

### Exercices sur les groupes

1. Déterminer le groupe des automorphismes des groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, S_3.$$

Pour chacun de ces groupes déterminer le sous-groupe des automorphismes intérieurs (c'est-à-dire donnés par la conjugaison par un élément  $g$  du groupe :  $x \mapsto gxg^{-1}$ ).

2. Soit  $G$  un groupe d'ordre 10 et  $H$  un groupe d'ordre 5. Combien y a-t-il d'homomorphismes de  $H$  dans  $G$ ? Combien y en a-t-il d'injectifs? À quelle condition existe-t-il un homomorphisme non trivial de  $G$  dans  $H$ ? Dans ce cas combien y en a-t-il?
3. Quels sont les automorphismes du groupe additif  $\mathbb{Z}$ ?
4. Décrire les classes de conjugaison du groupe symétrique  $S_n$ . Montrer que si  $g$  est un élément du groupe alterné  $A_n$ , sa classe de conjugaison dans  $S_n$  est ou bien égale à sa classe de conjugaison dans  $A_n$  ou bien union de deux classes de conjugaison de  $A_n$ , suivant qu'il existe ou non un élément de  $S_n - A_n$  qui commute avec  $g$  (on utilisera le centralisateur de  $g$  dans  $S_n$ , c'est-à-dire le groupe des éléments de  $S_n$  qui commutent avec  $g$ , et on le comparera au centralisateur de  $g$  dans  $A_n$ ).
5. Appliquer les théorèmes de Sylow à un groupe d'ordre 15, d'ordre 18. Que peut-on en déduire?
6. Montrer en utilisant l'équation des classes que si  $p$  est le plus petit entier strictement supérieur à 1 qui divise l'ordre d'un groupe fini  $G \neq \{1\}$  et que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  d'indice  $p$ , alors  $H$  est normal dans  $G$ .
7. Soit  $G$  un groupe d'ordre 255.
  - a) Montrer que  $G$  a un seul sous-groupe  $H$  d'ordre 17.
  - b) Soit  $K$  un sous-groupe d'ordre 5 de  $G$ . Montrer que  $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$  est un sous-groupe de  $G$  et qu'il ne contient qu'un sous-groupe d'ordre 5. En déduire que  $HK$  est le produit direct de  $H$  et  $K$ .
  - c) Soit  $L$  un sous-groupe de  $G$  d'ordre 3; montrer par un raisonnement analogue que  $HL$  est un sous-groupe de  $G$  et qu'il est produit direct de  $H$  et  $L$  (utiliser l'exercice 6 ci-dessus). Pourquoi ne peut-on pas faire un raisonnement analogue sur  $K$  et  $L$ ?
  - d) Montrer que le quotient  $G/H$  est produit direct de l'image de  $K$  et de l'image de  $L$ . En déduire que si  $k \in K$  et  $l \in L$  alors  $klk^{-1}l^{-1} \in H$ . En déduire en calculant

$l(hk)l^{-1}$  pour  $h \in H$ ,  $k \in K$  et  $l \in L$  que  $HK$  est normal dans  $G$ . En déduire que  $K$  est normal dans  $G$ .

- e) Montrer que  $G$  est le produit direct de  $H$ ,  $K$  et  $L$ , puis que  $G$  est cyclique.
8. Énumérer tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7, à isomorphisme près.
9. a) Combien y a-t-il de groupes commutatifs d'ordre 8 à isomorphisme près?  
b) Montrer qu'un groupe non commutatif  $G$  d'ordre 8 contient nécessairement un élément d'ordre 4. Montrer que le sous-groupe de  $G$  engendré par un élément d'ordre 4 est normal. Montrer si  $g$  et  $h$  dans  $G$  sont d'ordre 4 alors  $g^2 = h^2$ .  
c) Soit  $G$  un groupe non commutatif d'ordre 8; montrer que si  $g \in G$  est d'ordre 4 et si  $x$  est un élément d'ordre 2 distinct de  $g^2$  alors  $x$  et  $g$  ne commutent pas (utiliser le fait que  $G$  n'est pas commutatif). En déduire que dans ce cas  $xgx = g^{-1}$  et que  $G$  est isomorphe au groupe diédral d'ordre 8. Montrer que s'il n'existe pas d'élément d'ordre 2 autre que  $g^2$  alors  $G$  est la réunion de trois sous-groupes cycliques d'ordre 4 engendrés respectivement par des éléments  $g, h, k$  qui vérifient  $gh = k, hk = g, kg = h$  et  $g^2 = h^2 = k^2$ .
10. Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que tout élément d'ordre fini d'un groupe  $G$  s'écrit de façon unique  $su$  où  $s$  est un élément d'ordre premier à  $p$ , où  $u$  est d'ordre une puissance de  $p$  et où l'on a  $su = us$ .
- 11 Montrer que si  $G$  est un groupe fini opérant sur un ensemble fini  $X$ , le nombre d'orbites est égal à  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$  (formule de Burnside).
- 12 En appliquant le résultat de l'exercice précédent au groupe des isométries directes de  $\mathbb{R}^3$  conservant un cube, dénombrer le nombre de façon de colorier un cube avec trois couleurs, à isométrie directe près.
- 13 Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe différent de  $G$ . On veut montrer qu'il existe une classe de conjugaison de  $G$  qui ne rencontre pas  $H$  : à l'aide de la formule des classes, montrer que si toute classe de conjugaison de  $G$  rencontre  $H$ , alors les centralisateurs dans  $G$  et dans  $H$  d'un élément quelconque de  $H$  ont même cardinal. En déduire une contradiction.
14. Soit  $G$  un groupe fini et  $p$  le plus petit nombre premier divisant  $|G|$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'indice  $p$ . En faisant opérer  $H$  par conjugaison sur l'ensemble des conjugués de  $H$  dans  $G$  et en écrivant l'équation des classes, montrer que  $H$  est normal dans  $G$ . Appliquer ce résultat pour simplifier la question d) de l'exercice 6.
- 15 Soit  $k$  un entier fixé. On considère la permutation de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui envoie la classe modulo  $n$  de  $i$  sur la classe de  $i + k$ . Quelle est la signature de cette permutation ?