Isométries de l'espace affine euclidien de dimension finie (2 ou 3 souvent)
Devoir à préparer pour le 20 octobre 2009

Ce devoir a pour but de vous faire réviser les notions de base sur les isométries, et de préparer au passage les leçons sur les isométries, mais aussi sur les sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$ et $SO(3,\mathbb{R})$

Exercice 1 Soit $f : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel euclidien. Vérifier que f préserve la norme si et seulement si elle préserve le produit scalaire.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien de dimension finie. Montrer que si f est une isométrie, elle est bijective. Est-ce vrai en dimension infinie? Exemples?

Exercice 3 Les transformations classiques rencontrées dans le secondaire (rotations, translations, homothéties, réflexions, symétries ...) sont-elles des applications linéaires? affines? des isométries vectorielles ? isométries affines euclidiennes?

Exercice 4 a) Soit φ une isométrie de $\mathcal{P}$ plan affine euclidien. Montrer que φ peut s'écrire comme produit de $0 \leq p \leq 2$ réflexions.
b) Montrer qu'une isométrie f d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n s'écrit comme produit de $0 \leq p \leq n$ réflexions par rapport à des hyperplans vectoriels.
c) Montrer qu'une isométrie φ d'un espace affine euclidien E de dimension n s'écrit comme produit de $0 \leq p \leq n+1$ réflexions par rapport à des hyperplans affines.
Commentaire : La décomposition en produit de réflexions n'est pas unique.

Exercice 5 (Forme réduite) Soit φ une isométrie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension n, et $\vec{\varphi}$ sa partie linéaire.
a) Montrer que $E = Ker(\vec{\varphi} - Id_E) \oplus Im(\vec{\varphi} - Id_E)$.
b) Montrer qu'il existe un unique $\vec{v} \in E$ et une unique isométrie ψ avec (au moins) un point fixe tels que $\varphi = t_{\vec{v}} \circ \psi$.
c) Les translations $t_{\vec{v}}$ et ψ commutent-elles?
Cette écriture s'appelle la forme réduite de φ.

Exercice 6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E.

Exercice 7 On note $O(E)$ le groupe des isométries de E, espace vectoriel euclidien de dimension n, et $O(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $f \in GL(E)$ un isomorphisme, soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée, et soit A la matrice de f dans cette base. Montrer que $f \in O(E)$ ssi $A \in O(n,\mathbb{R})$, i.e. ${}^tAA = Id$.

Exercice 8 On considère $O(n,\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $M(n,\mathbb{R})$.
a) Montrer que $O(n,\mathbb{R})$ est un groupe topologique, i.e. les applications $(A,B) \mapsto AB$ et $A \mapsto A^{-1}$ sont continues.
b) Montrer que $O(n,\mathbb{R})$ est compact.

Exercice 9 Qu'est-ce que le choix d'une orientation ? On appelle déplacement de E une isométrie de E préservant l'orientation.
a) Vérifier que l'ensemble des déplacements forme un groupe, noté $SO(E)$.
b) Vérifier que $SO(E)$ est l'ensemble des isométries qui peuvent s'écrire comme produit d'un nombre pair de réflexions par rapport à des hyperplans.

Exercice 10 a) Montrer que le groupe $SO(2,\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
b) En déduire qu'il est commutatif.
c) Montrer que $SO(2,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{U}$ et donc connexe.
d) Le groupe $0(2,\mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 11 (groupes de rotations du plan) Décrire les sous-groupes finis de $SO(2,\mathbb{R})$.

Exercice 12 (groupe diédral) On appelle groupe diédral D_n un groupe d'isométries de $O(2, \mathbb{R})$ préservant un polygone régulier P à n côtés.
a) Décrire le groupe des rotations préservant ce polygone.
b) Dénombrer les éléments de D_n suivant leur type géométrique (rotation, réflexion, symétrie centrale, ..). Quel est le cardinal total de D_n ?
c) Si S est un sommet de P, quelle est l'orbite de S par D_n ? Même question pour l'orbite du milieu d'un des côtés de P ? Pour l'orbite d'un point quelconque du plan ?
d) Décrire les différentes classes de conjugaison de D_n.
e) Quel est le centre de D_n ?
f) Quels sont les sous-groupes d'indice 2 de D_n?
g) Décrire *tous* les polygones dont le groupe d'isométries est le groupe D_n pr éservant P.
h) Montrer que tous les sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ peuvent être vus comme sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$.
Indication: séparer les cas n pair et n impair, et ... faire un dessin, bien sûr!

Exercice 13 Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble E. On appelle orbite de $x \in E$ l'ensemble $G.x = \{g.x,\, g \in G\}$, et stabilisateur de x le sous-groupe $Stab(x) = \{g \in G,\, g.x = x\}$.
a) Montrer que les stabilisateurs des points de l'orbite d'un point $x \in E$ constituent une classe de conjugaison d'éléments de G.
b) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\#Stab(x) \times \#G.x = |G|$.
c) Soit $\mathcal{G} = \{(g, x) \in G \times E,\, g.x = x\}$. En calculant le cardinal de $\mathcal{G}$, montrer que le nombre d'orbites distinctes dans E par G est égal au nombre moyen de points fixes d'un élément $g \in G$. Plus précisément,

$$\text{nombre d'orbites} = \frac{\sum_{g \in G} \text{nb de points fixes de } g}{\text{Card } G}$$

d) Soit G un sous-groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$, et soit E l'ensemble des points fixes des éléments de G sur la sphère S^2, i.e. l'ensemble des intersections des axes des rotations de G avec S^2. Soit $n = \text{Card } G$, r le nombre d'orbites par G dans E, et δ le nombre des éléments de G d'ordre 2. A l'aide de la question précédente, énumérer les différents types possibles de sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$.

Exercice 14 Qu'est-ce qu'un polyèdre de $\mathbb{R}^3$? Une face ? un sommet ? le groupe d'isométries du polyèdre ? Mêmes questions avec un polyèdre régulier.

Exercice 15 Décrire les groupes d'isométries et de déplacements préservant un tétraèdre régulier.

Exercice 16 Décrire le groupe des déplacements préservant le cube, et celui de l'octaèdre régulier.

Exercice 17 Comment construit-on un dodécaèdre régulier, et un icosaèdre régulier ? (On pourra construire l'un des deux à partir de l'autre).

Exercice 18 Décrire le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier et leurs groupes d'isométries.

Exercice 19 Quel(s) polyèdre(s) régulier(s) est (sont) préservé(s) par le groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$ engendré par les trois retournements par rapport aux axes de coordonnées de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 20 Montrer que $SO(n, \mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 3$.

Exercice 21 Trouver des conditions suffisantes pour que deux rotations A et B de $SO(3, \mathbb{R})$ engendrent un sous-groupe dense de $SO(3, \mathbb{R})$.