Mesures ergodiques sur des sous-shifts

Encadrant: Fabien Durand

Le sujet proposé est une introduction aux systèmes dynamiques définis sur $A^{\mathbb{Z}}$ où A est un alphabet fini (il s'agit donc de l'ensemble des suites que l'on peut construire sur l'alphabet A). Dans ce contexte, on entend par système dynamique symbolique tout couple (X, S) où X est un compact de $A^{\mathbb{Z}}$ et S l'application de décalage:

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Pour étudier un tel couple il peut être intéressant de considérer des mesures μ invariantes par S: $\mu(S^{-1}(B)) = \mu(B)$ pour tout borélien B de $A^{\mathbb{Z}}$. Une telle mesure existe et la preuve d'une telle existence fait un joli développement pour des leçons de l'agrégation de mathématiques (Théorème de Krylov-Bogolioubov). Plus intéressantes encore sont les mesures ergodiques: μ est ergodique si chaque fois que $S^{-1}A = A$ (en dehors d'un ensemble de mesure nulle) on a $A = X$ ou $A = \emptyset$. Là encore de telles mesures existent, elles sont données par le Théorème de Krein-Milman. Ces résultats étant établis, certains systèmes dynamiques seront étudiés afin de borner le nombre de mesures ergodiques.

La première partie de ce mémoire sera axée sur l'analyse fonctionnelle, la seconde partie sera plus combinatoire et servira également d'introduction à la combinatoire des mots.

Bibliographie : S. Ferenczi, T. Monteil, Infinite words with uniform frequencies, and invariant measures, Chapitre 7 de Combinatorics, Automata and Number Theory .