

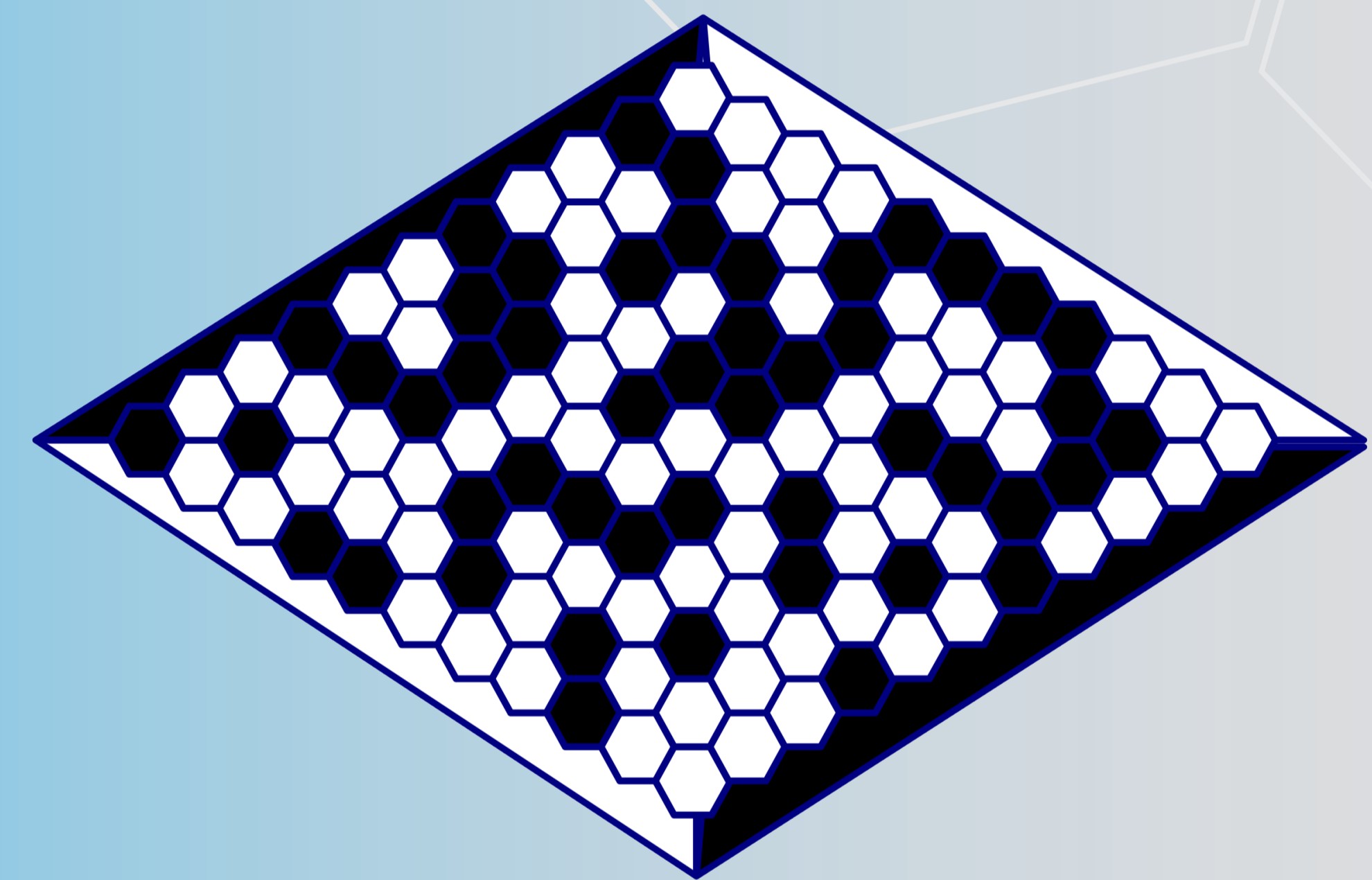
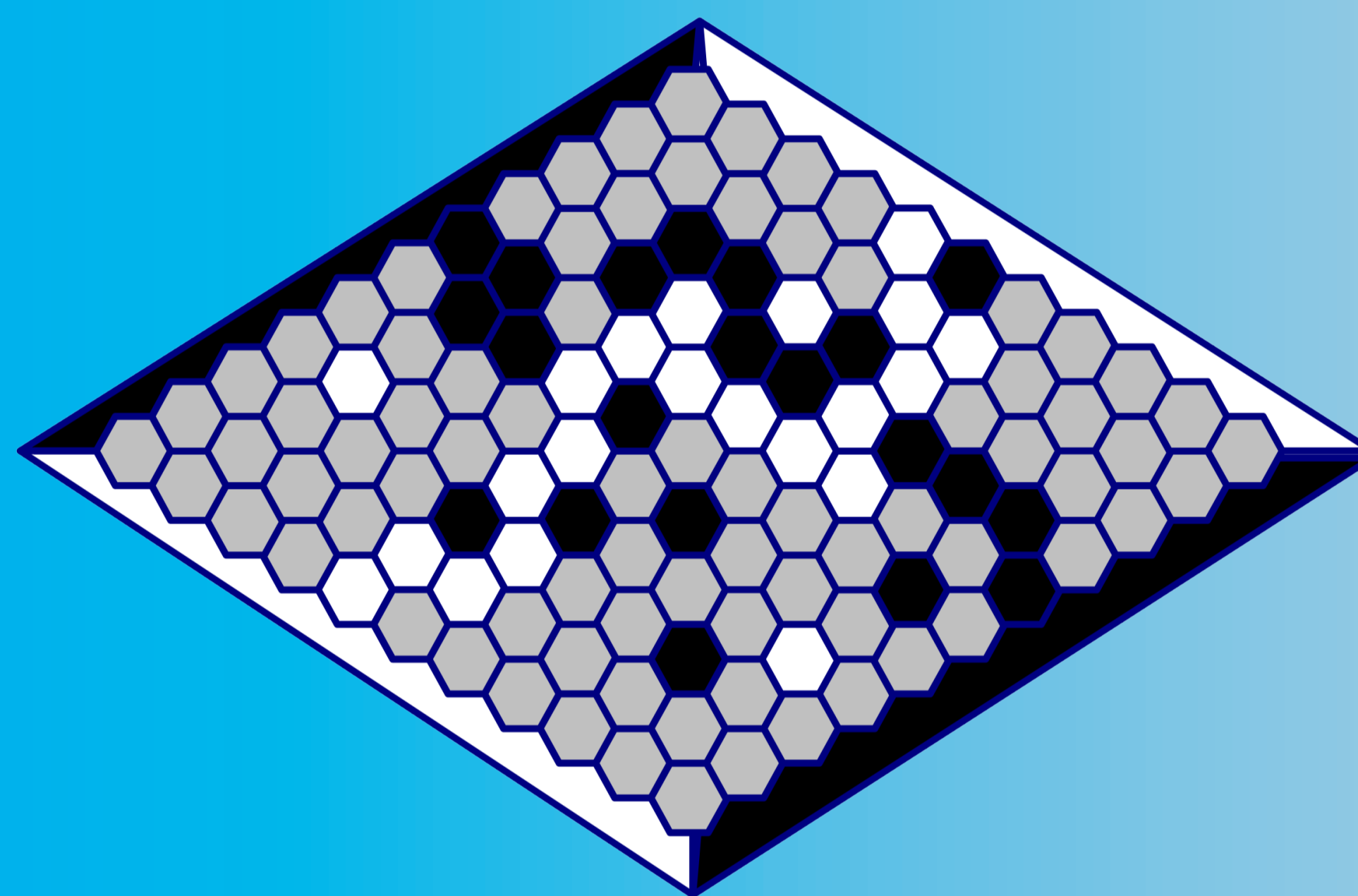
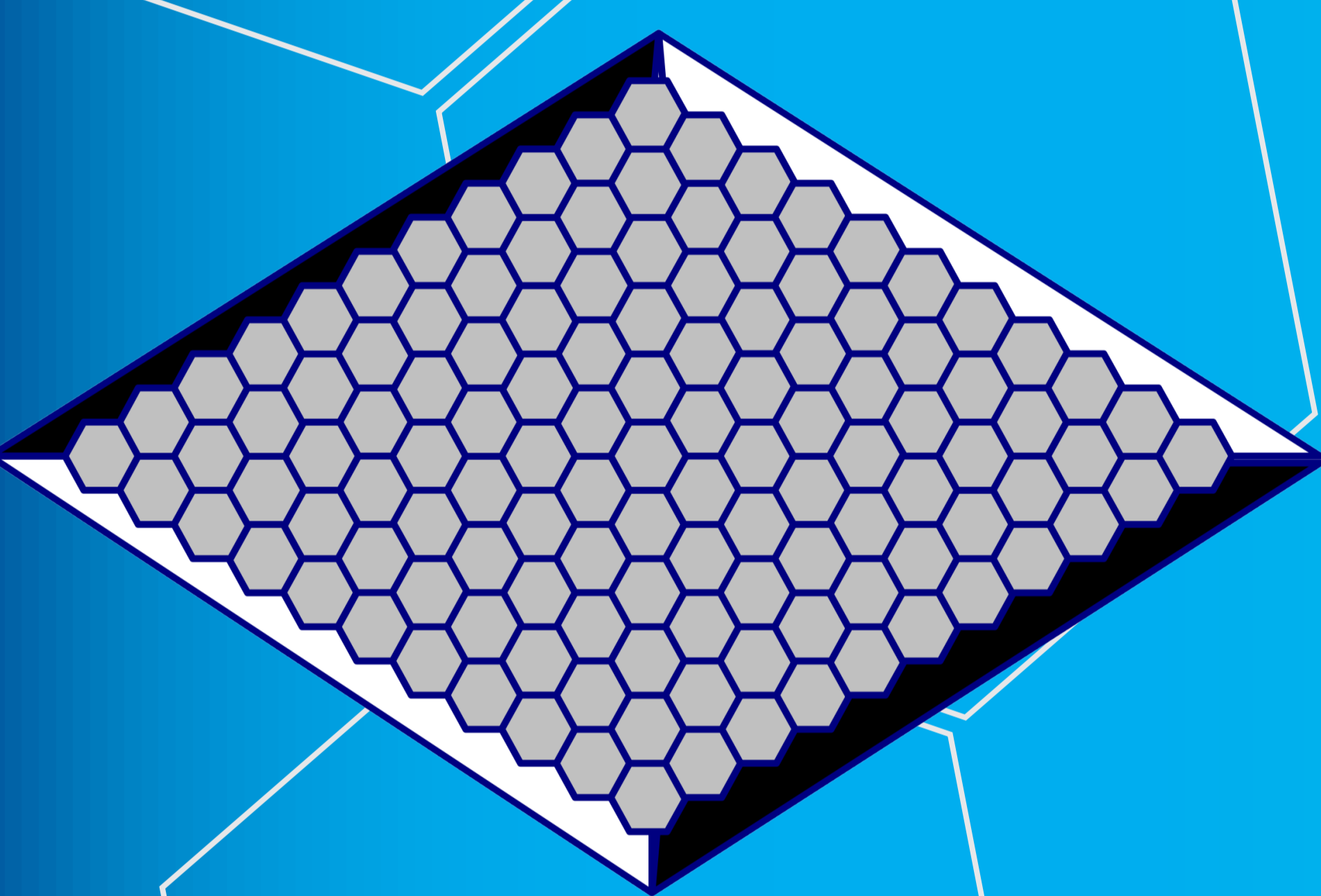
Le jeu de HEX

Jeu inventé par Piet Hein (physicien, mathématicien, designer, poète Danois) en 1942.

Principe du jeu

On joue à deux sur un plateau en forme de losange, pavé par des hexagones. A tour de rôle, chaque joueur place un pion de sa couleur sur n'importe quelle case libre. Deux des côtés opposés du plateau sont blancs, les autres étant noirs. Pour gagner, il faut relier les deux côtés de sa couleur par une chaîne ininterrompue de pions (par ex. sur le deuxième dessin, le joueur blanc gagne). On peut jouer sur des losanges de taille variable ; la récente édition du jeu par le Comité International des Jeux Mathématiques contient, par exemple, des plateaux de taille 9x9, 11x11, 14x14 et 19x19.

Ce jeu a été redécouvert et étudié par le mathématicien John F. Nash (USA) dans le cadre de la *théorie des jeux* mais aussi en *topologie* et en *géométrie algébrique*.



Propriétés du jeu

Il y a toujours un vainqueur et un perdant. Pour s'en convaincre, il suffit de raisonner par contradiction : s'il y avait égalité, toutes les cases seraient occupées par un pion noir ou blanc. On considère alors l'ensemble B des cases des pions blancs reliés au côté blanc en bas à gauche par un chemin de pions blancs (les mathématiciens parleraient d'une « composante connexe » de l'ensemble des pions blancs). Si l'un des pions de B touche l'autre côté blanc, les blancs ont gagné. Sinon, l'ensemble B est bordé par un chemin de pions noirs reliant les deux côtés noirs, et les noirs ont gagné. Dans les deux cas, il n'y a pas de match nul.

En poussant le raisonnement précédent, on peut montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs, c'est-à-dire une méthode de jeu qui permet de gagner à coup sûr. Par contre, on peut prouver que le second joueur (pions noirs) n'a pas de stratégie gagnante (voir preuve plus loin). On en déduit que le joueur qui débute la partie a toujours une stratégie gagnante.

Ces résultats sont obtenus par raisonnement par contradiction et non par construction. Ainsi, on ne connaît pas explicitement de stratégie gagnante pour de grands plateaux. Jin Yang, informaticien à l'université du Manitoba (Canada), a cependant réussi à détailler des stratégies gagnantes pour les blancs jusqu'à la taille 9x9. On ne connaît actuellement presque rien pour les tailles supérieures. Stefan Reisch a montré, en 1981, que la recherche d'une stratégie gagnante pour le jeu de Hex est au moins aussi difficile que tous les problèmes de la fameuse classe de complexité NP.

Le second joueur n'a pas de stratégie gagnante. On utilise de nouveau un raisonnement par contradiction pour le démontrer. Supposons qu'il ait une stratégie gagnante, l'idée est alors d'appliquer cette stratégie au premier joueur. Le premier pose son pion blanc n'importe où, puis le second joue selon sa stratégie. Ensuite le premier joueur applique la même stratégie comme s'il jouait avec des pions noirs. Si la stratégie demande de placer le pion sur la case occupée par le premier pion blanc, le joueur choisit une autre case libre. Comme la stratégie mène systématiquement à la victoire, à partir d'un moment le second joueur perd : contradiction.

Référence

Frédéric Le Roux, « Le jeu de Hex » - Images des Mathématiques, CNRS, 2012.