

Suites et séries de fonctions, intégration (autour des leçons 235,239, 241)

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez que $\int_{[a,b]} f(t)e^{int} dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que la suite de polynômes $\sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ converge uniformément vers f .

Indication: **1)** Considérer une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes (X_n) de paramètre p . Vérifier que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale.

2) Enoncer la loi faible des grands nombres pour les (X_n) . Majorer $P(|\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon|)$ indépendamment de p par une quantité tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

3) A $p \in [0, 1]$ fixé, majorer la quantité $|f(p) - E(f(\frac{S_n}{n}))|$ en distinguant les k/n proches de p ($|k/n - p| \leq \eta$) et les k/n loin de p ($|k/n - p| \geq \eta$), puis conclure.

Exercice 3 (Méthode de Laplace) Soit f une fonction C^∞ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit $k \in \mathbb{N}$ le premier entier tq $f^{(k)}(0) \neq 0$. On cherche un équivalent de $I(\lambda) = \int_0^1 (1-t^2)^\lambda f(t) dt$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. On pourra suivre la stratégie suivante.

1) Trouver un équivalent simple de $(1-t^2)^\lambda f(t)$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

2) Si $\varphi(t, \lambda)$ est l'équivalent trouvé ci-dessus, trouver un équivalent simple de $J(\lambda) = \int_0^1 \varphi(t, \lambda) dt$. **3)** Montrer que $J(\lambda) = I(\lambda)$.

Exercice 4 (Lemme de Gronwall) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue positive.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tq pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \leq a \int_0^t f(u) du$. Que vaut f ?

2) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive continue tq pour tout $x \geq 1$, on ait $f(x) \leq a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt + b$. Trouver un majorant simple de f .

Exercice 5 Soit f_n la fonction affine ar morceaux et continue, nulle en dehors de $[0, 2/n]$, qui va de 0 à 1 sur $[0, 1/n]$ puis redescend. Soit $m \rightarrow r_m$ une bijection de \mathbb{N}^* sur \mathbb{Q} . Soit $g_n(t) = \sum_{m=1}^\infty \frac{f_n(\frac{t-r_m}{2^m})}{2^m}$.

1) Montrer que g_n est continue.

2) Etudier la convergence simple et uniforme de g_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 (Théorème d'Ascoli) **1)** Enoncer et démontrer le théorème d'Ascoli.

2) Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \rightarrow X$ une application continue, $f : X \rightarrow X$ une application continue. On définit sa moyenne de Birkhoff par $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$. Montrer que la famille $(S_n(f))$ est équicontinue.

Exercice 7 (Étude d'une fonction définie par une intégrale)

Exercice 8 (Séries entières)

Exercice 9 (Séries de Fourier)