Université Picardie Jules Verne — UFR Sciences
Préparation à l'agrégation 2010/2011

Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

Il y a deux sous parties arbitraires, mais vous noterez qu'il y a des exercices qui traitent à la fois d'angles et de distances.

La notion d'application conforme (homographie, inversion, application holomorphe) est tout à fait à sa place ici. (Cf devoir précédemment distribué).

Quelques références, parmi d'autres : Audin, « Géométrie », Francinou Gianella Nicolas tome 3, Tauvel, Goblot, Berger, Vidonne, Fresnel, ...

Angles

Exercice 1 Lire le préambule de [Rudin, Real and complex Analysis] sur les propriétés de l'exponentielle complexe.

Exercice 2 On note $\mathbb{U}$ le groupe (multiplicatif) des nombres complexes de module 1. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$ est un morphisme de groupe surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, qui induit un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U}$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. **a)** Montrer qu'une isométrie négative de E est une réflexion.
b) Montrer qu'une isométrie positive (appelée rotation) s'écrit sous la forme $u = \tau_1\tau_2$, où les τ_i sont des réflexions, et l'une des deux peut être choisie arbitrairement.
c) Soit $\rho \in SO(E)$ et $\tau \in O^-(E)$. Montrer que $\tau\rho\tau^{-1} = \rho^{-1}$.
d) Montrer que $SO(E)$ est commutatif.

Exercice 4 **a)** Montrer que les matrices de $SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}), {}^tAA = Id, \det A = 1\}$ s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$.
b) En déduire un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $SO(2, \mathbb{R})$. L'élément $\bar{t}in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dont l'image est la matrice $A \in SO(2, \mathbb{R})$ par cet isomorphisme est appelé angle de A. Un réel t représentant $\bar{t}$ est appelé **une** mesure de l'angle $\bar{t}$.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien de dimension 2. Soit $\rho \in SO(E)$ une rotation. On choisit une orientation de E, i.e. une BON de référence, que l'on dira directe, ainsi que toutes ses images par $SO(E)$. Montrer que la matrice R de ρ ne dépend pas de la base directe choisie, et donc son angle non plus, mais que la matrice de ρ dans une base indirecte est R^{-1}. L'angle de R, la matrice de ρ dans une base directe, est appelé **angle de la rotation ρ.**

Exercice 6 Soit E un plan euclidien **orienté**. Définir :
* l'angle orienté entre deux vecteurs (ou demi-droites),
* l'angle non orienté entre deux vecteurs (ou demi-droites),
* l'angle orienté entre deux droites,
* l'angle non orienté entre deux droites,

Exercice 7 Enoncer et démontrer les propriétés optiques de l'ellipse et de la parabole.

Exercice 8 (Théorème de Ptolémée) **a)** Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Montrer que $|z+z'| = |z|+|z'|$ ssi ils ont même argument.
b) Soient A, B, C, D quatre points distincts formant dans cet ordre un polygone convexe du plan euclidien. Montrer que ces points sont cocycliques ssi $AC.BD = AB.CD + AD.BC$. *Indication: passer dans le plan complexe, utiliser les affixes des points, une inégalité triangulaire judicieuse.*

Exercice 9 Soient A, B, C trois points distincts du plan eucidien. Déterminer les points D tq $(\vec{DB}, \vec{DC}) \equiv (\vec{AC}, \vec{AB})[\pi]$ et $(\vec{DC}, \vec{DA}) \equiv (\vec{BA}, \vec{BC})[\pi]$.

Exercice 10 Soit ABC un triangle et M un point à l'intérieur du triangle (au sens large).
a) Déterminer les points M tels que le produit des trois distances aux côtés soit extrémal (minimal/maximal).
b) Même question avec la somme des trois distances.

Exercice 11 Soit ABC un triangle, et $X \in [BC]$, $Y \in [AC]$, $Z \in [AB]$. Montrer qu'il existe une configuration qui minimise l'aire du triangle XYZ.

Exercice 12 Soit ABC un triangle du plan euclidien, et M un point intérieur au triangle (au sens large). Déterminer les points M qui minimisent la somme $MA + MB + MC$.

Exercice 13 Etant données deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, construisez leurs deux bissectrices à la règle et au compas.

Exercice 14 On dit qu'un angle θ est constructible si le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ l'est.

Montrer qu'il existe des angles pour lesquels la trissection n'est pas possible (i.e. 3θ est constructible mais pas θ).

Exercice 15 Montrer que le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas, et que l'heptagone régulier ne l'est pas.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien de dimension au moins 3. Soient u et v deux vecteurs de norme 1. Montrer que si une isométrie de $O^-(E)$ envoie u sur v, alors une rotation de $SO(E)$ envoie également u sur v.

Exercice 17 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et $\rho \in SO(E)$ une rotation. Soit u un vecteur unitaire de l'axe de la rotation ρ. Montrer qu'alors on peut parler d'angle θ de la rotation, dans le plan $u^\perp$. Préciser sa définition. On note alors $\rho = \rho_{u,\theta}$.

Vérifier que $\rho_{-u,-\theta} = \rho_{u,\theta}$.

Exercice 18 Comment sont définies la latitude et la longitude, sur une sphère?

Exercice 19 Soit S la sphère unité d'un espace E euclidien de dimension 3. On définit la quantité $d(x, y) = \arccos < x, y >$ pour $x, y \in S$.

a) Si x, y, z sont trois points de S, on appelle α l'angle en x entre les arcs de grands cercles (centrés en l'origine) joignant respectivement x à y et x à z. Dans le plan $x^\perp$, c'est encore l'angle entre les projetés de y et de z. Notons $a = d(y, z)$, $b = d(x, z)$, $c = d(x, y)$. Montrez que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

Indication : On pourra raisonner dans le plan (vectoriel) $x^\perp$.

b) En déduire que d est une distance sur S.

c) Vérifier que d définit sur S la topologie usuelle induite par celle de E.

d) Montrer que les grands cercles (cercles tracés sur S, centrés en l'origine, intersection de S avec un plan vectoriel) permettent de réaliser le plus court chemin entre deux points de S. On les appelle les géodésiques de la sphère.

e) Le cinquième axiome d'Euclide sur S est-il vérifié ?

distances

Ce paragraphe est bien plus court que le précédent, d'une part et avant tout parce que de nombreux exos ci-dessus auraient pu être placés en dessous, et d'autre part parce qu'il me semble que la notion de distance vous est plus facile à travailler seuls que celle d'angle, mais c'est subjectif bien sûr.

Exercice 20 On considère n points distincts du plan $\mathbb{R}^2$ avec la propriété suivante: toute droite passant par deux points distincts parmi ces n en contient forcément un troisième. Montrez qu'ils sont tous alignés.

Exercice 21 Détaillez tous les cas d'égalité du triangle.

Exercice 22 Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, on se donne deux droites non coplanaires. Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux droites.

Exercice 23 Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui préserve la distance 1. Montrer que c'est une isométrie affine

Exercice 24 (Faisceaux de cercles) Lire les pages 94 a 109 de [Audin], paragraphe III.4 sur les inversions et faisceaux de cercles, et en extraire un joli développement.