Mémoire de Maîtrise sur le thème **Dynamique topologique et Théorème de van der Waerden** dirigé par Fabien Durand

1. But du mémoire.

L'objet de ce mémoire est de comprendre l'une des preuves du résultat qui suit et via ce travail acquérir quelques bases en dynamique topologique.

Théorème de van der Waerden. *Soit $N_1, \cdots, N_l$ une partition de $\mathbb{N}$. Il existe $i \in \{1, \cdots, l\}$ tel que N_i contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Ce résultat fut prouvé en 1927 par B. L. van der Waerden et fut qualifié en 1948 par A. I. Khintchine de l'une des "three pearls of number theory".
En 1978 H. Furstenberg et B. Weiss ont obtenu le Théorème de van der Waerden en corollaire du résultat topologique suivant :

Théorème de Furstenberg-Weiss. *Soient (X, d) un espace métrique compact, T un homéomorphisme de X et $c_1, \cdots, c_l$ des entiers. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$d(T^{nc_i}x, x) < \epsilon, \ \forall i \in \{1, \cdots, l\}.$$

Il faudra étudier et comprendre l'une des preuves de ce résultat, puis expliquer les raisons pour lesquelles le Théorème de van der Waerden en est une conséquence.

2. Documents de travail.

Le travail aura pour base un article récent (1996) de V. Bergelson et A. Leibman [BL] dans lequel est prouvé un résultat plus général que le Théorème de Furstenberg-Weiss. C'est la preuve de ce résultat que vous étudierez, dans le cadre moins général du Théorème de Furstenberg-Weiss. Dans cet article est egalement expliqué pour quelles raisons le Théorème de van der Waerden est un corollaire du Théorème de Furstenberg-Weiss.

3. Prérequis.

L'unique prérequis est une bonne maîtrise de la topologie métrique.
L'article sur lequel le travail est basé est écrit en anglais. Cela représente un petite difficulté supplémentaire toutefois il faut savoir que l'anglais utilisé en mathématiques est assez "rudimentaire" (si on le compare à de l'anglais littéraire).

4. Bibliographie.

[BL] V. Bergelson and Leibman, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 9, Number 3, July 1996.