

Exercices sur les fractions rationnelles

Dans les exercices suivants K est un corps commutatif et $K(X)$ désigne le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K . Si $\alpha = P/Q$ est une fraction rationnelle avec P et Q deux polynômes premiers entre eux, on appelle degré de α le maximum des degrés de P et Q .

I

1. Soit α une fraction rationnelle non constante. On considère l'anneau $K[\alpha]$ des polynômes en α . Montrer qu'il est isomorphe à $K[X]$. Dans la suite on note $K(\alpha)$ son corps des fractions (isomorphe à $K(X)$).
2. Soit $\alpha \in K(X)$ de degré $n > 0$. On écrit $\alpha = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont dans $K[X]$ et sont premiers entre eux. Montrer que X est racine du polynôme $P(T) - \alpha Q(T)$ de $K(\alpha)[T]$. Montrer que ce polynôme est de degré n .
3. Montrer que le polynôme $P(T) - \alpha Q(T)$ est un polynôme irréductible de $K(\alpha)[T]$ (on pourra montrer d'abord qu'il est irréductible dans $K[\alpha][T]$, puis utiliser que $K[\alpha]$ est un anneau principal). En déduire que l'extension $K(X)$ de $K(\alpha)$ est de degré n .
4. Soit φ un automorphisme du corps $K(X)$. On note $\alpha = \varphi(X)$ l'image de X par φ . En utilisant la question précédente montrer que α est nécessairement de degré 1. En déduire quel sont les automorphismes de $K(X)$.

II

On dit qu'une série formelle $F(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ à coefficients dans K est égale à une fraction rationnelle $\frac{P}{Q} \in K(X)$ avec P et Q dans $K[X]$, si $QF = P$ dans l'anneau des séries formelles.

1. Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, avec P et Q dans $K[X]$ premiers entre eux. À quelle condition sur Q existe-t-il une série formelle égale à $\frac{P}{Q}$?
2. Soit $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ une série formelle à coefficients dans K . Montrer que F est égale à une fraction rationnelle si et seulement si il existe des entiers $m, n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq m$, et des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ dans K tels que $\lambda_0 a_p + \lambda_1 a_{p-1} + \dots + \lambda_m a_{p-m} = 0$ pour tout $p \geq n$.