G tels que $\beta(K) = H$.

8.3 Certains foncteurs simples en caractéristique 0

Je supposerai ici également que la catégorie considérée est la catégorie $\mathcal{C}$ toute entière, et de plus que l'anneau A est un corps k de caractéristique 0.

Dans ces conditions, une première décomposition d'un objet M de $Fonct_k(\mathcal{C})$ est donnée par la proposition 7, qui permet de se ramener à l'étude des modules $\tilde{e_G^G}M(G)$. Dans le cas où M est un foncteur simple $S_{H,V}$, si H est un groupe fini et V un $KExt(H)$ module simple, je peux écrire

$$\tilde{e_G^G}S_{H,V}(G) = \tilde{e_G^G}\mathcal{H}om(H,G)/\tilde{e_G^G}\mathcal{H}om(H,G) \cap J_{H,v}(G)$$

où j'ai posé, pour un vecteur v non-nul de V

$$J_{H,v}(G) = \{\phi \in \mathcal{H}om(H,G) \mid \forall \psi \in \mathcal{H}om(G,H), (\psi\phi)v = 0\}$$

Or $J_{H,v}(G)$ contient tous les ϕ qui factorisent par un groupe d'ordre strictement plus petit que celui de H. Le module $\tilde{e_G^G}S_{H,V}(G)$ est donc engendré par l'image des éléments $\tilde{e_G^G} \times_G (G \times H/\Delta_s(G_1)^*)$, où G_1 est un sous-groupe de G et s une surjection de G_1 dans H. Or un tel élément est nul si $G_1 \neq G$ (cf. lemme 15). Donc:

Proposition 17: Si H n'est pas un quotient de G, alors

$$\tilde{e_G^G}S_{H,V}(G) = 0$$

Si s est une surjection de G dans H, je pose

$$Y_s = \tilde{e_G^G} \times_G (G \times H/\Delta_s(G)^*)$$

Alors l'élément $\sum_s \lambda_s Y_s$ de $\tilde{e_G^G}\mathcal{H}om(H,G)$ est dans $J_{H,v}(G)$ si et seulement si pour tout $\psi \in \mathcal{H}om(G,H)$

$$\sum_s \lambda_s(\psi Y_s)v = 0 \qquad (Z_\psi)$$

La condition (Z_ψ) est vide si ψ factorise par un groupe d'ordre strictement plus petit que celui de H, et je me ramène au cas où ψ est de la forme $H \times G/\Delta_t(G_1)$, pour un sous-groupe G_1 de G et une surjection t de G dans H. Mais comme

$$(H \times G/\Delta_t(G_1)) \times_G Y_s = (H \times G/\Delta_t(G_1)) \times_G \tilde{e_G^G} \times_G (G \times H/\Delta_s(G)^*)$$

est nul si $G_1 \neq G$, les conditions (Z_ψ) sont équivalentes à l'ensemble des conditions $(Z_{Y_t^*})$, où t décrit les surjections de G dans H. Or $\tilde{e_G^G}$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $G \times G/X$, pour X sous-groupe de G, et

$$(H \times G/\Delta_t(G)) \times_G (G \times G/X) \times_G (G \times H/\Delta_s(G)^*) = H \times H/\{(t(x), s(x)) \mid x \in X\}$$

De plus $H \times H/\{(t(x), s(x)) \mid x \in X\}$ annule $v \in V$ sauf s'il existe un automorphisme θ de H tel que

$$\{(t(x), s(x)) \mid x \in X\} = \Delta_\theta(H)$$

ce qui équivaut aux conditions suivantes

$$X\mathrm{Ker}\ t = X\mathrm{Ker}\ s = G,\ X \cap \mathrm{Ker}\ t = X \cap \mathrm{Ker}\ s \qquad (1)$$

La condition $(Z_{Y_t^*})$ peut donc aussi s'écrire

$$\sum_{s,X} \lambda_s |X| \tilde{\chi}]X, G[H \times H/\{(t(x), s(x)) \mid x \in X\}.v = 0$$

où la somme en X porte sur les sous-groupes de G vérifiant les conditions (1). Ces conditions sont invariantes par remplacement de X par $X(\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s)$, ainsi que le sous-groupe $\{(t(x), s(x)) \mid x \in X\}$ de $H \times H$, et je peux regrouper les termes en X pour lesquels $X(\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s)$ est un sous-groupe U donné de G, tel que

$$U\mathrm{Ker}\ t = U\mathrm{Ker}\ s = G,\ U \cap \mathrm{Ker}\ t = U \cap \mathrm{Ker}\ s = \mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s \qquad (2)$$

Finalement, la condition $(Z_{Y_t^*})$ devient

$$\sum_{s,U} m_{G, Ker\ t \cap Ker\ s} \lambda_s |U| \tilde{\chi}]U, G[H \times H/\{(t(x), s(x)) \mid x \in U\}.v = 0$$

où la somme en U porte sur les sous-groupes de G vérifiant les conditions (2). Alors $|U| = |G||\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s|/|\mathrm{Ker}\ s| = |H||\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s|$. De plus $]U, G[$ s'identifie à $]\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ t, \mathrm{Ker}\ t[^U$, donc aussi à

$$]\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s, \mathrm{Ker}\ t[^{U Ker\ s} =]\mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s, \mathrm{Ker}\ t[^G =](1), s(\mathrm{Ker}\ t)[^H$$

puisque $[\mathrm{Ker}\ t, \mathrm{Ker}\ s] \subseteq \mathrm{Ker}\ t \cap \mathrm{Ker}\ s \subseteq U$.

Un sous-groupe U vérifiant les conditions (2) donne un automorphisme θ de H tel que $\Delta_\theta(H) \subseteq (t \times s)(G)$, où je note $t \times s$ l'application $g \mapsto (t(g), s(g))$ de G dans $H \times H$. Inversement, si un tel automorphisme θ est donné, et si je pose

$$U = \{x \in G \mid (t(x), s(x)) \in \Delta_\theta(H)\}$$

j'obtiens un sous-groupe U de G vérifiant les conditions (2). Cette correspondance est bijective, et la condition $(Z_{Y_t^*})$ devient

$$\sum_s \lambda_s m_{G, \mathrm{Ker}\ (t \times s)} |\mathrm{Ker}\ (t \times s)| \tilde{\chi}](1), s(\mathrm{Ker}\ t)[^H \sum_{\substack{\theta \\ \Delta_\theta \subseteq (t \times s)(G)}} \theta.v = 0 \qquad (C_t)$$

Si θ et θ' sont deux automorphismes de H tels que

$$\Delta_\theta(H) \subseteq (t\times s)(G),\ \Delta_{\theta'}(H) \subseteq (t\times s)(G)$$

alors, pour tout $h\in H$, si x (resp. x') est un élément de G tel que $s(x)=h$ et $\theta(h)=t(x)$ (resp. $s(x')=h$ et $\theta(h)=t(x')$), j'ai $x'x^{-1}\in \mathrm{Ker}\ s$, et $\theta'(h)\theta(h)^{-1}\in t(\mathrm{Ker}\ s)$, donc

$$(\theta^{-1}\theta')(h)h^{-1}\in\theta^{-1}(t(\mathrm{Ker}\ s)) = s(\mathrm{Ker}\ t)$$

et θ' peut s'écrire $\theta'=\theta\alpha$, où α est dans le sous-groupe $Aut_{s(Ker\ t)}(H)$ des automorphismes de H qui stabilisent le sous-groupe normal $s(\mathrm{Ker}\ t)$ de H et induisent un automorphisme trivial sur le quotient $H/s(\mathrm{Ker}\ t)$.

Inversement, si $\Delta_\theta(H)\subseteq(t\times s)(G)$, et si $\alpha\in Aut_{s(Ker\ t)}(H)$, alors $\Delta_{\theta\alpha}(H)\subseteq (t\times s)(G)$. Les automorphismes θ intervenant dans le terme en s de la condition C_t forment donc une seule classe à gauche modulo $Aut_{s(Ker\ t)}(H)$.

Remarques: 1) La condition (C_t) ne dépend en fait que de Ker t: en effet, si α est un automorphisme de H, alors la condition $(C_{\alpha t})$ s'obtient en multipliant la condition (C_t) à gauche par α.
2) Si la condition (C_t) est non-vide, alors il existe une surjection s de G dans H et un automorphisme ϕ de H tels que

$$m_{G,Ker\ (s\times t)}\neq 0,\ \ \tilde{\chi}](1),s(\mathrm{Ker}\ t)[^H\neq 0,\ \ \Delta_\phi(H)\subseteq(s\times t)(G)$$

Dans ces conditions, le groupe $(1)\times s(\mathrm{Ker}\ t)$ admet pour complément le groupe $\Delta_\phi(H)$ dans $(s\times t)(G)$. En notant N le sous-groupe normal $s(\mathrm{Ker}\ t)$ de H, il en résulte que $(s\times t)(G)$ est isomorphe au produit semi-direct $N\rtimes H$. Comme de plus $\tilde{\chi}](1),s(\mathrm{Ker}\ t)[^H\neq 0$, le groupe N est produit direct de sous-groupes distingués minimaux de H. Enfin, comme $m_{G,Ker\ (s\times t)}\neq 0$, j'ai $\beta(G)=\beta((s\times t)(G))$. La proposition 17 peut donc être précisée:

Proposition 18: Si $\tilde{e}_G^G S_{H,V}(G)\neq 0$, alors il existe un sous-groupe normal N de H, produit direct de sous-groupes normaux minimaux, tel que le groupe $N\rtimes H$ soit un quotient de G et que $\beta(G)=\beta(N\rtimes H)$.

3) Si H est un b-groupe, ce dernier résultat se simplifie encore: en effet, si N et M sont deux sous-groupes normaux de G tels que les quotients G/N et G/M soient isomorphes à H, je sais par le lemme 16 que

$$m_{G,N}=\frac{1}{|G|}\sum_{\substack{YN=YM=G\\ Y\cap N=Y\cap M}}|Y|\tilde{\chi}]Y,G[$$

et j'ai déjà calculé cette expression avant le lemme 18, sous la forme

$$m_{G,N}=\frac{m_{G,M\cap N}|M\cap N|}{|G|}\tilde{\chi}]M\cap N,N[^G|K_{G/M\cap N}(M/M\cap N)\cap K_{G/M\cap N}(N/M\cap N)|$$

Alors, si s et t sont des surjections de G dans H, si $M = \text{Ker } s$ et $N = \text{Ker } t$, il est facile de voir que les compléments communs de $M/M \cap N$ et $N/M \cap N$ dans $G/M \cap N$ sont en bijection avec les automorphismes ϕ de H tels que $\Delta_\phi(H) \subseteq (s \times t)(G)$. En notant $k_{s,t}$ le nombre de tels automorphismes, l'expression ci-dessus devient

$$m_{G,Ker\ t} = \frac{m_{G,Ker\ (s\times t)}|\text{Ker } (s \times t)|}{|G|}\tilde{\chi}](1), s(\text{Ker } t)[^H k_{s,t}$$

Alors si la condition (C_t) est non-vide, il existe une surjection s de G dans H telle que cette expression soit non-nulle. Alors $m_{G,Ker\ t} \neq 0$, et le quotient $G/\text{Ker } t$ est un b-groupe (isomorphe à H). Il en résulte que $\beta(G) = H$. Donc

Proposition 19: Si H est un b-groupe et si $\tilde{e}_G^G S_{H,V} \neq 0$, alors $\beta(G) = H$.

De plus, dans ces conditions, la condition (C_t) peut s'écrire

$$\sum_s \lambda_s VM_{\Delta_\phi(H)\subseteq(s\times t)(G)}(\phi.v) = 0$$

en notant $VM_{\Delta_\phi(H)\subseteq(s\times t)(G)}(\phi.v)$ la valeur moyenne des $\phi.v$

$$VM_{\Delta_\phi(H)\subseteq(s\times t)(G)}(\phi.v) = \frac{1}{k_{s,t}} \sum_{\Delta_\phi(H)\subseteq(s\times t)(G)} \phi.v$$

En particulier, si V est le module trivial, alors cette condition se résume à $\sum_s \lambda_s = 0$. Il en résulte que $\tilde{e}_G^G S_{H,k}(G)$ est de dimension 1 si $\beta(G) = H$, et nul sinon: c'est essentiellement ce qu'affirme la proposition 11.

4) Je dirai qu'un $kExt(H)$-module V est *primitif* si pour tout sous-groupe normal non-trivial N de H, j'ai $V^{Aut_N(H)} = 0$. Cette définition est une extension de la définition de caractère primitif modulo un entier n: un caractère primitif modulo n définit en effet à ce sens un $\mathbf{C}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$-module primitif.

Il résulte des remarques ci-dessus que si V est un $kExt(H)$-module primitif, alors la somme $\sum_{\Delta_\phi(H)} \phi.v$ est nulle sauf si le groupe $s(\text{Ker } t)$ est trivial, i.e. si $\text{Ker } s = \text{Ker } t$. La condition (C_t) devient alors

$$m_{G,Ker\ t}|\text{Ker } t| \sum_{\text{Ker } s=\text{Ker } t} \lambda_s \phi_{s,t}.v = 0$$

en notant $\phi_{s,t}$ l'automorphisme de H tel que $\phi_{s,t}t = s$. En particulier, si cette condition est non-vide, alors $m_{G,Ker\ t} \neq 0$, donc $\beta(G) = \beta(H)$. La condition (C_t) se réduit alors à

$$\sum_{\phi\in Aut(H)} \lambda_{\phi t}\phi.v = 0$$

Soit alors W une somme directe de copies de V, indexée par les sous-groupes normaux N de G tels que G/N soit isomorphe à H. Si N est un tel sous-groupe normal, je choisis une surjection t_N de noyau N de G dans H. Si s est une surjection quelconque de G dans H, je note ψ_s l'automorphisme de H défini par $\psi_s t_{Ker\ s} = s$. Alors l'application de $e_G^{\tilde{G}}\mathcal{H}om(H,G)$ dans W qui à Y_s associe le vecteur $\psi_s.v$ de la composante correspondant à $N = \mathrm{Ker}\ s$ de W passe au quotient et induit un isomorphisme de $e_G^{\tilde{G}}S_{H,V}(G)$ sur W. Compte tenu de la proposition 7, il vient alors

Proposition 20: Si V est un $kExt(H)$-module primitif, alors

$$S_{H,V}(G) = \oplus_{(K,N)} V^{N_G(K,N)/K}$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison par G de couples (K,N) formés d'un sous-groupe K de G et d'un sous-groupe normal N de K tels que $K/N = H$ et $\beta(K) = \beta(H)$.

Corollaire: Si H est un groupe cyclique d'ordre n, et ζ un caractère primitif modulo n, alors la dimension de $S_{H,V}(G)$ est le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques K d'ordre multiple de n, pour lesquels l'image naturelle de $N_G(K)/K$ dans $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ est contenue dans le noyau de ζ.

9 L'algèbre $e_G^{\tilde{G}}\mathcal{E}nd(G)e_G^{\tilde{G}}$

Je considère ici à nouveau la catégorie $\mathcal{C}$ toute entière, et je suppose que l'anneau A est un corps k de caractéristique 0. Si G est un groupe fini, je pose

$$\mathcal{E}(G) = e_G^{\tilde{G}}\mathcal{E}nd(G)e_G^{\tilde{G}}$$

C'est l'algèbre d'endomorphisme du foncteur $L_{G,\mathcal{E}nd(G)e_G^{\tilde{G}}}$, qui contient toutes les enveloppes projectives des foncteurs $S_{G,V}$ correspondants aux $kExt(G)$-modules simples V.

9.1 Une base naturelle

L'algèbre $\mathcal{E}(G)$ est engendrée sur k par les éléments de la forme

$$Y_L = e_G^{\tilde{G}} \times_G (G \times G/L) \times_G e_G^{\tilde{G}}$$

où L décrit les sous-groupes de $G \times G$. Par le lemme 15, un tel élément est nul, sauf si $p_1(L) = p_2(L) = G$: je dirai dans ces conditions que le sous-groupe L est un sous-groupe *saturant* de $G \times G$.

Si L est un sous-groupe saturant, je peux encore écrire

$$Y_L = \frac{1}{|G|^2} \sum_{X,Y \subseteq G} |X||Y|\tilde{\chi}]X, G[\tilde{\chi}]Y, G[\ G \times G/\Delta(X) * L * \Delta(Y)$$

et de plus

$$\Delta(X) * L * \Delta(Y) = (X \times Y) \cap L$$

Donc le plus grand sous-groupe M de $G \times G$ tel que $G \times G/M$ apparaisse dans la décomposition de Y_L est le groupe L, et le coefficient de $G \times G/L$ dans Y_L est obtenu pour $X = Y = G$. Il est donc égal à 1. Ceci prouve la

Proposition 21: Les éléments Y_L, lorsque L décrit l'ensemble des sous-groupes saturants de $G \times G$ modulo conjugaison par $G \times G$, forment une base de $\mathcal{E}(G)$ sur k.

Un sous-groupe saturant L de $G \times G$ est défini par les sous-groupes normaux $N_1 = k_1(L)$ et $N_2 = k_2(L)$ de G, et par un isomorphisme θ de G/N_2 sur G/N_1:

$$L_{N_1,N_2,\theta} = \{(a,b) \in G \times G \mid aN_1 = \theta(bN_2)\}$$

Les sous-groupes $L_{N_1,N_2,\theta}$ et $L_{N_1',N_2',\theta'}$ sont conjugués dans $G \times G$ si et seulement si il existe x et y dans G tels que

$$aN_1 = \theta(bN_2) \Leftrightarrow a^x N_1' = \theta'(b^y N_2')$$

En particulier le cas $b = 1$ entraîne que $N_1 = N_1'$. De même, j'ai $N_2 = N_2'$, et alors la condition ci-dessus devient

$$\theta(bN_2)^x = \theta'((bN_2)^y)$$

et θ et θ' ne diffèrent que par un automorphisme intérieur de G/N_1.

Corollaire: La dimension de $\mathcal{E}(G)$ sur k est égale à

$$\dim_k \mathcal{E}(G) = \sum_{H|G} |Ext(H)||n(G,H)|^2$$

où la somme porte sur les quotients deux à deux non-isomorphes de G, et $n(G,H)$ désigne le nombre de sous-groupes normaux N de G tels que G/N soit isomorphe à H.

9.2 Multiplication

Il est possible d'expliciter les formules de calcul de la multiplication dans la base Y_L: soient L et M des sous-groupes saturants de $G \times G$. Alors:

$$Y_L.Y_M = \tilde{e_G^G} \times_G (G \times G/L \times_G \tilde{e_G^G} \times_G G \times G/M) \times_G \tilde{e_G^G}$$

De plus

$$G \times G/L \times_G \tilde{e_G^G} \times_G G \times G/M = \frac{1}{|G|} \sum_{X \subseteq G} |X| \tilde{\chi}]X, G[G \times G/L * \Delta(X) * M$$

Il en résulte, par multiplication à gauche et à droite par $\tilde{e}_G^G$, que

$$Y_L.Y_M = \frac{1}{|G|} \sum_{X\in\delta(L,M)} |X|\tilde{\chi}]X, G[Y_{L*\Delta(X)*M}$$

en notant $\delta(L, M)$ l'ensemble des sous-groupes X de $G\times G$ tels que $L*\Delta(X)*M$ soit un sous-groupe saturant de $G \times G$.

Or

$$L * \Delta(X) * M = \{(a, b) \in G \times G \mid \exists x \in X,\ (a, x) \in L,\ (x, b) \in M\}$$

Alors si $L * \Delta(X) * M$ est saturant, pour tout élément a de G, il existe $x \in X$ tel que $(a, x) \in L$. Inversement, si cette condition est réalisée, alors pour tout $a \in G$, il existe $x \in X$ tel que $(a, x) \in L$. Mais comme M est saturant, il existe $b \in G$ tel que $(x, b) \in M$. Alors $(a, b) \in L * \Delta(X) * M$, et la première projection de $L * \Delta(X) * M$ est égale à G.

Donc le groupe $L*\Delta(X)*M$ est saturant si et seulement si, pour tout $a \in G$, il existe $x \in X$ tel que $(a, x) \in L$, et si pour tout $b \in G$, il existe $x \in X$ tel que $(x, b) \in M$.

Si ces conditions sont remplies, et si $b \in G$, alors il existe a tel que $(a, b) \in L$, car L est saturant. Mais alors il existe x tel que $(a, x) \in L$. Alors $x^{-1}.b \in k_2(L)$, ce qui prouve que $G = Xk_2(L)$. De même, j'ai $G = Xk_1(M)$.

Inversement, si $Xk_2(L) = Xk_1(M) = G$, et si $a \in A$, il existe $b \in G$ tel que $(a, b) \in L$, car L est saturant. Alors b peut s'écrire $b = xn$, pour $x \in X$ et $n \in k_2(L)$. Alors $(1, n) \in L$, et $(a, x) = (a, b)(1, n)^{-1} \in L$. Donc

$$X \in \delta(L, M) \Leftrightarrow Xk_2(L) = Xk_1(M) = G$$

Or le groupe $L*\Delta(X)*M$ ne change pas si je remplace X par $X(k_2(L)\cap k_1(M))$. En regroupant les termes X pour lesquels $X(k_2(L)\cap k_1(M)$ est un sous-groupe Z donné de G, et en notant $\pi(L, M)$ l'ensemble des sous-groupe Z de G contenant $k_2(L) \cap k_1(M)$, et tels que $Zk_2(L) = Zk_1(M) = G$, il vient

$$Y_L.Y_M = \frac{m_{G,k_2(L)\cap k_1(M)}}{|G|} \sum_{Z\in\pi(L,M)} |Z|\tilde{\chi}]Z, G[Y_{L*\Delta(Z)*M}$$

Soit alors $\sigma(L, M)$ l'ensemble des sous-groupes saturants de $G \times G$ contenant $k_1(L) \times k_2(M)$ et contenus dans $L * M$. Il est clair que si $Z \in \pi(L, M)$, alors $f(Z) = L * \Delta(Z) * M \in \sigma(L, M)$. Inversement, si $P \in \sigma(L, M)$, je pose

$$f'(P) = \{z \in G \mid \exists(a, b) \in P,\ (a, z) \in L,\ (z, b) \in M\}$$

Alors $f'(P)$ est un sous-groupe de G. Si $z \in k_2(L)\cap k_1(M)$, alors $z \in f'(P)$ (c'est le cas $a = b = 1$ de la définition). Comme P est un sous-groupe saturant, pour tout $a \in G$, il existe $b \in G$ tel que $(a, b) \in P$. Et comme $P \subseteq L * M$, il existe

$g \in G$ tel que $(a,g) \in L$ et $(g,b) \in M$. Alors $g \in f'(P)$, et $(a,b) \in L * f'(P) * M$. Donc le groupe $L * f'(P) * M$ est saturant, ce qui prouve que $f'(P) \in \pi(L,M)$.

Alors

$$ff'(P) = \{(a,b) \mid \exists z \in f'(P),\ (a,z) \in L,\ (z,b) \in M\}$$

$$= \{(a,b) \mid \exists z \in G,\ \exists (a',b') \in P,\ (a,z) \in L,\ (z,b) \in M,\ (a',z) \in L,\ (z,b') \in M\}$$

Alors si $(a,b) \in ff'(P)$, j'ai $a^{-1}a' \in k_1(L)$ et $b^{-1}b' \in k_2(M)$, donc $(a,b) \in (k_1(L) \times k_2(M))P = P$, ce qui prouve que $ff'(P) \subseteq P$. Mais si $(a,b) \in P \subseteq L*M$, alors il existe $z \in G$ tel que $(a,z) \in L$ et $(z,b) \in M$. Alors $z \in f'(P)$, et $(a,b) \in L * \Delta(f'(P)) * M = ff'(P)$. Donc $ff'(P) = P$.

Inversement, si $Z \in \pi(L,M)$, alors

$$f'f(Z) = \{x \mid \exists (a,b) \in L * \Delta(Z) * M,\ (a,x) \in L,\ (x,b) \in M\}$$

$$f'f(Z) = \{x \mid \exists z \in Z, \exists (a,b),\ (a,x) \in L,\ (x,b) \in M,\ (a,z) \in L,\ (z,b) \in M\}$$

Alors si $x \in f'f(Z)$, j'ai $z^{-1}x \in k_2(L) \cap k_1(M) \subseteq Z$, donc $x \in Z$, et $f'f(Z) \subseteq Z$. Et si $z \in Z$, alors il existe (a,b) tel que $(a,z) \in L$ et $(z,b) \in M$. Alors $(a,b) \in f(Z)$, et $z \in f'f(Z)$. Donc $f'f(Z) = Z$.

Alors f et f' sont des bijections inverses l'une de l'autre entre $\pi(L,M)$ et $\sigma(L,M)$. Comme f et f' sont croissantes pour l'inclusion, il en résulte que $\pi(L,M)$ et $\sigma(L,M)$ sont des ensembles ordonnés isomorphes. En particulier, si $Z \in \pi(L,M)$, alors $\tilde{\chi}]Z,G[= \tilde{\chi}]f(Z), L*M[$.

Comme de plus $|f(Z)| = |Z||k_1(L)||k_2(M)|$, j'ai

$$\frac{|f(Z)|}{|L*M|} = \frac{|Z|}{|G|}$$

et en réecrivant la formule du produit, j'obtiens la

Proposition 22: Si L et M sont des sous-groupes saturants de $G \times G$, alors

$$Y_L.Y_M = \frac{m_{G,k_2(L)\cap k_1(M)}}{|L*M|} \sum_{P \in \sigma(L,M)} |P| \tilde{\chi}]P, L*M[\ Y_P$$

où $\sigma(L,M)$ désigne l'ensemble des sous-groupes saturants de $G \times G$ contenus dans $L*M$ et contenant $k_1(L) \times k_2(M)$.

Corollaire: Si L est un sous-groupe saturant de $G \times G$, alors

$$Y_L.Y_{G\times G} = m_{G,k_2(L)} Y_{G\times G} = m_{G,k_1(L)} Y_{G\times G} = Y_{G\times G}.Y_L$$

L'application $Y_L \mapsto m_{G,k_2(L)} = m_{G,k_1(L)}$ définit donc un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{E}(G)$ dans k, et $kY_{G\times G}$ est un idéal central de $\mathcal{E}(G)$, de carré nul si G n'est pas cyclique.

En effet, si $M = G \times G$, alors $k_1(M) = k_2(M) = G$, et $\sigma(L,M) = \{G \times G\}$. Le corollaire résulte alors du corollaire du lemme 18, du fait que $G/k_1(L)$ et $G/k_2(L)$

sont isomorphes, et du fait que $m_{G,G}$ est nul si G n'est pas cyclique.
Remarque: Tous les groupes P tels que Y_P intervienne dans la décomposition de $Y_L.Y_M$ sont tels que $q(P)$ est un quotient commun de $q(L)$ et $q(M)$, et admet pour quotient $q(L*M)$.

9.3 Semi-simplicité

Le résultat précédent indique que si G n'est pas cyclique, alors $\mathcal{E}(G)$ n'est pas semi-simple. Inversement, si G est cyclique d'ordre n, et si L est un sous-groupe saturant de $G\times G$, alors L est caractérisé par un diviseur d de n, et par un automorphisme (extérieur) de $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, i.e. un élément u de $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$: le groupe $L_{d,u}$ associé au couple (d,u) est l'ensemble des couples $(a,b)\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$ tels que $a-ub\in d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Je noterai $Y_{d,u}$ l'élément $Y_{L_{d,u}}$.

Pour calculer le produit de deux tels éléments $Y_{d,u}$ et $Y_{e,v}$, je dois (par exemple) trouver l'ensemble $\pi(L_{d,u},L_{e,v})$: c'est l'ensemble des sous-groupes X de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tels que $X\supseteq d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\cap e\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $X.d\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}=X.e\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Un tel X est de la forme $f\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pour un diviseur f convenable de n, et les conditions précédentes signifient que f est premier à d et à e, et que f divise le ppcm $d\vee e$ de d et e. Alors $f=1$, et $X=\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Autrement dit, l'ensemble $\pi(L_{d,u},L_{e,v})$ est réduit à $\{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\}$, donc l'ensemble $\sigma(L_{d,u},L_{e,v})$ est réduit à $\{L_{d,u}*L_{e,v}\}$. Alors

$$Y_{d,u}.Y_{e,v}=m_{G,k_2(L_{d,u})\cap k_1(L_{e,v})}Y_{L_{d,u}*L_{e,v}}$$

Or

$$L_{d,u}*L_{e,v}=\{(a,b)\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2\mid \exists x,\ a\equiv ux(d),x\equiv vb(e)\}$$

Donc $L_{d,u}*L_{e,v}\subseteq L_{(d,e),uv}$, en notant (d,e) le pgcd de d et e.

Comme v est premier à e, j'ai $(vd,e)=(d,e)$, et il existe des entiers k et l tels que $kvd+le=(d,e)$. Alors si a et b sont tels que $a\equiv uvb((d,e))$, i.e. $uva=b+m(d,e)$, et si $x=ua-mkd$, j'ai $ua\equiv x(d)$ et

$$vx=vua-vmkd=b+m(d,e)-m((d,e)-le)=b+mle\equiv b(e)$$

Donc $L_{d,u}*L_{e,v}=L_{(d,e),uv}$. Comme de plus $k_2(L_{d,u})\cap k_1(L_{e,v})=(d\vee e)\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et comme $m(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z})=\phi(a)/a$, il en résulte que

$$m_{G,k_2(L_{d,u})\cap k_1(L_{e,v})}=\frac{\phi(n)/n}{\phi(d\vee e)/d\vee e}=\frac{\phi(n)d\vee e}{n\phi(d\vee e)}=\frac{\phi(n)de\phi((d,e))}{(d,e)n\phi(d)\phi(e)}$$

Finalement

$$Y_{d,u}.Y_{e,v}=\frac{\phi(n)}{n}\frac{d}{\phi(d)}\frac{e}{\phi(e)}\frac{\phi((d,e))}{(d,e)}Y_{(d,e),uv}$$

En posant $W_{d,u}=\frac{\phi(d)n}{\phi(n)d}Y_{d,u}$, j'ai donc

$$W_{d,u}.W_{e,v}=W_{(d,e),uv}$$

Comme les $W_{d,u}$ forment une base de $\mathcal{E}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, il en résulte le

Corollaire: L'algèbre $\mathcal{E}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est commutative.

Si je pose à présent

$$Z_{d,u} = \sum_{x|d} \mu(d/x) W_{x,u}$$

alors en ordonnant convenablement les couples (d,u), la matrice de passage des $W_{d,u}$ aux $Z_{d,u}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, et les $Z_{d,u}$ forment une base de $\mathcal{E}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. De plus

$$Z_{d,u}W_{e,v} = \sum_{x|d} \mu(d/x) W_{(x,e),uv}$$

ou encore

$$Z_{d,u}W_{e,v} = \sum_{m|(d,e)} \Big(\sum_{\substack{x|d \\ (x,e)=m}} \mu(d/x) \Big) W_{m,uv}$$

Or la somme en x ci-dessus est nulle, sauf si d divise e, cas où elle se réduit à son terme $x = m$. Alors $Z_{d,u}W_{e,v} = 0$ si d ne divise pas e, et $Z_{d,u}W_{e,v} = Z_{d,uv}$ sinon. Dans ces conditions

$$Z_{d,u}Z_{e,v} = \sum_{x|e} \mu(e/x) Z_{d,u}W_{x,v} = \sum_{d|x|e} \mu(e/x) Z_{d,uv} = \delta_{d,e} Z_{d,uv}$$

Alors l'application qui à $Z_{d,u}$ associe l'élément u de l'algèbre $k(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ se prolonge en un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{E}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sur la somme directe des $k(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$, pour d divisant n. Comme ces algèbres sont semi-simples, il en résulte la

Proposition 23: Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **L'algèbre $\mathcal{E}(G)$ est semi-simple.**
2. **Le groupe G est cyclique.**

Si G est cyclique d'ordre n, alors l'algèbre $\mathcal{E}(G)$ est isomorphe à la somme directe des algèbres de groupes $k(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$, pour d divisant n.

Par exemple, si $k = \mathbf{C}$, alors les idempotents primitifs de $\mathcal{E}(G)$ sont indexés par les couples (d,χ), où $d|n$ et χ est un caractère de $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$. L'idempotent $e_{d,\chi}$ associé au couple (d,χ) est donné par

$$e_{d,\chi} = \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\substack{u \in (Z/dZ)^* \\ x|d}} \mu(d/x)\overline{\chi}(u) W_{x,u}$$

Avec cette notation, l'idempotent primitif de $\mathcal{E}(G)$ associé au $\mathbf{C}Ext(G)$-module simple $\mathbf{C}_\lambda$ de caractère λ est $e_{n,\lambda}$: en effet, l'élément $W_{d,u}$ est un multiple de $Y_{d,u}$, et $Y_{d,u}$ opère sur un $Ext(G)$-module simple comme $\tilde{e}_G^G G\times G/L_{d,u}$, car tous les termes $G\times G/\Delta(X)$, pour $X\neq G$, annulent $\mathbf{C}_\lambda$. Et comme $q(L_{d,u})=\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, il en résulte que $G\times G/L_{d,u}$ annule $\mathbf{C}_\lambda$ si $d\neq n$. Et $G\times G/L_{n,u}$ opère sur $\mathbf{C}_\lambda$ par multiplication par $\lambda(u)$.

Remarque: Pour x donné, la somme sur u dans l'expression de $e_{d,\chi}$ de dépend que de la classe de u modulo x. La somme sur u porte donc sur une classe du groupe $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ modulo le noyau $N_{d,x}$ du morphisme naturel $\pi_{d,x}$ de $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ dans $(\mathbf{Z}/x\mathbf{Z})^*$. La somme des $\chi(u)$ est alors nulle, sauf si $N_{d,x}\subseteq \mathrm{Ker}\ \chi$, i.e. si χ factorise par $\mathbf{Z}/x\mathbf{Z}$. Si ψ est un caractère de $(\mathbf{Z}/x\mathbf{Z})^*$, je dirai que $(x,\psi)\leq(d,\chi)$ si $x|d$ et $\chi=\psi\circ\pi_{d,x}$.

Il est alors clair que les ensembles ordonnés $](x,\psi),(d,\chi)[$ et $]x,d[$ (ordonné par la division) sont isomorphes. Alors si je pose

$$f_{d,\chi}=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{u\in(Z/dZ)^*}\overline{\chi}(u)W_{d,u}$$

j'ai

$$\sum_{(x,\psi)\leq(d,\lambda)}e_{x,\psi}=\sum_{(y,\rho)\leq(x,\psi)\leq(d,\lambda)}\tilde{\chi}](y,\rho),(x,\psi)[\frac{1}{\phi(x)}\sum_{u\in(Z/xZ)^*}\overline{\psi}(\pi_{x,y}(u))W_{y,\pi_{x,y}(u)}$$

ou encore

$$\sum_{(x,\psi)\leq(d,\lambda)}e_{x,\psi}=\sum_{(y,\rho)\leq(x,\psi)\leq(d,\lambda)}\frac{1}{\phi(y)}\tilde{\chi}](y,\rho),(x,\psi)[\sum_{u\in(Z/yZ)^*}\overline{\rho}(u)W_{y,u}$$

et la somme sur (x,ϕ) est nulle, sauf si $(y,\rho)=(d,\chi)$. Finalement

$$\sum_{(x,\psi)\leq(d,\lambda)}e_{x,\psi}=f_{d,\lambda}$$

Donc $f_{n,\chi}$ est un idempotent de $\mathcal{E}(G)$, qui est primitif si et seulement si le couple (n,χ) est minimal, i.e. si le caractère χ est primitif.

Mais d'autre part, l'idempotent e_χ de $kExt(G)^*$ associé à χ est

$$e_\chi=\frac{1}{\phi(n)}\sum_{u\in(Z/nZ)^*}\overline{\chi}(u).u$$

et son image naturelle dans $\mathcal{E}(G)$ est

$$\tilde{e}_G^G e_\chi \tilde{e}_G^G=\frac{1}{\phi(n)}\sum_{u\in(Z/nZ)^*}\overline{\chi}(u)Y_{n,u}=f_{n,\chi}$$

Donc

Proposition 24: Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. **L'idempotent e_χ de $\mathbf{C}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ reste primitif dans $\mathcal{E}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.**

2. **Le caractère χ est un caractère primitif modulo n.**

10 Le foncteur des représentations complexes

Ici, la catégorie considérée est la catégorie $\mathcal{C}$ toute entière, et l'anneau A est le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Je vais étudier le foncteur $G \mapsto \mathbf{C} \otimes R_C(G)$ des représentations complexes de G, ou, ce qui revient au même, des fonctions centrales à valeurs complexes sur G.

10.1 Caractères

Si G et H sont des groupes finis, si V est un $\mathbf{C}G$-module, si X est un H-ensemble-G et $[X]$ le $\mathbf{C}G$-module associé, alors $[X]\otimes_G V$ est un $\mathbf{C}H$-module. Ceci définit par linéarité l'application $\mathbf{C} \otimes R_C(X)$ de $\mathbf{C} \otimes R_C(G)$ dans $\mathbf{C} \otimes R_C(H)$. En termes de caractères, il n'est pas difficile de voir que cette correspondance se traduit par le

Lemme 23: Soient G et H sont groupes finis, soit V est un $\mathbf{C}G$-module de caractère χ, et X un H-ensemble-G, alors le caractère $X \otimes_G \chi$ de $X \otimes_G V$ est donné par la formule

$$X \otimes_G \chi(h) = \frac{1}{|X|} \sum_{\substack{x \in X,\, g \in G \\ hx = xg}} \chi(g)$$

Cette formule presque usuelle d'induction tient au fait que, en notant ${}_xG$ le stabilisateur à droite dans G d'un élément x de X, alors $X \otimes_G V$ s'identifie à $\sum_{x\in X/G} V_{{}_xG} = \sum_{x\in X/G} V^{{}_xG}$, le groupe H permutant les composantes.

L'analogue du lemme 15 est ici le

Lemme 24: Soit G un groupe fini, et X un G-ensemble. Si V est un $\mathbf{C}G$-module, alors $[\tilde{X}] \otimes_G V$ s'identifie au produit tensoriel $[X] \otimes V$.

10.2 Sous-foncteurs et décomposition

Soient alors $M \subset L$ des sous-foncteurs du foncteur $\mathbf{C} \otimes R_C()$, et H un groupe d'ordre minimal tel que $L(H) \neq M(H)$. La proposition 7 donne ici

$$L(H) = e_H^{\tilde{H}} L(H) + M(H)$$

Or si V est un $\mathbf{C}H$-module, alors $\tilde{e_H^H}\otimes_H V$ a pour caractère le produit du caractère de V par le caractère de e_H^H (cf. Lemme 23). Ce dernier vaut 1 sur les générateurs de H, et 0 ailleurs. Cela prouve que H est cyclique, et que si $f \in \tilde{e_H^H}L(H)$, alors f est nulle hors des générateurs de H.

En particulier, les seules sections simples $S_{H,W}$ du foncteur $\mathbf{C} \otimes R_C()$ correspondent à des groupes H cycliques.

D'autre part, si G est un groupe fini, et m un entier multiple de l'exposant de G, alors $\mathbf{C} \otimes R_C(G)$ est un $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$-module naturel par l'intermédiaire des opérateurs d'Adams, définis par

$$\Psi^{(n)}(f)(g) = f(g^n)$$

Il est alors naturel d'essayer de décomposer $\mathbf{C}\otimes R_C(G)$ en fonction des $\mathbf{C}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$-modules simples: il se trouve que cette décomposition peut être faite de manière fonctorielle pour la catégorie $\mathcal{C}$:

Soit G un groupe fini. Si m est un entier, et ζ un caractère du groupe $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, je pose

$$\varepsilon_{m,\zeta} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{i\in(Z/mZ)^*} \overline{\zeta}(i)\Psi^{(i)}$$

C'est un endomorphisme de $\mathbf{C} \otimes R_C(G)$. Il est clair que si n est multiple de m, alors

$$\varepsilon_{n,\zeta\circ\pi_{n,m}} = \varepsilon_{m,\zeta}$$

Si G est un groupe fini, si m est un entier, et ζ un caractère du groupe $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, je noterai

$$\psi_{m,\zeta,G} = \varepsilon_{mexp(G),\zeta\circ\pi_{mexp(G),m}}$$

l'endomorphisme de $\mathbf{C} \otimes R_C(G)$ défini par

$$\psi_{m,\zeta,G} = \frac{1}{\phi(mexp(G))} \sum_{i\in(Z/mexp(G))^*} \overline{\zeta}(i)\Psi^{(i)}$$

J'ai ainsi construit en fait un endomorphisme du foncteur $\mathbf{C} \otimes R_C()$:

Proposition 25: Soit m un entier naturel, et ζ un caractère de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. Si G et H sont des groupes finis, et X un H-ensemble-G, alors pour toute fonction centrale f sur G

$$X \otimes_G \psi_{m,\zeta,G}(f) = \psi_{m,\zeta,H}(X \otimes_G f)$$

En effet, dans le calcul de $\psi_{m,\zeta,G}(f)$, je peux choisir un entier n multiple de m et des exposants de G et H, et alors pour $g \in G$,

$$\psi_{m,\zeta,G}(f)(g) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{i \in (Z/nZ)^*} \overline{\zeta}(i) f(g^i)$$

de sorte que

$$X \otimes_G \psi_{m,\zeta,G}(f)(h) = \frac{1}{|X|\phi(n)} \sum_{\substack{x \in X, g \in G \\ hx = xg \\ i \in (Z/nZ)^*}} \overline{\zeta}(i) f(g^i)$$

D'autre part

$$\psi_{m,\zeta,H}(X \otimes_G f)(h) = \frac{1}{|X|\phi(n)} \sum_{\substack{i \in (Z/nZ)^* \\ x \in X, g \in G \\ h^i x = xg}} \overline{\zeta}(i) f(g)$$

Pour i fixé, il existe des entiers a et b tels que $ai + bn = 1$. Alors si $h^i x = xg$, j'ai aussi $h^{ai} x = xg^a = h^{ai+bn} x = hx$. Inversement, si $hx = xg^a$, alors $h^i x = xg$. Donc

$$\psi_{m,\zeta,H}(X \otimes_G f)(h) = \frac{1}{|X|\phi(n)} \sum_{\substack{i \in (Z/nZ)^* \\ x \in X, g \in G \\ hx = xg^a}} \overline{\zeta}(i) f(g)$$

Les applications $g \mapsto g^a$ et $g \mapsto g^i$ sont alors des bijections de G inverses l'une de l'autre, et il suffit de remplacer g^a par g et g par g^i dans cette formule pour prouver la proposition.

Corrollaire: Les applications $\psi_{m,\zeta,G} : \mathbf{C} \otimes R_C(G) \to \mathbf{C} \otimes R_C(G)$ définissent un endomorphisme $\psi_{m,\zeta}$ du foncteur $\mathbf{C} \otimes R_C()$.

En fait, cet endomorphisme est un projecteur: pour tout groupe fini G, je note $U_{m,\zeta}(G)$ l'ensemble des fonctions centrales sur G telles que pour tout entier i premier à $mexp(G)$, et pour tout $g \in G$

$$f(g^i) = \zeta(i) f(g)$$

Alors si $f \in U_{m,\zeta}(G)$, il est clair que $\psi_{m,\zeta,G}(f) = f$. Inversement, si j est un entier premier à $mexp(G)$, si $f \in \mathbf{C} \otimes R_C(G)$, et $g \in G$, alors

$$\psi_{m,\zeta,G}(g^j) = \frac{1}{\phi(mexp(G))} \sum_{i \in (Z/mexp(G)Z)^*} \overline{\zeta}(i) f(g^{ij})$$

et comme l'application $i \mapsto ij$ est une bijection de $(\mathbf{Z}/mexp(G)\mathbf{Z})^*$, telle que $\overline{\zeta}(i) = \overline{\zeta}(ij)\zeta(j)$, je vois que

$$\psi_{m,\zeta,G}(g^j) = \zeta(j)\psi_{m,\zeta,G}(g)$$

et l'image de $\psi_{m,\zeta,G}$ est donc égale à $U_{m,\zeta}(G)$. Il en résulte que $U_{m,\zeta}$ est un sous-foncteur de $\mathbf{C} \otimes R_C()$.

Il est clair de plus sur la définition des $\psi_{m,\zeta}$ que si n est multiple de m, alors

$$\psi_{n,\zeta\circ\pi_{n,m}} = \psi_{m,\zeta}$$

et je peux donc considérer uniquement les couples (m,ζ), où ζ est un caractère primitif modulo m. Dans ces conditions, si G est un groupe fini, et f un élément non-nul de $U_{m,\zeta}(G)$, et si i est un entier congru à 1 modulo $m \vee exp(G)$, je dois avoir pour tout $g \in G$

$$f(g^i) = f(g) = \zeta(i)f(g)$$

et $\zeta(i) = 1$ si f est non-nulle. Alors, posant $n = exp(G)$, la considération du diagramme exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathrm{Ker}\ \pi_{m\vee n,(m,n)} & \to & \mathrm{Ker}\ \pi_{m\vee n,n} & \to & \mathrm{Ker}\ \pi_{m,(m,n)} & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathrm{Ker}\ \pi_{m\vee n,m} & \to & (\mathbf{Z}/(m\vee n)\mathbf{Z})^* & \to & (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mathrm{Ker}\ \pi_{n,(m,n)} & \to & (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^* & \to & (\mathbf{Z}/(m,n)\mathbf{Z})^* & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

montre que ζ vaut 1 sur l'image $\mathrm{Ker}\ \pi_{m,(m,n)}$ de $\mathrm{Ker}\ \pi_{m\vee n,n}$ dans $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, donc qu'il factorise par le groupe $(\mathbf{Z}/(m,n)\mathbf{Z})^*$. Comme ζ est primitif, cela montre que m divise $n = exp(G)$.

D'autre part, l'espace $\mathbf{C} \otimes R_C(G)$ est doté d'un produit scalaire hermitien naturel, que je noterai $(\ ,\ )_G$. Il est clair que $\psi_{m,\zeta,G}$ est auto-adjoint pour ce produit scalaire: en effet, je peux supposer que m divise l'exposant e de G, et alors

$$(\psi_{m,\zeta,G}(f), f')_G = \frac{1}{\phi(e)|G|} \sum_{\substack{i \in (Z/eZ)^* \\ g \in G}} \overline{\zeta}(i) f(g^i)\overline{f'}(g)$$

et en sommant sur l'inverse a de i dans $(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^*$, j'ai $\zeta(a) = \overline{\zeta}(i)$, donc

$$(\psi_{m,\zeta,G}(f), f')_G = \frac{1}{\phi(e)|G|} \sum_{\substack{a \in (Z/eZ)^* \\ g \in G}} \zeta(a) f(g)\overline{f'}(g^a) = (f, \psi_{m,\zeta,g}(f'))_G$$

Si ζ est un caractère primitif modulo m, si ζ' est un caractère primitif modulo m', si $f \in U_{m,\zeta}(G) - \{0\}$ et si $f' \in U_{m',\zeta'}(G) - \{0\}$, alors m et m' divisent l'exposant e de G, et pour tout entier j premier à e, j'ai

$$(f,f')_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{f'(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g^j)\overline{f'(g^j)} = \zeta(j)\overline{\zeta}'(j)(f,f')_G$$

et $(f,f')_G = 0$ sauf si ζ et ζ' coïncident sur tous les entiers premiers à e. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* \arrow[dr, "\zeta"] & \\
(\mathbf{Z}/e\mathbf{Z})^* \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathbf{Z}/(m\vee m')\mathbf{Z})^* \arrow[u] \arrow[d] & \mathbf{C} \\
& (\mathbf{Z}/m'\mathbf{Z})^* \arrow[ur, "\zeta'"'] &
\end{tikzcd}$$

montre que $\zeta\circ\pi_{m\vee m',m} = \zeta'\circ\pi_{m\vee m',m'}$. Alors dans la suite exacte naturelle

$$1 \to (\mathbf{Z}/(m\vee m')\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/m'\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/(m,m')\mathbf{Z})^* \to 1$$

le morphisme de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/m'\mathbf{Z})^*$ dans $\mathbf{C}$ qui à (u,u') associe $\zeta(u)\overline{\zeta'}(u')$ factorise par le groupe $(\mathbf{Z}/(m,m')\mathbf{Z})^*$. En particulier ζ et ζ' factorisent aussi par ce groupe, et comme ils sont primitifs, j'ai $m = m' = (m,m')$. Alors $\zeta = \zeta'$.

En d'autre termes, les images des projecteurs $\psi_{m,\zeta,G}$ et $\psi_{m',\zeta',G}$ correspondant à des couples (m,ζ) et (m',ζ') primitifs et distincts sont orthogonales. Ces projecteurs étant auto-adjoints, celà prouve qu'ils sont orthogonaux, (i.e. que leur produit est nul).

Soit alors pour tout G,

$$U(G) = \sum_{m,\zeta} U_{m,\zeta}(G)$$

Alors U est un sous-foncteur de $\mathbf{C}\otimes R_C()$. Pour montrer qu'il est égal à $\mathbf{C}\otimes R_C()$, je considère un groupe H d'ordre minimal tel que $U(H) \neq \mathbf{C}\otimes R_C(H)$. Alors H est cyclique, et si $f \in \tilde{e}_H^H\mathbf{C}\otimes R_C(H)$, alors f est nulle en dehors des générateurs de H. Il est alors facile de voir que, en notant m l'ordre de H, la fonction f est combinaison linéaire de caractères primitifs modulo m. Comme ces caractères sont dans $U(H)$, il en résulte que $U(H) = \mathbf{C}\otimes R_C(H)$, contradiction prouvant que $U = \mathbf{C}\otimes R_C()$. Les projecteurs $\psi_{m,\zeta}$ étant deux à deux orthogonaux, et leur somme étant surjective, cette somme est donc l'identité. Donc:

Proposition 26: Les projecteurs $\psi_{m,\zeta}$, pour m entier naturel et ζ caractère primitif modulo m, sont des projecteurs deux à deux orthogonaux et leur somme est le morphisme identité du foncteur $\mathbf{C}\otimes R_C()$

Il reste alors à identifier les foncteurs $U_{m,\zeta}$, qui sont ce que tout le monde imagine...

10.3 Semi-simplicité

Soit m un entier naturel, et ζ un caractère primitif modulo m. Soit M un sous-foncteur propre de $U_{m,\zeta}$, et H un groupe d'ordre minimal tel que $M(H) \neq U_{m,\zeta}(H)$. Alors H est cyclique, par les remarques faites plus haut, et de plus

$$U_{m,\zeta}(H) = \tilde{e}_H^H U_{m,\zeta}(H) + M(H)$$

Soit alors n l'ordre de H, et $f \in \tilde{e}_H^H \mathbf{C} \otimes R_C(H)$. Alors f est concentrée sur les générateurs de H. Mais comme $f \in U_{m,\zeta}(H) \neq 0$, je sais que m divise n, et que pour tout i premier à n, j'ai $f(g^i) = \zeta(i)f(g)$. En d'autres termes, l'espace $\tilde{e}_H^H \mathbf{C} \otimes R_C(H)$ est de dimension 1, engendré par $\mathrm{Inf}_{Z/mZ}^{Z/nZ}\zeta$, où je note abusivement ζ le prolongement (par 0) de ζ de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Alors si $m \neq n$, j'ai $\zeta \in M(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, et $f \in M(H)$. Donc $m = n$. Et comme $U_{m,\zeta}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ est de dimension 1, engendré par ζ, il en résulte que $M(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) = 0$.

Alors si K est un groupe d'ordre minimal tel que $M(K) \neq 0$, le groupe K est cyclique. Soit k son ordre. Comme M est un sous-foncteur de $U_{m,\zeta}$, j'ai $U_{m,\zeta}(K) \neq 0$, et m divise k. De plus $M(K) = \tilde{e}_K^K M(K)$.

Alors si $f \in M(K) - \{0\}$, la fonction f est portée par les générateurs de K, et telle que $f(g^i) = \zeta(i)f(g)$ si i est premier à k, ou encore $f(g.i) = \zeta(i)f(g)$ en notation additive. Donc $f(i) = \zeta(i)f(1)$, et la fonction f est déterminée par $f(1)$.

Mais en appliquant à f le foncteur de co-inflation de $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, je dois trouver un élément f' de $M(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, donc 0. Or il est clair que

$$f'(g) = \sum_{\pi_{k,m}(h)=g} f(h)$$

et en particulier $f'(1) = \sum_{h \in Ker\ \pi_{k,m}} f(h)$. Mais si $h \in \mathrm{Ker}\ \pi_{k,m}$, alors $\zeta(h) = 1$, donc $f(h) = f(1)$. Donc $f'(1) = 0 = f(1)\phi(k)/\phi(m)$, donc $f(1) = 0$. Alors f est nulle, donc M est nul, et le foncteur $U_{m,\zeta}$ est simple. Comme le groupe $H = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est d'ordre minimal tel que $U_{m,\zeta}(H) \neq 0$, et comme $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ opère sur $U_{m,\zeta}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, de dimension 1, par multiplication par ζ, il en résulte que $U_{m,\zeta}$ est isomorphe au foncteur $S_{Z/mZ,\zeta}$.

Proposition 27: Le foncteur $\mathbf{C} \otimes R_C()$ est semi-simple, isomorphe à la somme directe des foncteurs $S_{Z/mZ,\zeta}$, où m est un entier naturel et ζ un caractère primitif modulo m.

Remarques: a) La somme directe ci-dessus est "localement finie", au sens où pour tout groupe fini, elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non-nuls.
b) Le corollaire de la proposition 20 permet de montrer que pour m fixé, la somme directe des $S_{Z/mZ,\zeta}(G)$ pour ζ primitif modulo m peut-être vue comme le quotient de l'espace des représentations de G réalisables sur le m-ième corps cyclotomique par la somme des espaces des représentations réalisables sur les corps cyclotomiques strictement plus petits.

Bibliographie

[BO1] S.BOUC. *Résolutions de foncteurs de Mackey.*
Rapport de Recherche du LMENS-91-11.Nov.1991

[BO2] S.BOUC. *Homologie de certains ensembles ordonnés.*
C.R.Acad.Sc.Paris, t.299, Série I, n°2, 1984.

[DI-DU] R.DIPPER-J.DU. *Harish-Chandra vertices*
à paraître au Journal de Crelle

[DI-MI] F.DIGNE-J.MICHEL. *Representations of finite groups of Lie type.*
London Math. Soc. Student Texts 21. Cambridge University Press.

[CU1] C.W.CURTIS. *Reduction Theorems for characters of finite groups of Lie type.*
Journal of Math. Soc. of Japan. 27(1975).666-888

[WE1] P.J.WEBB. *Communication at the General Workshop on Representation theory.* **MSRI, Berkeley, Dec.1990.**

Table des matières