

## Intégration

Ce devoir traite des leçons intitulées *Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications* et *Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications*.

Quelques références bien utiles: Zuily Queffelec (un chapitre entier consacré au sujet), Francinou Giannella Nicolas tome 2, Chambert Loir-Fermigier, plus des bouquins plus théoriques sur les bases de l'intégration.

Quelques notions pourront très utilement être révisées pour ces leçons.

- \* Etude de la fonction  $\Gamma$
- \* Étude de la fonction  $\zeta$
- \* Les grands théorèmes et leurs démos: convergence monotone et dominée, lemme de Fatou, théorème de continuité/dérivabilité/holomorphie sous le signe  $\int$ . Trouver des exemples et contre-exemples pour les illustrer.
- \* lemme de Gronwall
- \* polynômes de Bernstein et Stone-Weierstrass (cf cours proba L3...)
- \* la convolution
- \* les séries de Fourier
- \* la transformation de Fourier
- \* Méthodes numériques de calcul d'une intégrale.
- \* la loi forte ( $L^1$ ) des grands nombres, le TCL, le théorème de Borel Cantelli.
- \* Méthode de la phase stationnaire (voir par ex Zuily Queffelec).
- \* etc

**Exercice 1 (Formule de Cauchy)** Soit  $f$  une application holomorphe définie sur  $U \subset \mathbb{C}$ , et  $\gamma$  une courbe fermée  $C^1$  incluse dans  $U$ . Énoncer, puis démontrer la formule de Cauchy.

**Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)** Soit  $f \in L^1([0, 2\pi])$ . Montrer que  $\int_0^{2\pi} f(t)e^{int} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercice 3 (Intégrales de Wallis)** Calculer les intégrales de Wallis  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ .

**Exercice 4** Soit  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , puis un équivalent et un DA à deux termes de  $u_n$ .

**Exercice 5 (Méthode de Laplace)** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et  $\varphi$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $I$ , de classe  $C^2$  sur  $I$ , tq  $\varphi'$  s'annule uniquement en  $x_0 \in I$  et  $\varphi''(x_0) < 0$ . Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $I$ , à valeurs complexes, tq  $f(x_0) \neq 0$  et  $\int_I e^{t\varphi(x)} |f(x)| dx < \infty$  pour tout  $t > 0$ . Montrer que quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} f(x_0) \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}}.$$

**Exercice 6 (théorème d'Egorov)** Soit  $(X, \mathcal{B}, m)$  un espace de probabilité, et  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables convergeant p.s. vers une fonction mesurable  $m$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un ensemble  $X_\varepsilon$  de mesure au moins  $1 - \varepsilon$  sur lequel  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

**Exercice 7** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $L^2$  qui converge dans  $L^2$  vers  $f \in L^2$ . Montrer qu'il existe une sous-suite  $f_{n_k}$  qui converge p.s. vers  $f$ .

**Exercice 8 (Fonctions plateau)** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  un voisinage ouvert de  $K$ . Montrer qu'il existe une fonction  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tq  $\theta = 1$  sur  $K$ ,  $\theta = 0$  sur  $\Omega^c$  et  $0 \leq \theta \leq 1$ .

**Exercice 9 (Théorèmes de densité)** Montrer que

- \*  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $C^k(\mathbb{R}^n)$ ,
- \*  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour  $1 \leq p < \infty$
- \*  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  n'est pas dense dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

**Exercice 10 (Fonction d'Airy)** Étudier la fonction définie par

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} dx, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer en particulier qu'elle est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , puis qu'elle est solution de l'équation  $u'' - tu = 0$ . En déduire qu'elle est  $C^\infty$ .