Homographies, birapports, nombres complexes et géomt́rie.

Devoir à rendre pour la première séance de géometrie avec moi en mars

Quelques références (liste bien sûr personnelle et non exhaustive)
Alessandri, *thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique*
Vidonne *Groupe circulaire, rotations et quaternions*
Audin, *Géométrie ..*
Trignan, *La géométrie des nombres complexes*
Goblot þèmes de géométrie
Il est utile de consulter ces références pour les exercices que vous n'arriverez pas à finir.

1 Homographies et birapports

1.1 Exercices élémentaires

Exercice 1 (Le groupe des homographies) *On appelle* homographie *une application de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *de la forme* $h : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$*, où* a, b, c, d *sont des nombres complexes tq* $ad - bc \neq 0$.
1) *Quel est l'ensemble de définition, et l'image d'une homographie ?*
2) *Rappeler la définition de la droite projective complexe* $P^1(C)$.
3) *Montrer qu'une homographie se prolonge naturellement en une bijection de* $¶^1(\mathbb{C})$ *dans* $¶^1(C)$.
4) *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{H}$ *des homographies possède une structure naturelle de groupe, et que ce groupe est engendré par les similitudes directes et l'application* $z \mapsto 1/z$.
5) *On considère l'application de* $GL_2(\mathbb{C})$ *dans* $\mathcal{H}$ *définie par*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left\{ h : z \in P^1(\mathbb{C}) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$$

Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Déterminer son image et son noyau.

Exercice 2 (Birapport) **1)** *Soient* a, b, c *trois points distincts de* $P^1(\mathbb{C})$. *Montrer qu'il existe une unique homographie qui envoie* a *sur* 0, b *sur* 1, c *sur* ∞. *On supposera pour simplifier que* a, b, c *sont dans* $\mathbb{C}$.

Soient a, b, c, d *quatre éléments de* $P^1(\mathbb{C})$ *dont les trois premiers sont deux à deux distincts. Soit* h *l'unique homographie qui envoie* a *sur* 0, b *sur* 1, c *sur* ∞. *Le* birapport *des quatre points, noté* $[a, b, c, d]$ *est l'image* $h(d) \in P^1(\mathbb{C})$ *de* d *par* h.
2) *Soit* $z \in P^1(\mathbb{C})$. *Calculer* $[0, 1, \infty, z]$.
3) *Montrer que le birapport est invariant par homographie, i.e. si* f *est une homographie, alors* $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$.
4) *Donnez une formule pour le birapport* $[a, b, c, d]$.

Exercice 3 (Symétries du birapport) *Soient* a, b, c, d *quatre points de* $P^1(\mathbb{C})$ *dont les trois premiers sont distincts.*
1) *Montrez que* $[c, d, a, b] = [a, b, c, d]$ *(considérez l'homographie* $z \mapsto \frac{h(d)}{h(z)}$*, où* h *est l'homographie envoyant* a *sur* 0, b *sur* 1, c *sur* ∞*).*
2) *Montrez que* $[a, d, c, b] = \frac{1}{[a,b,c,d]}$.
3) *Montrez que* $[b, a, c, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 4 *Montrez qu'une application* $f : P^1(\mathbb{C}) \to P^1(C)$ *qui laisse invariant le birapport de quatre points est une homographie.*

Exercice 5 (Cercles et birapports) *Dans* $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *la réunion d'une droite (réelle) de* $\mathbb{C}$ *et du point à l'infini est appelée* cercle de $P^1(\mathbb{C})$ passant par l'infini. *La famille des cercles de* $P^1(\mathbb{C})$ *est la famille des cercles ci-dessus et des cercles ordinaires de* $\mathbb{C}$. *Cette terminologie se justifie par exemple par le fait que la projection stéréographique envoie les cercles de* S^2 *sur les cercles de* $P^1(\mathbb{C})$ *ainsi définis.*

Nous allons montrer que les homographies préservent la famille des cercles de $P^1(\mathbb{C})$ *et en déduire une célèbre condition de cocyclicité de quatre points. Mise en garde: les homographies préservent les cercles mais pas leurs centres!*
1) *On veut montrer que pour tout cercle* C *de* $P^1(\mathbb{C})$ *et toute homographie* h, $h(C)$ *est un cercle. Montrez qu'il suffit d'établir ce résultat pour l'homographie* $h : z \mapsto \frac{1}{z}$.
2) *Montrer qu'on peut se ramener au cas où le cercle* C *est symétrique par rapport à l'axe réel (poser* $g(z) = e^{i\theta} z$ *et calculer* ghg*).*
3) *Montrer que* $h(C)$ *est un cercle, en distinguant quatre cas suivant que* 0 *et* ∞ *appartiennent ou pas au cercle* C.
4) *Montrer que quatre points* a, b, c, d *de* $\mathbb{C}$ *sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. (Ce résultat est un joli résultat pour les deux leçons.)*

Exercice 6 (Homographies du demi-plan) *A quelle-s condition-s une homographie de* $P^1(\mathbb{C})$ *préserve-t-elle l'axe réel? A quelle-s condition-s une homographie préserve-t-elle l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ *?*

Exercice 7 (Suites homographiques) *Voici un résultat classique (de mon temps en tout cas!), et puis assez passe partout*

1) *Soit g une homographie de $P^1(\mathbb{C})$. Combien peut-elle avoir de points fixes? Donner des exemples les plus simples possibles d'homographies dans chacun des cas possibles.*
2) *Si g a un unique point fixe α, étudier le comportement de la suite définie par $z_0 \in P^1(\mathbb{C})$ et $z_{n+1} = g(z_n)$ (on pourra considérer la suite $y_n = \frac{1}{z_n - \alpha}$).*
3) *Même question si g a deux points fixes. (Etudier d'abord la suite auxiliaire $y_n = \frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}$, où α et β sont les deux points fixes de g.)*

Exercice 8 (Involutions de $\mathcal{H}$) *Rappelons qu'une involution est une application $u \neq Id$ dont le carre $u^2 = Id$.*
1) *Montrer qu'une involution du groupe des homographies a nécessairement deux points fixes.*
2) *Soient α, β les deux points fixes de u, et soit $h_{\alpha,\beta}$ l'homographie définie par $h_{\alpha,\beta}(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Montrer qu'alors $u = h_{\alpha,\beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha,\beta})$.* **2bis** *Comparez $h_{\alpha,\beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha,\beta})$ et $h_{\beta,\alpha}^{-1} \circ (-h_{\beta,\alpha})$. Une involution u est-elle déterminée par la donnée de ses points fixes ?*
3) *Si $M \in PGL_2(\mathbb{C})$, on note h_M l'homographie associée. Montrez l'équivalence entre les propriétés suivantes:*

1. *h_M est une involution*
2. *Il existe deux points $\alpha, \beta \in P^1(\mathbb{C})$ tels que $\frac{h_M(z)-\alpha}{h_M(z)-\beta} = -\frac{z-\alpha}{z-\beta}$, pour tout $z \in P^1(\mathbb{C})$,*
3. *$tr(M) = 0$*
4. *h_M échange deux points : autrement dit, il existe $z \in P^1(\mathbb{C})$ tel que $h_M(z) \neq z$ et $h_M^2(z) = z$.*

4) *Soit u une involution de $\mathcal{H}$. Montrer qu'alors u est de la forme $z \mapsto -z + b$, $b \in \mathbb{C}$, ou bien $z \mapsto \frac{c}{z-a} + a$, $a, c \in \mathbb{C}$.*
5) *Montrer qu'une homographie est le produit d'au plus deux involutions.*

1.2 Inversions, groupe de Moebius et homographies

Dans ce paragraphe, un *cercle* est un cercle de $\mathbb{C}$ ou bien une droite rélle du plan complexe à laquelle on ajoute le point à l'infini de $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Le *groupe circulaire*, ou *groupe de Moebius*, noté $\mathcal{M}$ est le groupe des transformations de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même qui préservent les cercles.

Exercice 9 *Montrer qu'une transformation de $\mathcal{M}$ est de l'un des deux types suivants:*
• *une homographie $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$,*
• *une antihomographie $f : z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$,*
où dans les deux cas, a, b, c, d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

Exercice 10 (Transformations classiques du plan) **1)** *Comment s'écrit une rotation de centre C d'affixe z, et d'angle θ dans le plan complexe $\mathbb{C}$?*
2) *Comment s'écrit une symétrie d'axe vertical dans le plan complexe ? Et une symétrie d'axe quelconque?*
3) *Comment s'écrit une translation en complexes?*

Exercice 11 (Involutions de $\mathcal{M}$) *Soit u une involution de $\mathcal{M}$.*
1) *Montrer que si u fixe l'infini, u est une réflexion par rapport à une droite verticale. Sinon, montrer que u s'écrit $u(z) = a + c\frac{z-a}{|z-a|^2}$, où $a = u(\infty)$, et $c \in \mathbb{R}^*$.*
2) *Si u ne fixe pas l'infini, montrer qu'il existe un point P du plan, et un réel $c \neq 0$ tq $u(P) = \infty$ et pour tout $M \neq P$, $u(M) = M'$ ssi P, M, M' sont alignés et $\bar{PM}.\bar{PM'} = c$. On appelle u l'*inversion de pôle P et de puissance c.
2bis) *Que peut-on dire du cercle de centre P et de rayon $\sqrt{|c|}$?*
Remarquez (dessin!) que l'inversion de $P^1(\mathbb{C})$ de centre 0 et de puissance 1 s'obtient comme composée de la réciproque de la projection stéréographique par rapport au pôle nord de la sphère unité, avec la projection stéréographique par rapport au pôle sud de la même sphère. D'où son nom d'inversion.

Exercice 12 (Différentiation de l'inversion) *(A caser dans la leçon sur les applications différentiables, aussi!) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = a + c\frac{x-a}{\|x-a\|^2}$ de pôle a et de puissance c. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et calculer sa différentielle au point x. Montrer que la différentielle au point x est une similitude, composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à la perpendiculaire à $x - a$.*
2) *En déduire que si f est une inversion positive préservant le cercle C, et si $f(M) = M'$, alors tout cercle (ou droite) passant par M et M' est orthogonal à C.*

Exercice 13 *Décrire par des dessins les différentes possibilités lorsqu'on compose deux inversions ou réflexions orthogonales.*

Exercice 14 *Montrer que $\mathcal{M}$ est engendré par les inversions positives.*
Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{M}$.

1.3 Rotations de $\mathbb{R}^3$ et homographies

Exercice 15 *On identifie l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, on note S^2 sa sphère unité, et on identifie $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{C} \times \{0\}$. La projection stéréographique $\sigma : S^2 \to \mathbb{C} \cup \infty = P^1(\mathbb{C})$ est la projection depuis le pôle nord $N = (0_{\mathbb{C}}, 1)$ définie par $\sigma(M) = (MN) \cap \mathbb{C}$ et $\sigma(N) = \infty$.*
1) *On note (z, t) les coordonnées d'un point M de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$. Donnez l'expression de σ et σ^{-1} dans ces coordonnées.*
2) *On oriente le plan tangent en un point M de S^2 par la normale sortante en ce point; On note f_θ la rotation d'axe vertical $[ON)$ et d'angle θ, et g_φ la rotation d'axe $[OI)$ et d'angle φ, où $I = (1_{\mathbb{C}}, 0)$. Soit R une rotation d'axe $[0x)$ et d'angle ψ. Montrer qu'il existe θ, φ tq $x = (f_\theta \circ g_\varphi)(I)$. En déduire que $R = (f_\theta g_\varphi) \circ f_\psi \circ (f_\theta g_\varphi)^{-1}$.*
3) *Soit R une rotation de $SO(3, \mathbb{R})$, vue comme transformation de S^2 et $\tilde{R} = \sigma^{-1} \circ r \circ \sigma$ la bijection induite sur $\mathbb{C}$. Pourquoi est-il « clair » géométriquement - sans calcul - que $\tilde{R}$ appartient au groupe de Moebius $\mathcal{M}$.*
3bis) *Montrer que $\tilde{f_\theta}(z) = e^{i\theta} z$ et $\tilde{g_\varphi}(z) = -i \frac{z \cos(\varphi/2) + i \sin \varphi/2}{z \sin \varphi/2 - i \cos \varphi/2}$.*
4) *En déduire un morphisme de groupe injectif de $SO(3, \mathbb{R})$ dans $PSU(2, \mathbb{C}) \subset PGL(2, \mathbb{C})$.*

1.4 Homographies et espace des réseaux de $\mathbb{R}^2$

Exercice 16 *Faire le problème 1 d'Alessandri (corrigé dans le livre) sur l'action par homographies du groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ sur le demi-plan hyperbolique.*

1.5 Isométries de l'espace hyperbolique

Le demi-plan hyperbolique est $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, identifié à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. L'espace tangent $T\mathbb{H}$ à l'espace hyperbolique est l'ensemble des couples "point-vitesse" $T\mathbb{H} := \mathbb{H} \times \mathbb{R}^2$, où le couple (z, v) doit être pensé comme une vitesse v au point z.

La norme hyperbolique est définie par $\|(z, v)\|_{hyp} = \frac{|v|}{\mathrm{Im}(z)}$, où $|v|$ est la norme euclidienne de v. On notera $\|v\|_z$ la norme hyperbolique de v au point z.

Si $c : [a, b] \to \mathbb{H}$ est une courbe de classe C^1, la longueur hyperbolique de c est définie par $L_{hyp}(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)}\, dt$. La distance hyperbolique entre deux points z et z' sur $\mathbb{H}$ est définie par $d(z, z') = \inf L_{hyp}(c)$ où l'inf est pris sur l'ensemble des courbes C^1 $c : [a, b] \to \mathbb{H}$ tq $c(a) = z$ et $c(b) = z'$.

Exercice 17 (Groupe des isométries de $\mathbb{H}$) 1) *Vérifier qu'une homographie préserve $\mathbb{H}$ ssi elle est à coefficients réels.*
2) *Vérifier que les homographies préservent la norme hyperbolique, et en déduire que ce sont des isométries de $\mathbb{H}$ (au sens où elles préservent la distance).*
3) *Même question avec les antihomographies.*
4) *En déduire que le groupe des homographies est le groupe des isométries directes de $\mathbb{H}$ et que le groupe circulaire est le groupe des isométries de $\mathbb{H}$.*

Exercice 18 (Géodésiques de $\mathbb{H}$) *Une géodésique de $\mathbb{H}$ est une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ tq pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$. En d'autres termes, c'est une courbe qui est le plus court chemin entre deux quelconques des points de son image.*
1) *Montrer que si c est une géodésique de $\mathbb{H}$, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme C^1, alors $\gamma = c \circ \varphi$ est encore une géodésique de $\mathbb{H}$, de même image.*
2) *Soit $c : [a, b] \to \mathbb{H}$ définie par $c(t) = x(t) + iy(t)$, x et y étant deux fonctions C^1 à valeurs réelles, avec $x(a) = x(b) = 0$et $\gamma(t) = iy(t)$. Vérifier que $L(\gamma) \leq L(c)$.*
3) *En déduire que la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto ie^t$ est une géodésique de $\mathbb{H}$, et exprimer la distance entre deux points $z_1 = iy_1$ et $z_2 = iy_2$.*

Exercice 19 (Distance et birapport) *On souhaite exprimer la distance hyperbolique en termes de birapport.*
1) *Soient z, z' deux points distincts de $\mathbb{H}$, et a, a' dans $\mathbb{R} \times \{0\}$ les extrémités du demi-cercle passant par z et z' et centré sur l'axe réel horizontal (dans l'ordre a, z, z', a'). Montrer qu'il existe une homographie qui envoie a sur 0, z sur i, z' sur un imaginaire pur iy', et a' sur ∞.*
2) *Quelle est la distance entre i et iy' ? L'exprimer à l'aide du birapport des quatre points $0, i, iy'$ et ∞. En déduire la distance entre z et z', exprimée en termes de birapport.*

2 Nombres complexes et angles

Exercice 20 *Lire Vidonne, chapitre 3 et Goblot chapitre 3. Vérifiez que vous maitrisez les notions d'exponentielle complexe (voir aussi le préambule de Rudin, Real and complex analysis), de cosinus et sinus, de groupe des nombres complexes de module 1, de groupe des angles, de $SO(2, \mathbb{R})$, de mesure d'angles, ...*

3 Autres thèmes, non traités dans ce devoir, mais...

Qui auraient pu: par exemple, polynomes cyclotomiques, racines n-ièmes de l'unité, polygones réguliers, nombres constructibles à la règle et au compas, et autres jolis problèmes de géométrie sont des thèmes pertinents dans les applications