

Calcul différentiel. Devoir à préparer pour la première séance sur le sujet.

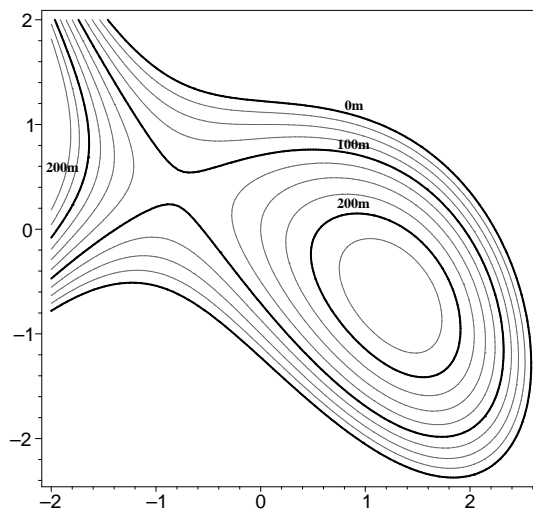
Le calcul différentiel est un outil sans aucune difficulté théorique, mais difficile à manipuler au début. Dans ce devoir, on se limitera essentiellement aux fonctions (d'un ouvert) de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Le but de ce devoir est de vous convaincre que la seule difficulté est psychologique. La référence historique est sans doute Cartan, Calcul différentiel. Mais il y a plein d'autres livres de calcul diff. à la BU. Dans ceux spécifiques pour l'agreg, je connais Rouvière, petit guide de calcul différentiel pour la licence et l'agrégation, et Gonnord-Tosel, Thèmes de calcul différentiel pour l'agrégation. Je vous recommande aussi Laudenbach, "Calcul différentiel et intégral", pour le cours. Ça ne veut pas dire que les autres ne sont pas bien!

Fautes de frappe en cas de doute, venez me voir, ou envoyez moi un mel barbara.schapira@u-picardie.fr !

- Exercice 1**
- a) On veut étudier $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Que fait-on? Quels sont les outils de calcul? De représentation visuelle?
 - b) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à deux variables. Comment (intuitivement) étudier ses variations, ses extrema, la représenter.
 - c) Même question avec $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
 - d) Géométriquement (et sans démonstration) comment peut-on ramener l'étude d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ à celle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- Exercice 2 (Manipulations de la définition)**
- a) Définition d'une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 - b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application constante. Calculer sa différentielle.
 - c) Même question avec une application linéaire.
 - d) Soit $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q .
 - e) Soit $f(x, y, z) = (x^2y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0) , son gradient au même point. Quels sont les ensembles dans lesquels vivent tous ces objets (dérivée partielle, gradient, différentielle).
 - g) Mêmes questions avec les fonctions suivantes : $g(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y)$ et $h(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

Exercice 3 (Skieur, exo de L1, initiation douce au calcul diff, exercice de F. Pham) La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



- 1) Partie expérimentale**
- a) Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelle est sa position sur la carte ?¹
 - b) Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.
 - c) Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (a) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles. Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.
 - d) Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la

¹Deux positions possibles

carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.

e) La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.

f) En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?

2) Partie « calculs » En fait la fonction de la figure a pour expression $f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$ (les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

a) Discutez, en fonction du paramètre v , l'allure du graphe de $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).

b) Précisez par le calcul votre résultat de la question 1b).

c) Discutez, en fonction du paramètre u , l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question 1d).

d) Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question 1f).

3) Calcul d'un plan tangent Le skieur de 1a) est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de 1a) on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1, y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x, y)$.

On veut trouver l'équation du plan tangent \mathbf{P} à l'endroit où est le skieur.

a) On veut trouver la « ligne de plus grande pente » à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan \mathbf{P} en faisant un dessin).

b) Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1, 0, 13/6)$, et dirigé vers le nord.

c) Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de \mathbf{P} .

Exercice 4 Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de \vec{v} ? Si oui, donner son expression en fonction de df_a .

b) Donner des exemples d'applications f ayant des dérivées partielles dans toutes les directions $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au point a mais pas différentiables au point a .

Exercice 5 (Applications linéaires, bilinéaires) a) Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in E$.

b) Soit $\psi : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire. Même question.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Av, v \rangle$?

d) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto \langle Au, u \rangle$.

Exercice 6 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_0 , vue comme application linéaire $df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Projection stéréographique) Étudier l'application $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\text{pole nord}\}$ définie par

$$P : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

(différentiabilité, calcul de la différentielle et des dérivées partielles, image, inversibilité, calcul de l'inverse, ...)

Exercice 8 (Coordonnées polaires) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))$. Est-elle différentiable? Injective? Surjective? Sur quel(s) ensemble de définition peut-on l'étudier pour améliorer tout cela? (Faire un dessin).

b) Calculer sa jacobienne, son jacobien. Comment l'inverser? Calculer son (ses?) inverse(s) éventuel(s).

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ en coordonnées polaires.

d) Application: $f(x, y) = e^{-x^2/2 - y^2/2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx$.

e) (**Question très pénible à savoir faire**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 , et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Comment relier $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r, \theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r, \theta))$? Exprimer $(\Delta f)(\varphi(r, \theta))$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$.

(On rappelle que $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.)

Exercice 9 (Coordonnées sphériques) Mêmes questions avec $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$\Psi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$. Quel est le nom usuel des paramètres θ et φ ? (Faire un dessin)

Exercice 10 (Différentielle du déterminant) On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de $\det D \det_a$ au point a . (Exo classique, se trouve dans la littérature.)

Exercice 11 Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \rightarrow A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle au point a .

Exercice 12 (Théorème d'inversion locale) Énoncer le théorème d'inversion locale. Comment l'illustrer? Exemples, applications?

Exercice 13 (Théorème des fonctions implicites) a) Énoncé, exemples, applications.

b) Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Illustrez le théorème des fonctions implicites. Géométriquement, que signifient ses hypothèse(s) et conclusion(s).

Exercice 14 (Surfaces) a) Donner différentes définitions d'une surface (sous-variété de dimension 2) de \mathbb{R}^3 comme

* ensemble des zéros d'une submersion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

* localement l'image d'un plongement $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

* localement le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

* ensemble localement modelé sur \mathbb{R}^2 : chaque point de S a un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ces points méritent d'être précisés (hypothèses), complétés, et l'équivalence entre eux doit être démontrée.

b) Comparer avec la définition de nappe paramétrée de \mathbb{R}^3 . Pouvez-vous donner un exemple de nappe paramétrée qui ne soit pas une surface (au sens de sous variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3) ? Ou de surface qui ne soit pas une nappe paramétrée?

c) Illustrer chacune de ces définitions de surface avec la sphère unité de \mathbb{R}^3 . (On écrira explicitement chacune des définitions montrant que la sphère est une surface de \mathbb{R}^3). Peut-on l'écrire comme nappe paramétrée ?

c) Même question avec l'hyperboloïde à deux nappes $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, l'hyperboloïde à une nappe $z^2 - x^2 - y^2 = -1$, le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; et toutes vos quadriques préférées.

d) Même question avec le tore paramétré par $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[\times]-\pi, \pi[\mapsto ((R + r \cos \varphi) \cos \theta, (R + r \cos \varphi) \sin \theta, r \sin \varphi)$.

Exercice 15 (Espaces tangents) L'espace tangent en $x \in S$ à la surface est par définition le plan affine de \mathbb{R}^3 passant par x et de direction l'ensemble $\{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S \text{ courbe } C^1\}$ (ici ε dépend de c . Il s'agit de courbes définies au voisinage de 0.

a) Pour chacune des définitions équivalentes de surfaces, préciser comment on trouve l'espace tangent en un point $x \in S$. (Il suffit de raisonner localement au voisinage de x .)

b) Dans chacun des exemples des question c-d) de l'exercice 14, calculer l'espace tangent en un point quelconque de la surface.

Exercice 16 (Groupes de Lie) Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans \mathbb{R}^k , qui en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^k est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^k , et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \rightarrow G$, et l'inverse est un difféomorphisme de $G \rightarrow G$.

a) Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension :

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$,

$SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1 \text{ et } {}^tABA = B\}$, avec q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , et B la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), {}^t\bar{A}A = Id\}$.

b) Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^k , et $x \in M$. L'espace tangent en x à M est par définition l'ensemble $T_x M := \{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^k \text{ courbe } C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l'identité.

Exercice 17 a) Soit S une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^n , et $a \in S$. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 définie sur un voisinage U de S , et $f = g|_S$. L'application linéaire tangente $T_a f$ est par définition la restriction de dg_a à l'espace tangent $T_a S$. Le point a est un point critique de f si $T_a f = 0$, soit encore lorsque la restriction de dg_a à $T_a S$ est nulle. Montrer que $a \in S$ est un point critique de f ssi $\nabla g(a)$ est orthogonal à $T_a S$. (On rappelle que $\nabla g(a)$ est défini comme l'unique vecteur de \mathbb{R}^n tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla g(a), v \rangle = dg_a.v$.)

b) Un exemple célèbre. Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, et A la matrice symétrique (inversible) associée dans la base canonique. Vérifier que $\nabla q(x) = 2Ax$. Soit $\Sigma = q^{-1}(1)$. Vérifier que Σ est une hypersurface de \mathbb{R}^n . Soit $q_0(x) = \|x\|^2$ (norme euclidienne). Que vaut $\nabla q_0(x)$? Donner les équations satisfaites par les points critiques de q_0 restreinte à Σ . Que doit vérifier le multiplicateur de Lagrange? Discuter l'existence de points critiques de $(q_0)|_\Sigma$ en fonction des valeurs propres de A .

c) Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion. (Rappeler la définition). Soit \mathcal{S}_g la surface définie par $\mathcal{S}_g = \{x \in \mathbb{R}^3, g(x) = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Comment trouver les extrema de la restriction $f|_{\mathcal{S}_g}$ de f à \mathcal{S}_g ? Justifier d'une part à l'aide du théorème des extrema liés, et d'autre part à l'aide de votre intuition géométrique, et d'un dessin.

d) On cherche à minimiser la surface S d'une canette cylindrique, tout en fixant son volume égal à $V = 33cl$. Résoudre le problème à l'aide du théorème des extrema liés.

d) On cherche à maximiser le volume inclus à l'intérieur d'une surface cylindrique de surface fixée S_0 . Même question.

Exercice 18 (Perturbation d'application) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 , telle que $T(0) = 0$ et 0 n'est pas un point fixe dégénéré, i.e. 1 n'est pas une valeur propre de dT_0 .

a) Montrer qu'alors 0 est un point fixe isolé de T , i.e. il existe un voisinage de 0 sur lequel 0 est l'unique point fixe de T . Exemples?

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , et $T_\lambda := T + \lambda S$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et U voisinage de 0 tels que pour tout $|\lambda| < \delta$, l'opérateur perturbé T_λ a un unique point fixe x_λ dans U . De plus, montrer que l'application $\lambda \in]-\delta, \delta[\mapsto x_\lambda$ est de classe C^1 . (on pourra considérer $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$).

Exercice 19 (Continuité des racines d'un polynôme) Soit $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ un polynôme, et x_0 une racine de P_0 telle que $P_0'(x_0) \neq 0$. Montrer que si (a, b, c) est assez proche de (a_0, b_0, c_0) alors $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ a une unique racine proche de x_0 .

Exercice 20 (Lagrangien) Soit $E = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k\}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie, que l'on munit de sa norme C^1 : $\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma(0)\| + \sup_{t \in [0, 1]} \|\gamma'(t)\|$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k . Soit $\mathcal{L} : E \rightarrow \mathbb{R}$ le Lagrangien, défini par $\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$. Montrer qu'elle est de classe C^k .

Exercice 21 (Encore de la méca) Soit $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte unité, et $\mathcal{F} = \{u : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \text{ à support compact}\}$. On définit l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_B \|\nabla u(x)\|^2 dx - \int_B F \circ u(x) dx$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée.

a) Calculer la différentielle de E au point $u_0 \in \mathcal{F}$. En déduire que les points critiques de E (i.e. tels que $dE_{u_0} = 0$) sont solutions d'une EDP. (On admettra la formule de Stokes $\int_B \nabla u \nabla \varphi dx = - \int_B \Delta u \varphi dx$)

b) Calculer la différentielle seconde de E .

Exercice 22 (Lemme de Schwarz) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^2 . Montrer que l'application $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire symétrique.

Exercice 23 (Lemme de Morse) Soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$, et que d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée.

Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$, avec U, V deux voisinages de 0 , tel que pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$f \circ \varphi(x) = f(0) + \frac{1}{2} D^2f(0)(x, x).$$

Commentaire Après changement de variable convenable, au voisinage de 0 , $f(x)$ ressemble à son développement de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 24 Quelques compléments à connaître aussi : théorème du rang constant, théorème de Sard, étude des courbes planes et gauches, définition et étude des quadriques. Classification des formes quadratiques et étude locale des surfaces. Surface réglée. ...