

**Suites, exercices.**  
**Devoir à préparer pour le 22 septembre 2009**

**Un peu de méthodologie**

Pour l'écrit vous avez besoin d'être très entraînés et de connaître une ribambelle d'exos « classiques ». Le seul (mais sérieux) handicap des étudiants de l'université par rapport aux anciens de prépa+écoles normales supérieures n'est pas dans les connaissances théoriques mais dans l'entraînement.

\* Cherchez tous les exos de ce devoir (au moins p1 et 2 pour le 22/09). (Non, ce n'est pas une blague, c'est la prepa agreg...)

\* Puis confrontez vos solutions entre vous, et cherchez éventuellement les solutions dans des livres d'exos corrigés classiques.

\* Si aucun de vous ne trouve d'indice, dans un livre, cours, ..., ou si vous avez une question n'hésitez surtout pas à m'écrire [barbara.schapira@u-picardie.fr](mailto:barbara.schapira@u-picardie.fr)

\* Enfin, apprenez les solutions. Vous devez les faire et refaire jusqu'à ce que la méthode soit un automatisme pour vous.

Pour l'oral, il y a une liste de « leçons », sur lesquelles il faudra avoir quelque chose à dire. Il est inutile et absurde (sauf pour les étudiants extraterrestres) d'imaginer toutes les préparer avant l'agreg. Ça serait au détriment de la qualité ou de la préparation à l'écrit. Pour chaque leçon, dès le début de l'année, prévoir une petite fiche, ou une page dans un carnet. Au fil de l'année vous y noterez 1) les livres utiles pour imaginer un plan, 2) les idées d'exemples ou applications, ou illustrations originales, etc, avec les livres où vous les avez vues et 3) des idées de développements, ie des résultats/exemples/applications que vous traiterez en détail à l'oral, toujours avec la référence à un livre.

Ensuite, avant les oraux, vous apprendrez ces fiches (liste de livres, de développements, etc) par coeur.

**Sur les suites**

Pour faire ce devoir, et plus tard préparer les leçons sur les suites (Suites convergentes, comportement asymptotique de suites et suites récurrentes), il vous faudra réviser dans des livres (Cours, résultats classiques, et beaucoup d'exemples et de contre exemples).

Les paragraphes ci-dessous ne correspondent absolument pas à un plan de leçon, mais à quelques sujets importants.

## Équivalents de suites, développements asymptotiques

**Exercice 1 (Série harmonique)** Trouver un équivalent, puis les trois premiers termes du développement asymptotique de  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Exercice 2** Étude, puis équivalent de  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ ,  $u_0 > 0$ ?  
Même question avec  $v_0 \in \mathbb{R}$  et  $v_{n+1} = v_n + e^{-v_n}$ .

**Exercice 3** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in [0, \pi/2[$  et  $u_{n+1} = \sin u_n$ . En étudiant la quantité  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n}$ , trouver un équivalent de  $\sin u_n$ , puis donner un développement asymptotique à deux termes de la suite.

**Exercice 4** Par le même raisonnement, trouver un équivalent de la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $u_n \rightarrow 0$ ,  $f(x) = x - Ax^\alpha + o(x^\alpha)$  au voisinage de 0.

**Exercice 5 (Formule de Stirling)** Démontrer que  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ . Donner les premiers termes de son développement asymptotique. Utiliser par exemple les intégrales de Wallis  $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$  pour obtenir  $\sqrt{2\pi}$

**Exercice 6** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ . Donner un équivalent, puis le deuxième terme du développement asymptotique.

**Exercice 7** Même question avec  $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$  et  $u_1 = 1$ .

**Exercice 8** Même question avec la suite définie implicitement par  $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ .

## Suites récurrentes

**Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires)** Comment étudie-t-on une suite de la forme  $u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_d u_{n+d}$ , où les  $(a_i)_{0 \leq i \leq d}$  sont des constantes, et  $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$  sont données.

**Exercice 10** Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ . Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Soit  $(z_n)$  la suite définie par récurrence par  $z_{n+1} = S(z_n)$  avec  $S(z) = \alpha z + \frac{\beta}{z}$ . On suppose que  $(z_n)$  est définie pour tout  $n \geq 0$ .

1. On suppose  $z_0$  imaginaire pur. Étudier le comportement de  $(z_n)$ .

2. On suppose maintenant  $\text{Re}(z_0) > 0$ . Montrer que  $z_n \rightarrow 1$ .

**Exercice 11 (Suite de Syracuse)** Elle est définie par  $u_0 \in \mathbb{N}$  et  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  si  $u_n$  est impair,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$  si  $u_n$  est pair. Testez la sur quelques exemples? Que se passe-t-il? (par exemple  $u_0 = 5$ ,  $u_0 = 13$ ,  $u_0 = 79\dots$ ) Plus d'infos sur <http://wikipedia.fr> (ou [www.enigmath.fr](http://www.enigmath.fr) si ça vous amuse)

**Exercice 12** Soit  $(u_n)$  une suite récurrente ( $u_{n+1} = f(u_n)$ ) avec  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer qu'elle converge ssi  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 13** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$ , avec  $\lambda \in ]0, 1[$  et  $u_0 \in ]0, 1[$ .  
Même question avec  $v_0 \in \mathbb{R}$  et  $v_{n+1} = 2 - v_n^2$ .

Que peut-on dire de la suite définie par  $w_0 \in \mathbb{R}$  et  $w_{n+1} = aw_n(1 - w_n)$ ,  $0 \leq a \leq 4$ . Discuter.

**Exercice 14** Énoncer le théorème du point fixe pour les applications contractantes, avec vitesses de convergence. Démonstration? Exemples d'application?

## Convergence en moyenne de Cesàro

**Exercice 15** Soit  $(a_n)$  une suite de nombres positifs, bornés. Montrer que  $(a_n)$  tend vers 0 en moyenne de Cesàro (i.e.  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow 0$ ) si et seulement si il existe une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  de densité nulle (i.e. t.q  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#A \cap [0, n-1]}{n} \rightarrow 0$ ) en dehors de laquelle  $(a_n)$  converge vers 0:  $\lim_{n \rightarrow \infty, n \notin A} a_n = 0$ .

Autrement dit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en moyenne de Cesàro ssi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus A}$  converge, pour  $A$  très petit (de densité nulle).

**Exercice 16 (Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue; soit  $v_0 \in \mathbb{R}$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$ ,  $n \geq 0$ . Soit  $u_n = \frac{\sum_{k=0}^n v_k}{n+1}$ .

1. On suppose  $(u_n)$  bornée. montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.
2. Trouver un exemple de fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ayant un point fixe unique  $a$  mais telle que si  $v_0 \neq a$ , alors  $(u_n)$  ne converge pas vers  $a$ .

**Exercice 17 (Moyennes de Cesàro généralisées)** Soit  $(a_n)$  une suite d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $(\alpha_n)$  une suite de nombres positifs avec  $\alpha_0 > 0$  et  $\sum_n \alpha_n = +\infty$ .

1. On suppose que  $a_n \rightarrow l$ . Montrer que la suite  $(b_n)$  définie par  $b_n = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k a_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$  converge vers  $l$ .
2. On suppose que  $a_{n+1} - a_n \rightarrow \lambda$ . Montrer que  $\frac{a_n}{n} \rightarrow \lambda$ .
3. Application: trouver un équivalent de  $x_n$  défini par  $x_{n+1} = \sin x_n$ , en utilisant un DL de sin au voisinage de 0 puis en prenant  $a_n = \frac{1}{x_n^2}$ .

## Exemples, divers

**Exercice 18 (suites arithmétiques, géométriques)**

**Exercice 19 (suites arithmético-géométriques et variantes)** Soient  $a, b > 0$ . 1. On définit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par récurrence en posant  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ . Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une limite commune, la *moyenne arithmético-géométrique* de  $a$  et  $b$ .

2. Même question lorsque  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}$ .

**Exercice 20** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $y_n = x_{n-1} + 2x_n$ . Montrer que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 21 (suites sous additives)** Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que pour tous  $n, m$ ,  $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ . Montrer que  $\frac{u_n}{n}$  converge vers  $l = \inf \frac{u_n}{n}$ .

**Exercice 22 (développement en fractions continues)** 1. Soit  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \notin \mathbb{N}$  et  $x = \frac{p}{q}$  une écriture irréductible,  $p \in \mathbb{Z}$ ;  $q \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x - E(x)}$ . Montrer que si  $f(x) = \frac{p'}{q'}$  est une écriture irréductible, alors  $q' < p'$ . Soit  $x_0 = x$ , et tant que ça a un sens,  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $x_n \in \mathbb{N}$ . On note  $y_n = E(x_n)$ , puis  $x = x_0 = y_0 + \frac{1}{y_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{\dots}}}$ , ou encore  $x = [y_0, y_1, \dots, y_n]$ .

2. Soit  $x \notin \mathbb{Q}$ . Soit  $x_0 = x$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $y_n = E(x_n)$ . On définit par récurrence deux suites d'entiers par  $P_0 = y_0$ ,  $P_1 = y_0 y_1 + 1$ ,  $Q_0 = 1$ ,  $Q_1 = y_1$ ,  $P_{n+1} = P_n y_{n+1} + P_{n-1}$ ,  $Q_{n+1} = Q_n y_{n+1} + Q_{n-1}$ . Montrer par récurrence sur  $n \geq 2$  que  $x = \frac{P_{n-1} x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_n + Q_{n-2}}$ .

3. Soit  $\xi_n = [y_0, \dots, y_n]$ . Montrer que  $\xi_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} y_n + Q_{n-2}}$ .

4. Montrer que  $Q_n, n \geq 2$  est strictement croissante et tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = (-1)^n$ . En déduire que  $(\xi_{2n})$  est croissante,  $(\xi_{2n+1})$  décroissante.

5. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$  et  $\xi_n \rightarrow x$  et si  $|x - p/q| < |x - \frac{p_n}{q_n}|$  alors  $q \geq Q_n$ .

**Exercice 23** Étudier la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^n k^n$ .

**Exercice 24** Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant  $u_n \rightarrow +\infty$  et  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ . Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $v_n = u_n - E(u_n)$  ( $E$  est la partie entière.)

**Exercice 25** Étudier la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \sin 2u_n$ .

**Exercice 26** Étudier la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \frac{a(1+a^2)}{1+u_n^2}$ .

## Systèmes dynamiques

**Définition 1** Un système dynamique est la donnée d'un espace  $X$  et d'une application  $f : X \rightarrow X$ . Lorsque  $X$  est un espace topologique, on suppose en général  $f$  continue. Lorsque  $(X, \mathcal{B}, m)$  est un espace mesuré, on suppose  $f$  mesurable. Lorsque  $X = \mathbb{R}^n$ , on peut supposer  $f$  différentiable...

On s'intéresse alors aux orbites du système dynamique. L'orbite de  $x_0 \in X$  est la suite de points  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots\}$ . La théorie des systèmes dynamiques cherche à décrire le comportement des orbites de tous les points  $x_0$  de  $X$ .

À  $x_0$  fixé, il ne s'agit "que" de l'étude d'une suite récurrente. Mais les systèmes dynamiques s'intéressent au comportement de toutes les orbites lorsque le point de départ  $x_0 \in X$  varie.

**Exercice 27 (Équirépartition)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_{n+1} = 2u_n \pmod 1$ ,  $u_0 \in [0, 1[$ . Nous allons montrer le résultat suivant. Il existe un ensemble  $Q \subset [0, 1[$  de mesure de Lebesgue  $\lambda(Q) = 1$  tel que pour tout  $u_0 \in Q$  et pour tout intervalle  $[a, b[ \subset [0, 1[$ , le nombre moyen de termes de la suite  $(u_n)$  dans l'intervalle  $[a, b[$  converge vers  $b - a$ .

Soit encore  $\frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n, u_k \in [a, b[ \} \rightarrow b - a$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ceci signifie qu'asymptotiquement, la suite  $(u_n)$  se répartit uniformément dans tous les sous-intervalles  $[0, 1[$ , proportionnellement à la longueur de chaque intervalle.

1) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  il existe  $x \in [0, 1[$  tel que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  partant de  $u_0 = x$  est périodique de période exactement  $m$ :  $u_m = u_0$  et  $u_n \neq u_0$  pour  $1 \leq n \leq m - 1$ . Trouver tous les  $u_0$  possibles. En déduire que les suites associées ne sont pas équiréparties au sens ci-dessus.

2) Nous allons démontrer le théorème pour  $a = 1/2$  et  $b = 1$ . Notons  $I_0 = [0, 1/2[$  et  $I_1 = [1/2, 1[$ . Si  $x \in [0, 1[$  notons  $X_0(x) = 0$  si  $x \in I_0$  et  $X_0(x) = 1$  si  $x \in I_1$ . On construit ensuite la suite  $(X_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $X_{n+1}(x) = X_n(f(x)) = X_n(f^{\circ n}(x))$ . Autrement dit,  $X_n(x) = 0$  si  $f^n(x) \in I_0$  et  $X_n(x) = 1$  sinon.

2.a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$x \in I_n(x) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^n} \right[$$

En déduire que  $x = \sum_{n \geq 0} \frac{X_n(x)}{2^{n+1}}$ .

2.b) On munit  $I = [0, 1[$  de la tribu borélienne  $\mathcal{B}$  et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . Montrer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .

2.c) À l'aide de la loi forte des grands nombres, en déduire le théorème lorsque  $[a, b[ = I_0$  ou  $I_1$ . **3a)** L'étape suivante est la démonstration du théorème pour les intervalles dyadiques  $[a, b[ = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$ ,  $m \geq 1$ . Pour cela, on fait le même raisonnement en remplaçant  $f$  par  $f^m : x \rightarrow 2^m x$ , avec  $2^m$  intervalles  $I_k^{(2^m)} = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$ . On construit une suite de v.a.

iid  $X_n^{(2^m)}$  de loi de Bernoulli,  $P(X_n^{(2^m)} = 1) = \frac{1}{2^m}$ . Et le même raisonnement donne  $\frac{1}{n} \#\{n \in \mathbb{N}, f^{nm}(x) \in I_k^{(2^m)}\} \rightarrow \frac{1}{2^m}$

**3b)** On obtient le résultat annoncé pour les intervalles dyadiques  $I_k^{(2^m)}$  avec  $f$  en remarquant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r \leq m - 1$  tel que  $n = mp + r$ . On utilise 3a et un argument de moyenne de Césaro pour démontrer le théorème pour tous les intervalles dyadiques d'ordre  $m$ .

4 On passe à tous les intervalles  $[a, b[$  par un argument d'approximation de  $a$  et  $b$  par des nombres dyadiques.

**Exercice 28 (Équirépartition (bis))** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $[0, 1[$ .

1. Montrer que si  $(x_n)$  est équirépartie dans  $[0, 1[$ , i.e. pour tout  $[a, b[$  dans  $[0, 1[$ ,  $\frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n, x_k \in [a, b[ \} \rightarrow b - a$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors  $(x_n)$  est dense dans  $[0, 1[$ . Quel est l'ensemble de ses valeurs d'adhérence?

2.a. Montrer que  $(x_n)$  est équirépartie dans  $[0, 1[$  ssi pour toute fonction Riemann intégrable  $f$  sur  $[0, 1[$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(t) dt$ . (On notera  $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ .)

2.b Montrer le même résultat avec  $f$  continue sur  $[0, 1[$ .

2.c. Montrer qu'il suffit de supposer que pour tout entier non nul  $m \in \mathbb{Z}^*$ , on a  $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi m x_k} = o(n)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

3. Soit  $\theta \notin \mathbb{Q}$ . Montrer que la suite  $x_n = n\theta \pmod 1$  est équirépartie dans  $[0, 1[$ . Interpréter le résultat en termes de rotations.

**Exercice 29 (Suite logistique)** cf exo 11. suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = ax(1-x)$ .

**Exercice 30 (Théorème de Sarkovski) 1.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Soit  $[\alpha, \beta] \subset f([0, 1])$ . Montrer qu'il existe un segment  $[u, v] \subset [0, 1]$  tel que  $f([u, v]) = [\alpha, \beta]$ .

**2.** On suppose qu'il existe  $n$  segments  $I_0, \dots, I_{n-1}$  tels que  $I_0 \subset f(I_{n-1}), I_{k+1} \subset f(I_k)$  pour  $n-2 \geq k \geq 0$ . Montrer que  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  admet un point fixe  $x_0$  tel que  $f^k(x_0) \in I_k$  pour tout  $k$ .

**3. Théorème de Sarkovski** Un point fixe d'ordre  $n$  est un point  $x_0$  tel que  $f^n(x_0) = x_0$  et  $f^k(x_0) \neq x_0$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . Si  $f$  a un point fixe d'ordre 3, montrer qu'alors pour tout  $n \geq 1$ , elle a un point fixe d'ordre  $n$ . *Indication: prendre les intervalles  $I_0 = [x_0, f(x_0)], I_1 = [f(x_0), f^2(x_0)]$  et  $I_2 = [f^2(x_0), f^3(x_0) = x_0]$  et essayer d'appliquer ce qui précède avec une suite de  $n$  intervalles bien choisis.*

**Exercice 31 (Itération complexe)** Lire attentivement le paragraphe en question dans Hubbard-West (ou ailleurs...)

## Méthodes numériques

**Exercice 32 (Convergence locale de la méthode de Newton dans  $\mathbb{R}^n$ ) 1.** Soit  $f : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  sur  $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ .

**1.** On suppose qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que pour tous  $x, y$  de la boule  $\overline{B}$ , on ait  $\|df_x - df_y\| \leq \gamma\|x - y\|$ . En déduire que pour tous  $x, y$  de la boule  $\overline{B}$ , on a  $\|f(x) - f(y) - df_y(x - y)\| \leq \frac{\gamma}{2}\|x - y\|^2$ .

**2.** On suppose de plus que pour tout  $x \in B$ ,  $df_x$  est inversible, et qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $\|df_x^{-1}\| \leq \beta$ . On définit une suite  $(x_n)$  par récurrence par  $x_{n+1} = x_n - df_{x_n}^{-1} \cdot f(x_n)$ . Supposons que  $\alpha = \|x_1 - x_0\| < \frac{2r}{2+\beta\gamma}$ . Alors la suite  $(x_n)$  vérifie pour tout  $n \geq 0$   $x_n \in B$  et  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha h^{2^n-1}$ , où  $0 < h < 1$  est une constante à préciser.

**3.** Montrer que  $(x_n)$  converge vers un élément  $\xi \in B$  tel que  $f(\xi) = 0$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$  on a

$$\|x_n - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}.$$

**4.** Commentaires.

**Exercice 33 (Accélération de convergence, méthode d'Aitken)** Soit  $(x_n)$  une suite convergeant vers une limite  $\xi$ , mais "trop lentement". On suppose qu'il existe une constante  $k$  telle que  $0 < |k| < 1$  telle que  $x_{n+1} - \xi \sim k(x_n - \xi)$ . Soit encore  $x_n - \xi \sim k^n(x_0 - \xi)$ .

**1.** On peut remplacer  $x_n$  par  $v_n = \frac{x_{n+1} - kx_n}{1-k}$ . Vérifier que  $v_n$  converge vers  $\xi$  plus vite que  $x_n$  (i.e.  $(v_n - \xi)/(x_n - \xi) \rightarrow 0$ ).

**2.** La méthode d'Aitken consiste à remplacer la suite  $(x_n)$  par la suite  $(y_n)$  définie par  $y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$ , soit encore  $y_n = \frac{x_{n+1} - k_n x_n}{1 - k_n}$  avec  $k_n = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$ . (Noter qu'il n'y a pas besoin de connaître  $k$ !) Montrer que  $(y_n)$  converge plus vite que  $(x_n)$ , i.e.  $(y_n - \xi)/(x_n - \xi) \rightarrow 0$ .

**Exercice 34 (Accélération de convergence des suites récurrentes)** Soit  $(x_n)$  une suite définie par  $x_{n+1} = f(x_n)$ , avec  $f$  de classe  $C^1$ . On considère alors la suite définie de la manière suivante:  $X_0 = x_0$ ,  $X_{n+1} = g(X_n) = X_n - \frac{(f(X_n) - X_n)^2}{f \circ f(X_n) - 2f(X_n) + X_n}$ . **1.** Montrer que les points fixes de  $g$  sont aussi des points fixes de  $f$ . Réciproquement, montrer que si  $f(\xi) = \xi$  et  $f'(\xi) \neq 1$  alors  $g(\xi) = \xi$ .

**2.** On suppose que  $\xi$  est un point fixe répulsif de  $f$  ( $|f'(\xi)| > 1$  et  $f(\xi) = \xi$ ). Que fait  $(x_n)$ ? Montrer que si  $X_0$  est assez proche de  $\xi$ ,  $X_n \rightarrow \xi$ . Quelle est la vitesse de convergence de  $X_n$ ? Commentaires?

Pour les exercices suivants, on consultera avec profit Schatzmann et Demailly

**Exercice 35 (Résolution numérique d'équations différentielles)** Décrire la méthode d'Euler. Quand converge-t-elle? Intérêts et inconvénients? Lien avec les suites? Idem avec la méthode de Runge Kutta

**Exercice 36 (Intégration numérique)** Décrire (si possible sur des exemples) la méthode des trapèzes, du point milieu, de Simpson, de Runge Kutta. Convergence? Vitesse?

**Exercice 37** Décrire l'algorithme de transformation de Fourier rapide. Intérêt?

**Exercice 38** On itère une application linéaire  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $U_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $U_{n+1} = A.U_n$ ). Que peut-il se passer? Discuter suivant les valeurs propres de  $A$ , et le point de départ  $U_0$ .