

Exercices sur les polynômes II : polynômes symétriques, résultant.

- Soient x_1, x_2, x_3 les racines dans \mathbb{C} du polynôme $X^3 - X^2 + X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ et $x_2 + x_3$ sont les racines d'un polynôme de degré 3 de $\mathbb{Q}[X]$ et calculer ce polynôme.
- On veut prouver le théorème suivant : si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible, unitaire différent de X et a toutes ses racines dans \mathbb{C} de module au plus égal à 1 alors f est un polynôme cyclotomique.
 - En considérant le produit des racines de P , montrer que les racines de P sont toutes de module égal à 1.
 - Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P et soit q un entier plus grand que 1. On considère le polynôme $P_q = \prod_i (X - \alpha_i^q)$. Montrer que $P_q \in \mathbb{Z}[X]$ et que pour tout j le coefficient de X^j dans P_q a un module majoré par $\binom{n}{j}$.
 - Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes q et q' telles que $P_q = P_{q'}$. En déduire que les racines de P sont des racines de l'unité, puis en déduire le théorème.
- Soit A un anneau commutatif intègre et $P \in A[X, Y]$ un polynôme à deux variables. Montrer que si $P(X, X) = 0$ alors P est multiple de $X - Y$ dans $A[X, Y]$.
- Soit A un anneau commutatif. Pour $P = \sum_{i=0}^{i=m} a_i T^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{j=n} b_j T^j$ dans $A[T]$, avec a_m et b_n non nuls, on considère le déterminant de taille $m + n$ (appelé résultant des polynômes)

$$D(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

où dans les n premières lignes apparaissent les coefficients de P et dans les m dernières lignes les coefficients de Q .

- On prend $A = \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_m, Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$, un anneau de polynômes à $m + n + 2$ variables et on prend $P = \sum_{i=0}^{i=m} X_i T^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{j=n} Y_j T^j$. Montrer que le coefficient de $X_0^n Y_n^m$ dans $D(P, Q)$ vaut 1 et que $D(P, Q)$ peut s'écrire $RP + SQ$ où R et S sont dans $A[T]$ (on pourra faire des combinaisons linéaires de colonnes).

- b) En déduire que pour tout anneau A commutatif et tous polynômes P et Q dans $A[T]$ on a $D(P, Q) = rP + sQ$ avec r et s dans $A[T]$.
- c) On prend pour A un corps commutatif K . Montrer que si P et Q dans $K[T]$ ont un facteur commun non constant alors $D(P, Q) = 0$.
- d) On prend pour A l'anneau de polynômes à $2n$ variables $\mathbb{Z}[U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_n]$; on prend $P = \prod_{i=1}^{i=m} (T - U_i)$ et $Q = \prod_{j=1}^{j=n} (T - V_j)$. Montrer que $D(P, Q)$ est homogène de degré mn . Montrer que

$$D(P, Q) = \prod_{i,j} (V_j - U_i) = (-1)^{mn} \prod_i Q(U_i) = \prod_j P(V_j)$$

(on se servira de l'exercice 3). En déduire que si P et Q sont deux polynômes de $K[T]$ tels que $D(P, Q) = 0$ alors ils ont une racine commune dans une extension de K (on pourra prendre un corps de décomposition des deux polynômes).