

Le complexe de chaînes d'un G -complexe simplicial acyclique

S. Bouc

1. Introduction

Soit G un groupe fini. Un G -complexe simplicial est un complexe simplicial doté d'une action de G préservant sa structure simpliciale. Si X est un G -complexe simplicial, l'action de G est dite admissible si pour tout simplexe s de X , le stabilisateur de s dans G fixe s point par point. On peut toujours se ramener à une action admissible, quitte à remplacer X par sa subdivision barycentrique.

Lorsque l'action de G est admissible, le complexe de chaînes $C_*(X)$ est un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules de permutations. Les groupes d'homologie de $C_*(X)$ sont notés $H_i(X, \mathbb{Z})$ ou $H_i(X)$. Ce sont les groupes d'homologie (entière) de X .

Le complexe de chaînes réduit $\tilde{C}_*(X)$ est le complexe $C_*(X)$, auquel on rajoute un terme $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$, la différentielle d_0 envoyant chaque point de X (ou 0-simplexe) sur $1 \in \mathbb{Z}$. Les groupes d'homologie $\tilde{H}_i(X)$ de ce complexe sont les groupes d'homologie réduits de X .

Le complexe simplicial X est dit acyclique si $H_i(X) = 0$ pour $i \geq 1$, et si $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Il revient au même de dire que tous les groupes d'homologie réduits de X sont nuls.

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.1: *Soit G un groupe fini agissant de manière admissible sur un complexe simplicial X acyclique de dimension finie. Alors le complexe de chaînes réduit de X est un complexe acyclique et scindé de $\mathbb{Z}G$ -modules.*

Pour démontrer ce théorème, je montre que le complexe $\mathbb{F}_p \otimes \tilde{C}_*(X)$ est un complexe acyclique scindé de $\mathbb{F}_p G$ -modules pour tout nombre premier p . La considération d'un p -sous-groupe de Sylow de G permet alors de se ramener au cas où G est un p -groupe, et d'utiliser le théorème suivant, dû à Smith:

Théorème 1.2 (Smith [4]) *Soit p un nombre premier, et P un p -groupe fini agissant de manière admissible sur un complexe simplicial X acyclique modulo p (i.e. \mathbb{F}_p -acyclique) de dimension finie. Alors l'ensemble X^P des points fixes de P sur X est un sous-complexe simplicial de X , et X^P est acyclique modulo p .*

Dans toute la suite, je note p un nombre premier, et k un corps de caractéristique p . Le second ingrédient de la preuve est alors la notion de module de p -permutations: un kG -module de p -permutations est par définition un module isomorphe à un facteur direct d'un kG -module de permutations.

Les modules de p -permutations se comportent bien vis-à-vis de la construction de Brauer: si M est un kG -module, et H un sous-groupe de G , le quotient de Brauer $M(H)$ est défini par

$$M(H) = M^H / \left(\sum_{K \subset H} \text{Tr}_K^H M^K \right)$$

où la somme porte sur les sous-groupes propres de H , et $\text{Tr}_K^H : M^K \rightarrow M^H$ est l'application de trace relative définie par

$$\text{Tr}_K^H(m) = \sum_{x \in H/K} xm$$

Le point crucial est alors le théorème suivant:

Théorème 1.3: *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini. Si $f : L \rightarrow M$ est un morphisme entre deux kG -modules de p -permutations, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le morphisme f est une injection directe.*
2. *Pour tout p -sous-groupe P de G , le morphisme $f(P) : L(P) \rightarrow M(P)$ est injectif.*

De même, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *Le morphisme f est une surjection scindée.*
2. *Pour tout p -sous-groupe P de G , le morphisme $f(P) : L(P) \rightarrow M(P)$ est surjectif.*

Ce théorème est déjà démontré dans [2] pour des modules M et N de type fini. La démonstration donnée ici est indépendante, et s'applique à des modules quelconques.

2. Preuve du théorème 1.3

2.1. Modules de permutations

Définition 2.1: *Soit G un groupe fini, et k un corps. Un kG -module de permutations est par définition un kG -module admettant une k -base stable par G . Si X est une telle base, alors X est un G -ensemble, et M est isomorphe au kG -module kX .*

Si H est un sous-groupe de G , un kG -module de permutations M sera dit H -isotypique si M admet une base X stable par G telle que pour tout $x \in X$, le stabilisateur G_x de x dans G soit conjugué de H dans G . Une telle base sera appelée base H -isotypique de M . Si M est H -isotypique, alors M est isomorphe à une somme directe de copies du module $\text{Ind}_H^G k$.

Si M est un kG -module, et K un sous-groupe de G , je note M^K l'ensemble des points fixes de K sur M , et M_K l'ensemble des coinvariants de K sur M , défini comme le quotient de M par le sous-espace engendré par les $km - m$, pour $k \in K$ et $m \in M$. En d'autres termes

$$M^K = H^0(K, M) \quad M_K = H_0(K, M)$$

Les modules M^K , M_K , et $M(K)$ ont une structure naturelle de module pour le normalisateur $N_G(K)$ de K dans G , et même pour le groupe $N_G(K)/K$. Les constructions qui à M font correspondre M^K , M_K et $M(K)$ sont des foncteurs de la catégorie des kG -modules dans la catégorie des $kN_G(K)/K$ -modules: si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de kG -modules, je noterai f^K , f_K , et $f(K)$ les images de f par chacun des ces foncteurs.

Lemme 2.2: *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, et P un p -groupe. Soit M un kP -module de permutations, et X une k -base de M stable par P . Alors:*

1. *Si Q est un sous-groupe de P , les modules M^Q et M_Q sont isomorphes comme $kN_P(Q)$ -modules à $k(Q \setminus X)$.*
2. *Si Q est un sous-groupe de P , le module $M(Q)$ est isomorphe comme $kN_P(Q)$ -module à $k(X^Q)$.*

Démonstration: Il est clair que M^Q admet une k -base formée des éléments

$$s_\omega = \sum_{x \in \omega} x$$

où ω décrit l'ensemble $Q \setminus X$ des orbites de Q sur X . Le groupe $N_P(Q)$ permute ces orbites, et la base obtenue est stable par $N_P(Q)$.

De même, on obtient une k -base de M_Q en choisissant un élément x_ω dans chaque orbite de Q sur X , et en prenant l'image des x_ω dans M_Q . A nouveau, la base obtenue est stable par $N_P(Q)$. D'où la première assertion.

Soit Q_ω le stabilisateur de x_ω dans Q . Alors

$$\sum_{x \in \omega} x = \text{Tr}_{Q_\omega}^Q(x_\omega)$$

L'image de cet élément dans $M(Q)$ est nulle si $Q_\omega \neq Q$, c'est-à-dire si ω n'est pas réduite à un point. Donc les images des points de X^Q dans $M(Q)$ engendrent $M(Q)$ sur k .

Elles sont de plus linéairement indépendantes sur k : en effet, si

$$\sum_{x \in X^Q} a_x x = \sum_{R \subset Q} \text{Tr}_R^Q(m_R)$$

avec $a_x \in k$ et $m_R \in M^R$, alors comme m_R est combinaison linéaire de vecteurs $\text{Tr}_{R_y}^R(y)$, il en résulte que $\text{Tr}_R^Q(m_R)$ est combinaison linéaire de vecteurs $\text{Tr}_{R_y}^Q(y)$.

Or

$$\text{Tr}_{R_y}^Q(y) = \text{Tr}_{Q_y}^Q \text{Tr}_{R_y}^{Q_y}(y) = [Q_y : R_y] \text{Tr}_{Q_y}^Q(y)$$

est nul si $Q_y \neq R_y$. Et si $Q_y = R_y$, alors Q_y est un sous-groupe de R , donc un sous-groupe propre de Q . Finalement la somme $\sum_{x \in X^Q} a_x x$ est égale à une combinaison linéaire d'éléments de la forme $Tr_{Q_y}^Q(y)$, pour des y tels que $Q_y \neq Q$. Comme X est une base, cela entraîne $\sum_{x \in X^Q} a_x x = 0$.

Donc l'image de X^Q dans $M(Q)$ est une base de $M(Q)$, stable par $N_P(Q)$. \square

2.2. Modules de permutations Q -isotypiques

Lemme 2.3: *Soient $Q \subseteq P$ des p -groupes, et L et M des kP -modules de permutations Q -isotypiques. Si $f : L \rightarrow M$ est un morphisme de kP -modules, alors les morphismes f^P et f_P ont même matrice dans des bases convenables.*

Démonstration: Soit X (resp. Y) une k -base Q -isotypique de L (resp. de M) Pour chaque orbite $\omega \in P \backslash X$, il existe un point x_ω de ω dont le stabilisateur P_{x_ω} est égal à Q : en effet, si $x \in X$ et $g \in P$, le stabilisateur de P_{gx} est égal à ${}^g P_x = g P_x g^{-1}$.

Je suppose de même choisi un élément $y_{\omega'}$ de ω' de stabilisateur égal à Q pour chaque orbite ω' de P sur Y .

Alors L_P (resp. M_P) admet pour base sur k les images des x_ω (resp. les images des $y_{\omega'}$).

Le morphisme $f : L \rightarrow M$ s'exprime dans les bases X et Y par une matrice m indexée par $Y \times X$, définie par

$$f(x) = \sum_{y \in Y} m(y, x) y \quad \forall x \in X$$

Pour chaque $x \in X$, il n'y a qu'un nombre fini de $y \in Y$ tels que $m(y, x) \neq 0$.

De plus, le morphisme f est un morphisme de kP -modules si et seulement si la matrice m est P -invariante, i.e. si

$$m(gy, gx) = m(y, x) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall g \in P$$

La matrice m permet d'exprimer les matrices des morphismes f^P et f_P : si $\omega \in P \backslash X$, alors

$$f\left(\sum_{x \in \omega} x\right) = \sum_{x \in \omega} \sum_{y \in Y} m(y, x) y \quad (1)$$

Il en résulte qu'en identifiant la base de L^P formée des éléments $\sum_{x \in \omega} x$ pour $\omega \in P \backslash X$, avec $P \backslash X$, et en identifiant la base de M^P formée des $\sum_{y \in \omega'} y$, pour $\omega' \in P \backslash Y$, avec $P \backslash Y$, la matrice m^P de f^P est donnée par

$$m^P(\omega', \omega) = \sum_{x \in \omega} m(y_{\omega'}, x)$$

En effet $m^P(\omega', \omega)$ est le coefficient de $y_{\omega'}$ dans le second membre de (1).

Cette somme peut aussi s'écrire

$$m^P(\omega', \omega) = \sum_{g \in P/Q} m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

Le groupe Q opère à gauche sur l'ensemble P/Q , et la fonction

$$\varphi : g \in P/Q \mapsto m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

est invariante par cette action: en effet pour $h \in Q$

$$\varphi(hg) = m(y_{\omega'}, hgx_{\omega}) = m(h^{-1}y_{\omega'}, gx_{\omega}) = m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

puisque m est invariante par P , et puisque Q fixe $y_{\omega'}$. Il en résulte que

$$m^P(\omega', \omega) = \sum_{g \in Q \backslash P/Q} [Q : Q \cap {}^g Q] m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

et je peux me contenter de sommer sur $g \in N_P(Q)/Q$. Finalement

$$m^P(\omega', \omega) = \sum_{g \in N_P(Q)/Q} m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

De manière analogue, la matrice m_P de f_P dans les bases formées des x_{ω} et $y_{\omega'}$ s'obtient en calculant

$$f(x_{\omega}) = \sum_{y \in Y} m(y, x_{\omega})y$$

et en regroupant au second membre les termes correspondant à une orbite ω' donnée, qui ont même image que $y_{\omega'}$ dans M_P . Alors

$$m_P(\omega', \omega) = \sum_{y \in \omega'} m(y, x_{\omega}) = \sum_{g \in P/Q} m(gy_{\omega'}, x_{\omega})$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il suffit de sommer sur les g dans $N_P(Q)/Q$, et alors

$$m_P(\omega', \omega) = \sum_{g \in N_P(Q)/Q} m(gy_{\omega'}, x_{\omega})$$

En changeant g en g^{-1} dans cette somme, et en utilisant l'invariance de m par P , il vient

$$m_P(\omega', \omega) = m^P(\omega', \omega)$$

ce qui prouve le lemme. □

Corollaire 2.4: Soient $Q \subseteq P$ des p -groupes, et L et M des kP -modules de permutations Q -isotypiques. Alors les morphismes

$$f \in \text{Hom}_P(L, M) \mapsto f^P \in \text{Hom}_k(L^P, M^P)$$

$$f \in \text{Hom}_P(L, M) \mapsto f_P \in \text{Hom}_k(L_P, M_P)$$

sont surjectifs.

Démonstration: Ce corollaire peut se démontrer indépendamment du lemme 2.3, en se ramenant d'abord au cas où $L \simeq \text{Ind}_Q^P k$, et en utilisant le fait que les foncteurs de points fixes et de co-invariants commutent aux sommes directes. La démonstration du lemme 2.3 permet d'explicitier le raisonnement: avec les notations précédentes, soit $\varphi : L^P \rightarrow M^P$ un k -morphisme. En identifiant les bases de L^P et M^P avec $P \setminus X$ et $P \setminus Y$ respectivement, le morphisme φ s'exprime par une matrice μ indexée par $(P \setminus Y) \times (P \setminus X)$, sous la forme

$$\varphi(\omega) = \sum_{\omega' \in P \setminus Y} \mu(\omega', \omega) \omega'$$

La matrice μ est telle que pour tout ω , il n'y a qu'un nombre fini de ω' tels que $\mu(\omega', \omega) \neq 0$.

Je définis alors une matrice m , indexée par $Y \times X$, en posant pour $(y, x) \in Y \times X$

$$m(y, x) = \begin{cases} \mu(\omega', \omega) & \text{si } \exists g \in P, \exists \omega' \in P \setminus Y, \exists \omega \in P \setminus X, gy = y_{\omega'}, gx = x_{\omega} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $m(y, x)$ est bien défini, car les égalités $gx = x_{\omega}$ et $gy = y_{\omega'}$ déterminent ω et ω' sans ambiguïté lorsqu'un tel $g \in P$ existe.

De plus, la matrice m ainsi obtenue est clairement invariante par P . Enfin, si $x \in X$ est donné, et si $m(y, x) \neq 0$, alors il existe $g \in P$ et des orbites $\omega' \in P \setminus Y$ et $\omega \in P \setminus X$ tels que $gx = x_{\omega}$ et $gy = y_{\omega'}$, et $\mu(\omega', \omega) \neq 0$. Alors ω est l'orbite de x , et y est dans la réunion des orbites ω' telles que $\mu(\omega', \omega) \neq 0$. Ces orbites sont en nombre fini, et de cardinal fini. Donc il n'y a qu'un nombre fini de $y \in Y$ tels que $m(y, x) \neq 0$, et la matrice m définit un morphisme de kP -modules f de L dans M .

La matrice m^P de f^P se calcule alors par

$$m^P(\omega', \omega) = \sum_{g \in N_P(Q)/Q} m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$$

Le coefficient $m(y_{\omega'}, gx_{\omega})$ vaut $\mu(\omega'_1, \omega_1)$ s'il existe $g_1 \in P$ tel que

$$g_1 y_{\omega'} = y_{\omega'_1} \quad g_1 g x_{\omega} = x_{\omega_1}$$

Ces égalités équivalent à

$$\omega_1 = \omega \quad \omega'_1 = \omega' \quad g_1 y_{\omega'} = y_{\omega'} \quad g_1 g x_{\omega} = x_{\omega}$$

Alors g_1 fixe $y_{\omega'}$, donc $g_1 \in Q$. Et comme $g_1 g$ fixe x_{ω} , j'ai $g_1 g \in Q$, donc $g \in Q$. Finalement

$$m^P(\omega', \omega) = m(y_{\omega'}, x_{\omega}) = \mu(\omega', \omega)$$

Donc $f^P = \varphi$, et le morphisme $f \mapsto f^P$ est surjectif. Comme f^P et f_P ont même matrice dans des bases convenables, il en résulte que le morphisme $f \mapsto f_P$ est lui aussi surjectif. \square

Lemme 2.5: Soient $Q \subseteq P$ des p -groupes, et L et M des kP -modules de permutations Q -isotypiques. Soit de plus $f : L \rightarrow M$ un morphisme de kP -modules. Alors:

1. Les conditions suivantes sont équivalentes:
 - (a) Le morphisme f est une injection directe.
 - (b) Le morphisme f est injectif.
 - (c) Le morphisme f^P est injectif.
 - (d) Le morphisme f_P est injectif.
2. De même, les conditions suivantes sont équivalentes:
 - (a) Le morphisme f est une surjection scindée.
 - (b) Le morphisme f est surjectif.
 - (c) Le morphisme f^P est surjectif.
 - (d) Le morphisme f_P est surjectif.

Démonstration: Soit X (resp. Y) une base Q -isotypique de L (resp. de M). Pour chaque orbite $\omega \in P \setminus X$, je suppose choisi $x_\omega \in \omega$ de stabilisateur égal à Q . Je suppose de même choisi un élément $y_{\omega'}$ de ω' de stabilisateur égal à Q pour chaque orbite ω' de P sur Y .

Alors L_P (resp. M_P) admet pour base sur k les images des x_ω (resp. les images des $y_{\omega'}$).

Il est clair que les conditions (a) ci-dessus entraînent les conditions (b), (c), et (d) correspondantes. De plus, puisque f_P et f^P ont même matrice dans des bases convenables, les conditions (c) et (d) sont équivalentes. Enfin il est clair que 1.(b) entraîne 1.(c), car le foncteur $M \mapsto M^P$ est exact à gauche, et que 2.(b) entraîne 2.(d) car le foncteur $M \mapsto M_P$ est exact à droite.

A présent, si f^P est injectif, alors c'est une injection directe de k -espaces vectoriels, et il existe $\alpha \in \text{Hom}_k(M^P, L^P)$ tel que $\alpha \circ f^P = \text{Id}_{L^P}$. Le corollaire 2.4 montre alors qu'il existe $a \in \text{Hom}_P(M, L)$ tel que $a^P = \alpha$. Alors $(a \circ f)^P = \text{Id}_{L^P}$, donc $(a \circ f)_P = \text{Id}_{L_P}$.

En particulier, le morphisme $(a \circ f)^P$ est injectif, et le morphisme $(a \circ f)_P$ est surjectif. Comme le foncteur $L \mapsto L^P$ est exact à gauche, il en résulte que $\text{Ker}(a \circ f)^P = 0$. Et comme le foncteur $L \mapsto L_P$ est exact à droite, il en résulte que $\text{Coker}(a \circ f)_P = 0$. Alors $\text{Ker}(a \circ f)$ et $\text{Coker}(a \circ f)$ sont tous deux nuls par un résultat classique (lemme 4 du chapitre IX de [3]). Donc $a \circ f$ est un isomorphisme, et f est une injection directe. D'où l'équivalence des conditions 1.(a), 1.(b) 1.(c) et 1.(d).

De même si f_P est surjectif, alors c'est une surjection scindée de k -espaces vectoriels, et une section de f_P se relève en un morphisme b de kP -modules de M dans L tel que $(f \circ b)_P = \text{Id}_{M_P}$. Alors $(f \circ b)^P = \text{Id}_{M^P}$, et le même raisonnement montre que $f \circ b$ est un isomorphisme, donc que f est une surjection scindée. D'où l'équivalence des conditions 2.(a), 2.(b), 2.(c), et 2.(d). \square

Si M est un kP -module, et Q un sous-groupe de P , le morphisme de projection $M^Q \rightarrow M(Q)$ s'appelle morphisme de Brauer, et il est noté Br_Q .

Lemme 2.6: *Soient $Q \subseteq P$ des p -groupes finis, et M un kP -module de permutations Q -isotypique. Alors le morphisme de Brauer induit par restriction un isomorphisme*

$$M^P \rightarrow M(Q)^{N_P(Q)}$$

Démonstration: Soit X une k -base de M , stable par P , et telle que pour tout $x \in X$, le stabilisateur de x dans P soit conjugué de Q .

Alors M^P admet pour base les éléments $\sum_{x \in \omega} x$, pour $\omega \in P \setminus X$. Il est clair d'autre part que le morphisme de Brauer envoie M^P dans $M(Q)^{N_P(Q)}$: plus précisément, en identifiant $M(Q)$ avec le module $k(X^Q)$

$$Br_Q(\sum_{x \in \omega} x) = \sum_{x \in \omega \cap X^Q} x$$

Or $\omega \cap X^Q$ est non-vide, puisque chaque orbite ω contient un point de stabilisateur égal à Q . Et si x et x' sont deux points de $\omega \cap X^Q$, comme les stabilisateurs de x et x' sont conjugués de Q et contiennent Q , ils sont égaux à Q . De plus il existe $g \in P$ tel que $gx = x'$. Alors ${}^gP_x = P_{x'}$, donc g normalise Q . En d'autres termes, l'ensemble $\omega \cap X^Q$ est égal à une orbite de $N_P(Q)$ sur X^Q .

Alors si ω' est l'orbite de $x \in X^Q$ par $N_P(Q)$, et si ω est l'orbite de x par P , il est clair que

$$Br_Q(\sum_{x \in \omega} x) = \sum_{x \in \omega'} x$$

et le morphisme qui envoie $\sum_{x \in \omega'} x$ sur $\sum_{x \in \omega} x$ est l'inverse de la restriction de Br_Q à M^P . \square

2.3. Modules de p -permutations

Lemme 2.7: *Soit G un groupe fini, et M un kG -module de p -permutations. Si $Q \trianglelefteq R$ sont des p -sous-groupes de G , alors le morphisme*

$$M^R \xrightarrow{\text{Res}_{M^R} Br_Q} M(Q)^R \xrightarrow{Br_{R/Q}} M(Q)(R/Q)$$

induit un isomorphisme de $kN_G(Q, R)$ -modules

$$\text{Res}_{N_G(Q, R)} M(R) \xrightarrow{\pi_{Q, R}} M(Q)(R/Q)$$

Démonstration: Je dois d'abord montrer que le morphisme en question passe au quotient $M(R)$ de M^R . Or si $m \in M^R$ est dans le noyau de Br_R , alors m est

combinaison linéaire d'éléments de la forme $Tr_S^R(m_S)$, où $m_S \in M^S$. Je peux de plus supposer $[R : S] = p$, donc $S \trianglelefteq R$. Alors si $Q \not\subseteq S$, comme

$$\text{Res}_Q^R Tr_S^R(m_S) = Tr_{Q \cap S}^Q \text{Res}_{Q \cap S}^S m_S$$

l'image de $Tr_S^R(m_S)$ dans $M(Q)$ est nulle. Et si $Q \subseteq S$, alors il est clair que

$$Br_Q Tr_S^R(m_S) = Tr_{S/Q}^{R/Q} Br_Q(m_S)$$

dont l'image par $Br_{R/Q}$ est nulle. J'ai donc bien un morphisme $\pi_{Q,R}$ de $M(R)$ dans $M(Q)(R/Q)$, qui est clairement un morphisme de $kN_G(Q, R)$ -modules.

Si M est un module de permutations, ayant une k -base G -stable X , alors en identifiant $M(R)$ avec $k(X^R)$ et $M(Q)$ avec $k(X^Q)$, le module $M(Q)(R/Q)$ s'identifie à $k((X^Q)^R)$, c'est-à-dire $k(X^R)$, et avec ces identifications, le morphisme $\pi_{Q,R}$ et l'identité.

Si M est un module de p -permutations, alors il existe un module de permutations L et un sous-module M' de L tels que $L = M \oplus M'$. Le lemme résulte alors des remarques précédentes, et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M(R) \oplus M'(R) & \xrightarrow{\cong} & L(R) \\ \pi_{Q,R} \oplus \pi'_{Q,R} \downarrow & & \downarrow \pi_{Q,R} \\ M(Q)(R/Q) \oplus M'(Q)(R/Q) & \xrightarrow[\cong]{} & L(Q)(R/Q) \end{array}$$

où les flèches horizontales et la flèche verticale de droite sont des isomorphismes. La flèche de gauche est alors un isomorphisme, et $\pi_{Q,R}$ et $\pi'_{Q,R}$ aussi. \square

Corollaire 2.8: *Soit Q un sous-groupe de G , maximal tel que $M(Q) \neq 0$. Alors $M(Q)$ est un $kN_G(Q)/Q$ -module projectif.*

Démonstration: En effet, si $M(Q) \neq 0$, alors Q est un p -groupe, car si S est un p -Sylow de Q , et si $m \in M^Q$, alors

$$m = \frac{1}{[Q : S]} Tr_S^Q(m)$$

Et si Q est maximal tel que $L = M(Q) \neq 0$, alors pour tout p -sous-groupe non-trivial R/Q de $N_P(Q)/Q$, j'ai $L(R/Q) = 0$. Une récurrence immédiate montre alors que

$$L^{R/Q} = Tr_1^{R/Q}(L)$$

Alors si $P = R/Q$ est un p -Sylow du groupe $H = N_G(Q)/Q$, comme $\hat{H}^0(P, L) = 0$, le Théorème 5 du chapitre IX de [3] montre que L est un kP -module libre. Il est alors bien connu que L est un kH -module projectif (car un morphisme de kH -modules admet une section si et seulement si sa restriction à P en admet une). \square

Lemme 2.9: Soit P un p -groupe fini, soit L un kP -module libre, et M un kP -module de permutations admettant une k -base X stable par P telle que pour tout $x \in X$, le stabilisateur P_x de x dans P soit non-trivial. Alors si $f : L \rightarrow M$ est un morphisme de kP -modules, le morphisme f^P est nul. De même, si $f' : M \rightarrow L$ est un morphisme de kP -modules, alors $f'_P = 0$.

Démonstration: Comme L est un module libre, c'est un kP -module de permutations admettant une k -base X stable par P , sur laquelle P agit librement. Soit Y une base stable de M vérifiant l'hypothèse du lemme. Si $f : L \rightarrow M$ est un morphisme, ayant pour matrice m dans les bases X et Y , et si ω est une orbite de P sur X , alors

$$f\left(\sum_{x \in \omega} x\right) = \sum_{x \in \omega} \sum_{y \in Y} m(y, x)y$$

Soit $x_\omega \in \omega$. La somme ci-dessus s'écrit aussi

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{x \in \omega} x\right) &= \sum_{g \in P} \sum_{y \in Y} m(y, gx_\omega)y = \sum_{g \in P} \sum_{y \in Y} m(g^{-1}y, x_\omega)y = \dots \\ &\dots = \sum_{y \in Y} \sum_{g \in P/P_y} |P_y| m(gy, x_\omega)y \end{aligned}$$

Cette dernière somme est nulle puisque pour tout $y \in Y$, le groupe P_y est non-trivial. D'où la première assertion.

De même, soit $f' : M \rightarrow L$ un morphisme de kP -modules de matrice m' dans les bases X et Y . Soit $(x_\omega)_{\omega \in P \setminus X}$ (resp. $(y_{\omega'})_{\omega' \in P \setminus Y}$) un système de représentants des orbites de P sur X (resp. sur Y). La matrice de f'_P dans les bases de M_P et L_P formées des images des x_ω et des $y_{\omega'}$ est donnée comme dans la démonstration du lemme 2.3 par

$$\begin{aligned} m_P(\omega, \omega') &= \sum_{g \in P} m(gx_\omega, y_{\omega'}) = \sum_{g \in P} m(x_\omega, g^{-1}y_{\omega'}) = \dots \\ &\dots = \sum_{g \in P/P_{y_{\omega'}}} |P_{y_{\omega'}}| m(x_\omega, gy_{\omega'}) \end{aligned}$$

Elle est donc également nulle, puisque $P_{y_{\omega'}} \neq \{1\}$ pour tout ω' . \square

2.4. Un cas particulier du théorème

Proposition 2.10: Soient $Q \subseteq P$ des p -groupes. Soit L un kP -module de permutations Q -isotypique, et M un kP -module de permutations.

1. Soit $f : L \rightarrow M$ un morphisme de kP -modules. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) Le morphisme f est une injection directe.
- (b) Le morphisme $f(Q)$ est injectif.

2. Soit $f' : M \rightarrow L$ un morphisme de kP -modules. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) Le morphisme f' est une surjection scindée.
- (b) Le morphisme $f'(Q)$ est surjectif.

Démonstration: Soit Y une k -base P -stable de M . Alors Y est réunion disjointe de l'ensemble Y_0 des points dont le stabilisateur est conjugué de Q , de l'ensemble Y_+ des points dont le stabilisateur contient strictement Q à conjugaison près dans P , et d'un ensemble Y_- . Le module M se décompose en $M = M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$, où

$$M_0 = \sum_{y \in Y_0} ky \quad M_+ = \sum_{y \in Y_+} ky \quad M_- = \sum_{y \in Y_-} ky$$

Comme L est Q -isotypique, le module $L(Q)$ est un $kN_P(Q)/Q$ -module libre (par le corollaire 2.8 car tout $kN_P(Q)/Q$ -module projectif est libre puisque $N_P(Q)/Q$ est un p -groupe, ou plus simplement ici puisque $N_P(Q)/Q$ opère librement sur la base stable naturellement associée à une base P -stable de L), et il en est de même de $M_0(Q)$. Comme Q n'a pas de point fixe sur Y_- , il en résulte que $M_-(Q) = 0$. Le module $M_+(Q)$ admet quant à lui une k -base $N_P(Q)/Q$ -stable, dont tous les points ont un stabilisateur non-trivial dans $N_P(Q)/Q$, car ce sont les points fixes de Q sur Y_+ .

Soit alors $f : L \rightarrow M$ un morphisme de kP -modules, que je peux représenter par

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$$

conformément à la décomposition $M = M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$.

Il est clair que si f est une injection directe, alors $f(Q)$ est injectif. Inversement, si $f(Q)$ est injectif, alors il en est de même de

$$f(Q)^{N_P(Q)} = \begin{pmatrix} f_0(Q)^{N_P(Q)} \\ f_+(Q)^{N_P(Q)} \end{pmatrix} : L(Q)^{N_P(Q)} \rightarrow M_0(Q)^{N_P(Q)} \oplus M_+(Q)^{N_P(Q)}$$

Mais le morphisme $f_+(Q)^{N_P(Q)}$ de $L(Q)^{N_P(Q)}$ dans $M_+(Q)^{N_P(Q)}$ est nul par le lemme 2.9. Donc le morphisme $f_0(Q)^{N_P(Q)}$ de $L(Q)^{N_P(Q)}$ dans $M_0(Q)^{N_P(Q)}$ doit être injectif. Alors j'ai le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L^P & \xrightarrow{f_0^P} & M_0^P \\ \text{Br}_Q \downarrow & & \downarrow \text{Br}_Q \\ L(Q)^{N_P(Q)} & \xrightarrow{f_0(Q)^{N_P(Q)}} & M_0(Q)^{N_P(Q)} \end{array}$$

Les flèches verticales de ce diagramme sont des isomorphismes par le lemme 2.6. La flèche horizontale du bas est injective. Il en est donc de même de celle du haut. Alors f_0^P est injectif, donc f_0 est une injection directe par le lemme 2.5. Il en résulte que f est une injection directe, ce qui démontre l'assertion 1) de la proposition.

Soit à présent $f' : M \rightarrow L$ un morphisme de kP -modules, représenté par

$$f' = (f'_0, f'_+, f'_-)$$

conformément à la décomposition $M = M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$.

Il est clair que si f' est une surjection scindée, alors $f'(Q)$ est surjectif. Inversement, si $f'(Q)$ est surjectif, il en est de même de $f'(Q)_{N_P(Q)}$, que je peux représenter par

$$f'(Q)_{N_P(Q)} = (f'_0(Q)_{N_P(Q)}, f'_+(Q)_{N_P(Q)})$$

Le morphisme $f'_+(Q)_{N_P(Q)}$ est nul par le lemme 2.9. Donc $f'_0(Q)_{N_P(Q)}$ est surjectif, et il en est de même par le lemme 2.5 du morphisme $f'_0(Q)^{N_P(Q)}$. Alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_0^P & \xrightarrow{f_0'^P} & L_0^P \\ \text{Br}_Q \downarrow & & \downarrow \text{Br}_Q \\ M_0(Q)^{N_P(Q)} & \xrightarrow{f_0'(Q)^{N_P(Q)}} & L_0(Q)^{N_P(Q)} \end{array}$$

montre que $f_0'^P$ est surjectif. Une nouvelle application du lemme 2.5 montre que f_0' est une surjection scindée, ce qui prouve l'assertion 2) de la proposition. \square

2.5. Modules de p -permutations pour les p -groupes

Lemme 2.11: *Soit P un p -groupe. Alors tout kP -module de p -permutations est un module de permutations.*

Démonstration: Ce résultat est classique pour les modules de type fini. Le cas général est une conséquence du théorème de Crawley-Jonsson-Warfield (cf. [1] Corollary 26.6), qui entraîne que tout facteur direct d'une somme directe $\bigoplus_{i \in I} X_i$ de kP -modules indécomposables de dimension finie sur k est isomorphe à $\bigoplus_{i \in J} X_i$, pour un sous-ensemble convenable J de I .

Pour éviter de recourir à ce théorème, j'indiquerai la démonstration élémentaire suivante:

Soit M un kP -module de p -permutations. Je procède par récurrence sur le nombre de sous-groupes Q de P tels que $M(Q) \neq 0$. Si ce nombre est nul, alors $M = 0$, et le résultat est vrai.

Sinon, soit Q un sous-groupe maximal de P tel que $M(Q) \neq 0$. Alors $M(Q)$ est un $kN_P(Q)/Q$ -module projectif par le corollaire 2.8. Donc c'est un $kN_P(Q)/Q$ -module libre, puisque $N_P(Q)/Q$ est un p -groupe (cf. [3] Théorème 5 chapitre IX). Il en résulte en particulier que

$$M(Q)^{N_P(Q)} = Tr_1^{N_P(Q)/Q}(M(Q)) = Tr_Q^{N_P(Q)}(M(Q))$$

Soient $(m_j)_{j \in J}$ des éléments de M^Q tels que les éléments $Tr_Q^{N_P(Q)} Br_Q(m_j)$ forment une k -base de $M(Q)^{N_P(Q)}$. Chaque élément m_j définit un morphisme μ_j de $\text{Ind}_Q^P k$ dans M par

$$\mu_j(g \otimes 1) = gm_j$$

Ce morphisme envoie le générateur $\sum_{g \in P/Q} g \otimes 1$ de $(\text{Ind}_Q^P k)^P$ sur $\sum_{g \in P/Q} gm_j = Tr_Q^P(m_j) \in M^P$. Par la formule de Mackey

$$\text{Res}_Q^P Tr_Q^P(m_j) = \sum_{x \in Q \backslash P/Q} Tr_{Q \cap xQ}^Q(xm_j)$$

il en résulte que

$$Br_Q Tr_Q^P(m_j) = \sum_{x \in N_P(Q)/Q} xm_j = Tr_Q^{N_P(Q)} Br_Q(m_j)$$

Alors soit A la somme directe indexée par J de copies de $\text{Ind}_Q^P k$, et $\mu : A \rightarrow M$ la somme directe des μ_j . Par construction le morphisme $\mu(Q)^{N_P(Q)}$ est un isomorphisme. Il en est donc de même du morphisme $\mu(Q)$, par le lemme 2.5. Soit i une injection directe de M dans un kP -module de permutations L . Alors par la proposition 2.10, le morphisme $i \circ \mu$ est une injection directe, admettant une section s . Alors $\sigma = s \circ i$ est une section de μ , qui est donc une injection directe. Alors l'application

$$\begin{pmatrix} \mu\sigma \\ 1 - \mu\sigma \end{pmatrix} : M \rightarrow \mu\sigma(M) \oplus (1 - \mu\sigma)(M)$$

est un isomorphisme, qui composé avec μ donne le morphisme

$$\nu = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} : A \rightarrow \mu\sigma(M) \oplus M'$$

où $M' = (1 - \mu\sigma)(M)$. Alors $\nu(Q) = \begin{pmatrix} \mu(Q) \\ 0 \end{pmatrix}$ doit être un isomorphisme, ce qui montre que $M'(Q) = 0$. De plus, les applications μ et σ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre A et $\mu\sigma(M)$. Donc $\mu\sigma(M)$ est un kP -module de permutations (Q -isotypique). De plus M' est un facteur direct de M , donc c'est un kP -module de p -permutations. Mais l'ensemble des sous-groupes R de P tels que $M'(R) \neq 0$ est strictement contenu dans l'ensemble des R tels que $M(R) \neq 0$: il en est en effet clairement contenu dans cet ensemble, puisque M' est facteur direct de M , et de plus $M'(Q) = 0$.

L'hypothèse de récurrence montre alors que M' est un kP -module de permutations. Alors M est somme directe de deux modules de permutations: c'est donc un module de permutations, ce qui prouve le lemme. \square

2.6. Démonstration du théorème 1.3 Soit G un groupe fini, et $f : L \rightarrow M$ un morphisme entre kG -modules de p -permutations. Il est clair que si f est une injection directe (ou une surjection scindée), il en est de même de $f(Q)$ pour tout sous-groupe Q de G .

Inversement, si $f(Q)$ est injectif pour tout p -sous-groupe Q de G , je dois montrer que f est une injection directe. Il suffit pour cela que la restriction de f à un p -Sylow P de G soit une injection directe: en effet, si a est un morphisme de kP -modules de M dans L tel que $a \circ f = Id_L$, alors

$$Tr_P^G(a \circ f) = Tr_P^G(a) \circ f = [G : P]Id_L$$

et il en résulte que le quotient de $Tr_P^G(a)$ par $[G : P]$ est une section de f qui commute à l'action de G .

Je peux donc supposer que $G = P$ est un p -groupe, auquel cas L et M sont des kP -modules de permutations par le lemme 2.11. Soient X et Y des k -bases P -stables de L et M respectivement.

Je raisonne par récurrence sur le nombre de sous-groupes Q de P tels que $L(Q) \neq 0$ (i.e. $X^Q \neq \emptyset$). Si ce nombre est nul, alors $L = 0$, et $f : 0 \rightarrow M$ est une injection directe.

Sinon, soit Q maximal dans P tel que $L(Q) \neq 0$. Alors X est réunion disjointe de l'ensemble X_0 des $x \in X$ dont le stabilisateur dans P est conjugué de Q , et d'un ensemble X_- . Alors $L = L_0 \oplus L_-$, où L_0 est le k -sous-espace engendré par X_0 , et L_- le k -sous-espace engendré par X_- .

De manière analogue, l'ensemble Y est réunion disjointe de l'ensemble Y_0 des éléments dont le stabilisateur dans P est conjugué de Q , de l'ensemble Y_+ des éléments dont le stabilisateur contient strictement un conjugué de Q dans P , et d'un ensemble Y_- . Soit M_0, M_+ , et M_- les k -sous-espaces de M engendrés par Y_0, Y_+ , et Y_- respectivement. Alors $M = M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$.

Le morphisme $f = L_0 \oplus L_- \rightarrow M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$ peut être représenté par

$$f = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \\ v & w \end{pmatrix}$$

Il est clair que $L_-(Q) = M_-(Q) = 0$, et le morphisme

$$f(Q) : L(Q) = L_0(Q) \rightarrow M(Q) = M_0(Q) \oplus M_+(Q)$$

est représenté par

$$f(Q) = \begin{pmatrix} r(Q) \\ t(Q) \end{pmatrix}$$

Ce morphisme est injectif par hypothèse, donc il en est de même de $f(Q)^{N_P(Q)}$. De plus $L_0(Q)$ est un $kN_P(Q)/Q$ -module libre, et $M_+(Q)$ admet une base stable par

$N_P(Q)/Q$ telle que le stabilisateur de chaque élément dans $N_P(Q)/Q$ soit non-trivial. Le lemme 2.9 permet de conclure que $t(Q)^{N_P(Q)} = 0$, et alors $r(Q)^{N_P(Q)}$ doit être injectif. Alors le lemme 2.5 montre que $r(Q)$ est injectif, et la proposition 2.10 permet de conclure que r est une injection directe de L_0 dans M_0 .

Soit donc $\beta : M_0 \rightarrow L_0$ un morphisme de kG -modules tel que $\beta \circ r = Id_{L_0}$, et soit f' le morphisme de M dans L défini conformément aux décompositions $L = L_0 \oplus L_-$ et $M = M_0 \oplus M_+ \oplus M_-$ par

$$f' = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors soit

$$e = f' \circ f = \begin{pmatrix} Id_{L_0} & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit de plus e_0 l'endomorphisme

$$e_0 = \begin{pmatrix} Id_{L_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de L , c'est-à-dire la projection sur L_0 . Des calculs élémentaires montrent que

$$e \circ e = e \quad e \circ e_0 = e_0 \quad e_0 \circ e = e$$

Il en résulte que e et e_0 sont des idempotents qui ont la même image L_0 . De plus l'application

$$l \in L_- \mapsto \begin{pmatrix} -\beta s(l) \\ l \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de L_- sur le noyau de e . Soit d'autre part

$$e' = f \circ f' = \begin{pmatrix} r\beta & 0 & 0 \\ t\beta & 0 & 0 \\ v\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et e'_0 l'endomorphisme de M défini par

$$e'_0 = \begin{pmatrix} r\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire le projecteur sur l'image de l'idempotent $r\beta$. Des calculs non moins élémentaires montrent que

$$e' \circ e' = e' \quad e'_0 \circ e' = e'_0 \quad e' \circ e'_0 = e'$$

Il en résulte que e' et e'_0 sont des idempotents qui ont le même noyau

$$\text{Ker}(e') = \text{Ker}(e'_0) = \text{Ker}(r\beta) \oplus M_+ \oplus M_-$$

De plus l'application

$$m \in \text{Im}(r\beta) \mapsto \begin{pmatrix} r\beta(m) \\ t\beta(m) \\ v\beta(m) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\text{Im}(r\beta)$ sur l'image de e' .

Comme d'autre part $fe = ff'f = e'f$, l'application f induit un isomorphisme de eL sur $e'M$, dont l'inverse est induit par f' . Enfin la restriction φ de f à $(1-e)L$ a son image contenue dans $(1-e')M$, et vérifie l'hypothèse du théorème: pour tout sous-groupe R de P , l'application $\varphi(R)$ est injective. Comme de plus $L' = (1-e)L$ est facteur direct de L , et isomorphe à L_- , l'ensemble des R tels que $L'(R) \neq 0$ est contenu dans l'ensemble des R tels que $L(R) \neq 0$, strictement car $L'(Q) = L_-(Q) = 0$. L'hypothèse de récurrence montre que la restriction de f à $(1-e)L$ est une injection directe. Alors f est la somme directe d'un isomorphisme et d'une injection directe. C'est donc une injection directe, ce qui prouve l'assertion 1) du théorème.

L'assertion 2) se démontre de manière analogue: il suffit de montrer que si $f' : L \rightarrow M$ est un morphisme tel que $f'(Q)$ soit surjectif pour tout p -sous-groupe Q de G , alors f' est une surjection scindée. Comme pour l'assertion 1), il suffit de considérer le cas où $G = P$ est un p -groupe. Soient X et Y des k -bases P -stables pour L et M respectivement.

Je procède par récurrence sur le nombre de sous-groupes Q de P tels que $M(Q) \neq 0$. Si ce nombre est nul, le résultat est trivial, puisqu'une surjection nulle est scindée.

Sinon soit Q maximal tel que $M(Q) \neq 0$. L'ensemble X est la réunion disjointe de l'ensemble X_0 des points dont le stabilisateur est conjugué de Q , de l'ensemble X_+ des points dont le stabilisateur contient strictement un conjugué de Q dans P , et d'un ensemble X_- . D'où une décomposition $L = L_0 \oplus L_+ \oplus L_-$ associée.

De même, l'ensemble Y est réunion disjointe de l'ensemble Y_0 des points dont le stabilisateur est conjugué de Q dans P , et d'un ensemble Y_- , et il y a une décomposition $M = M_0 \oplus M_-$ associée.

L'application f' peut alors être représentée par

$$f' = \begin{pmatrix} r & t & v \\ s & u & w \end{pmatrix}$$

et l'application $f'(Q) : L_0(Q) \oplus L_+(Q) \rightarrow M_0(Q)$ est représentée par

$$f'(Q) = (r(Q), t(Q))$$

Cette application est surjective, donc l'application $f'(Q)_{N_P(Q)}$ l'est aussi, et comme $t(Q)_{N_P(Q)} = 0$ par le lemme 2.9, l'application $r(Q)_{N_P(Q)}$ est surjective. Alors r est une surjection scindée par la proposition 2.10. Donc il existe un morphisme de kP -modules $\beta : M_0 \rightarrow L_0$ tel que $r\beta = Id_{M_0}$.

Soit alors $f : M \rightarrow L$ défini par

$$f = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je pose

$$e = f' \circ f = \begin{pmatrix} Id_{M_0} & 0 \\ s\beta & 0 \end{pmatrix} \quad e_0 = \begin{pmatrix} Id_{M_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que e et e_0 sont des idempotents, et que

$$e \circ e_0 = e \quad e_0 \circ e = e_0$$

En particulier e et e_0 ont même noyau, et le morphisme

$$l \in M_0 \mapsto \begin{pmatrix} l \\ s\beta(l) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de M_0 sur l'image de e .

De manière analogue, en posant

$$e' = f \circ f' = \begin{pmatrix} \beta r & \beta t & \beta v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e'_0 = \begin{pmatrix} \beta r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les morphismes e' et e'_0 sont des idempotents, tels que

$$e' \circ e'_0 = e'_0 \quad e'_0 \circ e' = e'$$

Il en résulte que $\text{Im}(e') = \text{Im}(e'_0) = \text{Im}(\beta r)$. De plus l'application

$$(n, b, c) \in \text{Ker}(\beta r) \oplus L_+ \oplus L_- \mapsto \begin{pmatrix} n - \beta t b - \beta v c \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Ker}(e')$$

est un isomorphisme.

Alors comme $f'e' = ef'$, la restriction de f' à $e'L$ induit un isomorphisme de $e'L$ sur eM , qui est isomorphe à M_0 . La restriction de f' à $(1 - e')L$ a son image contenue dans $(1 - e)M$, qui est égal à M_- . Comme l'ensemble des R tels que $M_-(R) \neq 0$ est strictement contenu dans l'ensemble des R tels que $M(R) \neq 0$ (puisque $M_-(Q) = 0$), l'hypothèse de récurrence appliquée à cette restriction montre que f' est la somme directe d'un isomorphisme et d'une surjection scindée, donc que c'est une surjection scindée, ce qui termine la démonstration du théorème 1.3. \square

Ce théorème admet la conséquence suivante:

Théorème 2.12: *Soit G un groupe fini, et C_* un complexe de kG -modules de p -permutations, nul en un degré au moins (i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $C_n = 0$). Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe C_* est un complexe acyclique scindé de kG -modules.*

2. Pour tout p -sous-groupe P de G , le complexe $C_*(P)$ est acyclique.

Démonstration: Soit n tel que $C_{n-1} = 0$. La différentielle $d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ est alors un morphisme de kG -modules de permutations, tel que pour tout p -sous-groupe P de G , le morphisme $d_{n+1}(P)$ est surjectif. Donc d_{n+1} est une surjection scindée de kG -modules.

Alors il existe des morphisme de kG -modules $h_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$, et $h_{n-1} : C_{n-1} \rightarrow C_n$ (le morphisme nul!) tels que

$$d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = Id_{C_n}$$

Or si m est un entier tel qu'il existe des morphismes de kG -modules $h_i : C_i \rightarrow C_{i+1}$, pour $m-1 \geq i \geq n-1$ vérifiant

$$d_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i = Id_{C_i} \quad \forall i, m-1 \geq i \geq n$$

alors $h_{m-1}d_m : C_m \rightarrow C_m$ est un projecteur dont le noyau est égal au noyau de d_m , puisque $d_m h_{m-1} d_m = d_m$. Donc $\text{Ker}(d_m)$ est un kG -module de p -permutations. De plus, la différentielle $d_{m+1} : C_{m+1} \rightarrow \text{Ker}(d_m)$ est telle que pour tout p -sous-groupe P de G , le morphisme $d_{m+1}(P)$ est surjectif. Donc il y a un morphisme $h'_m : \text{Ker}(d_m) \rightarrow C_{m+1}$ tel que $d_{m+1}h'_m = Id_{\text{Ker}(d_m)}$. En posant $h_m = h'_m(Id_{C_m} - h_{m-1}d_m)$, j'obtiens un morphisme de kG -modules de C_m dans C_{m+1} tel que

$$d_{m+1}h_m + h_{m-1}d_m = Id_{C_m}$$

Par récurrence, un tel morphisme existe pour tout $m \geq n-1$.

De manière analogue, la différentielle $d_{n-2} : C_{n-2} \rightarrow C_{n-3}$ doit être une injection directe, et une récurrence similaire utilisant l'assertion 1) du théorème 1.3 montre l'existence de h_m pour tout entier $m \leq n-1$. Donc le complexe C_* est scindé. \square

Corollaire 2.13: Soit $f : C_* \rightarrow D_*$ un morphisme de complexes de kG -modules de p -permutations, tels qu'il existe un entier n avec $C_{n-1} = D_n = 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1. Le morphisme f est une équivalence d'homotopie.
2. Pour tout p -sous-groupe P de G , le morphisme $f(P)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration: Le corollaire se déduit du théorème précédent en considérant le cône K_* de f , tel que $K_n = C_{n-1} \oplus D_n$. Ce complexe est acyclique et scindé si et seulement si f est une équivalence d'homotopie, et le complexe $K_*(P)$ est le cône du morphisme $f(P)$. Il est acyclique si et seulement si $f(P)$ est un quasi-isomorphisme. Comme K_* est un complexe de kG -modules de p -permutations, nul en un degré par hypothèse, le corollaire en découle. \square

3. Preuve du théorème 1.1

Soit G un groupe fini opérant de manière admissible sur un complexe simplicial X . Soit $\tilde{C}_*(X)$ le complexe de chaînes réduit de X . C'est un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules de permutations.

Si X est acyclique, il est en particulier acyclique modulo p pour tout p . Donc le complexe $M_* = \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{C}_*(X)$ est acyclique. Si X est de plus de dimension finie, le théorème de Smith montre que X^P est acyclique modulo p . Or le complexe de chaînes réduit de X^P sur \mathbb{F}_p n'est autre que $M_*(P)$. Alors le complexe M_* est un complexe scindé de $\mathbb{F}_p G$ -modules.

Alors le théorème 1.1 résulte du théorème suivant:

Théorème 3.1: *Soit G un groupe fini et K_* un complexe de $\mathbb{Z}G$ -modules de permutations, borné dans le sens des différentielles, et acyclique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Le complexe K_* est un complexe scindé de $\mathbb{Z}G$ -modules.*
2. *Pour tout nombre premier p , le complexe $\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} K_*$ est un complexe scindé de $\mathbb{F}_p G$ -modules.*

Démonstration: Il est clair que 1) entraîne 2). Inversement, si 2) est vrai, alors il y a des morphismes de $\mathbb{F}_p G$ -modules

$$h_n : \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} K_n \rightarrow \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} K_{n+1}$$

tels que

$$d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = Id_{K_n}$$

Ces morphismes se relèvent en des morphismes de $\mathbb{Z}G$ -modules $\hat{h}_n : K_n \rightarrow K_{n+1}$: en effet, le module K_n est un module de permutations, admettant une \mathbb{Z} -base stable Y_n . Le morphisme h_n est défini par une matrice m_n à coefficients dans \mathbb{F}_p , indexée par le produit $Y_{n+1} \times Y_n$, et G -invariante. Pour relever h_n , il suffit de choisir un relèvement $\hat{m}_n(y', y)$ dans \mathbb{Z} de $m_n(y', y)$, pour (y', y) parcourant un système de représentants des orbites de G sur $Y_{n+1} \times Y_n$, en prenant $\hat{m}_n(y', y) = 0$ si $m_n(y', y) = 0$, et de poser ensuite $\hat{m}_n(gy', gy) = \hat{m}_n(y', y)$ pour tout $g \in G$.

Par construction, les morphismes \hat{h}_n sont tels que

$$\text{Im}(Id_{C_n} - d_{n+1}\hat{h}_n - \hat{h}_{n-1}d_n) \subseteq pK_n$$

donc il existe des endomorphismes de $\mathbb{Z}G$ -modules l_n de K_n tels que

$$Id_{C_n} - d_{n+1}\hat{h}_n - \hat{h}_{n-1}d_n = pl_n$$

Si cette équation est vraie, alors en particulier

$$pd_{n+1}l_{n+1} = d_{n+1} - d_{n+1}h_n d_{n+1} = pl_n d_{n+1}$$

et alors $d_{n+1}l_{n+1} = l_n d_{n+1}$ puisque les K_n sont sans torsion.

Donc il existe un endomorphisme l du $\mathbb{Z}G$ -complexe K_* tel que l'identité de K_* soit égale à homotopie près à pl .

Soit E l'ensemble des entiers $a > 0$ tels qu'il existe un endomorphisme φ du $\mathbb{Z}G$ -complexe K_* tel que $a\varphi$ soit homotope à l'identité. Alors E contient tous les nombres premiers par les remarques précédentes, et de plus E est stable par produit, car si

$$Id \simeq a\varphi \quad Id \simeq a'\varphi'$$

alors $Id \simeq a\varphi \simeq aa'\varphi\varphi'$. Donc E contient tous les entiers naturels non-nuls, et en particulier l'ordre g de G . Je suppose choisi un endomorphisme φ tel que $Id \simeq g\varphi$.

Le complexe K_* est un complexe acyclique de $\mathbb{Z}G$ -modules libres sur \mathbb{Z} , borné dans le sens des différentielles. Il est donc acyclique et scindé comme complexe de \mathbb{Z} -modules. Il existe donc des morphismes de \mathbb{Z} -modules $\psi_n : K_n \rightarrow K_{n+1}$ tels que

$$Id_{K_n} = d_{n+1}\psi_n + \psi_{n-1}d_n$$

En prenant la trace de 1 à G de cette égalité, il vient

$$gId_{K_n} = d_{n+1}Tr_1^G(\psi_n) + Tr_1^G(\psi_{n-1})d_n$$

Autrement dit le morphisme gId est homotope à 0 comme endomorphisme du $\mathbb{Z}G$ -complexe K_* . Alors le morphisme $g\varphi$, homotope à l'identité par construction, est homotope à 0, ce qui montre que le complexe K_* est un complexe scindé de $\mathbb{Z}G$ -modules. \square

Remerciements: Je tiens à remercier Jean-Pierre Serre pour ses remarques et suggestions améliorant et simplifiant la rédaction de cette note.

Références

- [1] W. Anderson and R. Fuller. *Rings and Categories of modules*, volume 13 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1973.
- [2] S. Bouc. Résolutions de foncteurs de Mackey. In *Group representations: Cohomology, Group Actions and Topology*, volume 63. AMS Proceedings of Symposia in pure mathematics, Janvier 1998.
- [3] J.-P. Serre. *Corps locaux*, volume VIII/1296 of *Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago*. Herrmann, 1962.
- [4] P. Smith. Fixed points of periodic transformations. *Amer. Math. Soc. Coll. Pub.*, XXvII:350–373, 1942.

S. BOUC
UFR de Mathématiques
Université Paris 7 Denis Diderot
75251. Paris Cedex 05
email: bouc@math.jussieu.fr