Sujet : Fonctions sous-harmoniques et théorie du potentiel dans le plan

Thomas Gauthier

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que u est *harmonique* sur Ω si son Laplacien est nul, i.e. si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ sur } \Omega \ .$$

Les fonctions harmoniques sont connues pour avoir un certain nombre de propriétés. Par exemple, elles vérifient la formule de la moyenne en tout point z_0 de Ω, i.e. si $r > 0$ est suffisament petit pour que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset \Omega$, alors

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \ ,$$

et sont automatiquement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Lorsque Ω est un simplement connexe, on peut également toujours écrire $u = \Re e(f)$, où f est une fonction holomorphe sur Ω.

Le but du mémoire est d'étudier à la notion de fonction *sous-harmonique* qui généralise celle de fonction harmonique : $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est sous-harmonique sur Ω si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et pour tout $z_0 \in \Omega$, et tout r assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset \Omega$,

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \ .$$

On établira les principales propriétés des fonctions sous-harmoniques, notamment les liens avec les fonctions holomorphes. On pourra ensuite, si le temps le permet, s'intéresser à la résolution du problème de Dirichlet : étant donnés un ouvert connexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ et une fonction continue $h : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, trouver toutes les fonctions u harmoniques sur Ω et continues sur $\overline{\Omega}$ telles que $u = h$ sur $\partial\Omega$.

Références

[1] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.