Département de mathématiques
Préparation à l'agrégation

Exercices sur les groupes II

On considère le groupe symétrique S_n et on note s_i la transposition $(i, i+1)$ pour $i = 1\dots, n-1$. Pour $w \in S_n$ on dit que $\{i,j\}$ présente une inversion si $i-j$ et $w(i)-w(j)$ sont de signe opposés. Un des but de cet suite de questions est d'étudier le rapport entre le nombre d'inversions d'une permutation w et son écriture comme produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$.

1. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1\dots, n-1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2 \\ s_i sj = s_j s_i & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

2. Quel est le nombre N maximum d'inversions possible pour un élément de S_n ? Combien y a-t-il de permutations ayant N inversions ?
3. Montrer que si $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ alors k est au moins égal au nombre d'inversions de w.
4. Montrer que le nombre d'inversions de ws_i est un de moins ou un de plus que celui de w suivant que $\{i, i+1\}$ présente ou ne présente pas d'inversion dans w.
5. Montrer que si $\{i, i+1\}$ présente une inversion dans w alors on peut écrire $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ où k est le nombre d'inversions de w et $s_{i_k} = (i, i+1)$ (faire une récurrence sur le nombre d'inversions de w).
6. Soit G un groupe engendré par des éléments σ_i pour $i = 1, \dots, n-1$ qui vérifient les relations

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1\dots, n-1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

   On suppose qu'il existe un morphisme de groupes $f : G \to S_n$ tel que $f(\sigma_i) = s_i$ pour tout i. Montrer que f est un isomorphisme (Indication : considérer un élément non trivial du noyau qui soit produit du plus petit nombre possible de σ_i ; soit $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$ cet élément ; son image $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ vaut 1 ; montrer qu'il existe h tel que $s_{i_1} \dots s_{i_h}$ ait moins d'inversions que $s_{i_1} \dots s_{i_{h-1}}$ et en déduire une contradiction en utilisant la question 5).