Département de Mathématiques
Préparation à l'agrégation

Exercices sur les polynômes

1. Le polynôme X^4+1 est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? et dans $\mathbb{Q}[X]$?
2. Soient m et n deux entiers strictement positifs ; quel est le pgcd des polynômes X^n-1 et X^m-1 dans $\mathbb{Q}[X]$?
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes Q et R à coefficients réels tesl que $P = Q^2 + R^2$ (raisonner sur les racines de P et montrer que $P = S\overline{S}$ où $S \in \mathbb{C}[X]$).
4. Quels sont les polynômes irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$?
5. Les polynômes X^4+1, X^4+X^2+1, X^4-3X^2+1 sont-ils irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$?
6. Soit A un anneau intègre ; montrer que tout automorphisme de $A[X]$ est de la forme $P \mapsto P(aX+b)$ où a et b sont des éléments fixés de A avec a inversible.
7. Soit K un corps commutatif ; montrer que tout automorphisme du corps des franctions rationnelles $K(X)$ envoie X sur une fraction de la forme $\dfrac{aX+b}{cX+d}$ où $ad-bc \neq 0$ (indication : si l'image de X par un automorphisme est P/Q avec P et Q premiers entre eux et si l'image de X par l'automorphisme inverse est A/B, on peut écrire $X = \dfrac{A(P/Q)}{B(P/Q)}$ et en déduire que le degré de Q est au plus 1. En composant avec $X \mapsto 1/X$ on en déduit la même propriété pour P).
8. On fixe un entier q puissance d'un nombre premier. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\psi(n)$ le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n dans $\mathbb{F}_q[X]$, où $\mathbb{F}_q$ est le corps à q éléments. Montrer que $n\psi(n)$ est le nombre d'éléments de $\mathbb{F}_{q^n}$ qui ne sont dans aucun sous-corps propre de $\mathbb{F}_{q^n}$. En déduire que $\sum_{d|n} d\psi(d) = q^n$.
9. a) Soit K un corps commutatif. Montrer que l'application $\varphi : K[X,Y] \to K[T]$ qui envoie $P(X,Y)$ sur $P(T^2,T^3)$ est un homomorphisme d'anneaux. Quel est son image et quel est son noyau ? (indication : montrer que modulo Y^2-X^3 tout polynôme de $K[X,Y]$ a un représentant de la forme $A_0 + A_1X + \cdots + A_nX^n$ où pour tout i A_i est un polynôme de $K[Y]$ de la forme $a_i + b_iY$).
   b) Montrer que l'image de φ n'est pas un anneau factoriel (montrer que T^2 et T^3 sont irréductibles dans cet anneau et considérer le polynôme T^6).