**Actions de groupes**

Il y a des actions de groupes partout dans la nature, ou au moins dans tous les sujets de maths gene, voire d'analyse.

Les exercices 1 a 17 sont à chercher pour le 10 novembre. Les exercices 18 à 21 pour le 24 novembre.

Les autres ne seront pas traités ces jours là.

Il est tout à fait autorisé, voire recommandé, de s'aider des références conseillées (ou d'autres de votre choix) pour traiter ce devoir, qui est, je vous l'accorde, un peu long.

# Définitions de base

Perrin, Cours d'Algèbre

Josette Calais , Eléments de théorie des groupes, chapitre 5

**Exercice 1** Rappeler la définition d'une action (ou opération) d'un groupe sur un ensemble. Donner des exemples simples.

Qu'est-ce qu'une orbite? Un point fixe? Un stabilisateur? Centralisateur? Normalisateur? une action libre? Fidèle ? Transitive ? Sans point fixe?

De quelle-s manière-s classique-s un groupe $G$ agit-il sur lui-même ?

**Exercice 2 (Théorème de Cayley)** Soit $G$ un groupe fini de cardinal $n$. Montrer que $G$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

**Exercice 3** Soit une action de groupe $G \times X \to X$.

**a)** Soient $g_1$ et $g_2$ deux éléments de $G$ qui sont conjugués (dans $G$). Montrer que les orbites de $g_1$ et $g_2$ sont en bijection. En particulier, montrer que $g_1$ et $g_2$ ont même nombre de points fixes, d'orbites périodiques, etc.

**b)** Considérons le groupe diédral $\mathcal{D}_{2n}$, $n \geq 3$, stabilisant le polygone régulier à $n$ sommets $e^{2i\pi\frac{k}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$. Supposons que $n$ est pair. Donner deux éléments de $\mathcal{D}_{2n}$ qui ne sont pas conjugués dans $\mathcal{D}_{2n}$.

Donner un exemple de deux éléments de $\mathcal{D}_{2n}$ qui sont conjugués en tant qu'éléments de $SO(2, \mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{D}_{2n}$.

**Exercice 4** Soit $G$ un groupe qui agit sur un ensemble $X$. Soit $x \in X$, $G_x \subset G$ son stabilisateur, et $G.x$ son orbite. Montrer que

$$|G| = |G_x| \times |G.x|\,.$$

Supposons maintenant $X$ fini, et soit $G.x_1, G.x_2, \ldots, G.x_K$ les différentes orbites de $G$. Montrer que

$$|X| = \sum_{i=1}^{K} \frac{|G|}{|G.x_i|}\,.$$

**Exercice 5 (Formule de Burnside)** Montrer que si G est un groupe fini opérant sur un ensemble fini X, et si $X^g$ désigne l'ensemble des $x \in X$ fixés par un élément $g \in G$, le nombre d'orbites est égal à

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|\,.$$

# Sans démonstrations!

**Exercice 6** Décrire l'action du groupe diédral d'ordre $2n$, en distinguant les cas $n$ pair et $n$ impair, sur un polygone régulier à $n$ côtés.

Pour les exos qui suivent, on pourra s'aider de la boite de « polydrons » disponible au secrétariat du LAMFA. L'emprunter de ma part, et ne surtout pas la laisser sans surveillance. La ranger au secrétariat du LAMFA, ou dans une armoire fermée!

**Exercice 7** Décrire l'action du groupe des isométries directes du tétraèdre régulier sur lui-même, en énumérant tous les éléments et leurs actions.

Décrire également le groupe des isométries indirectes.

**Exercice 8** Mêmes questions avec le cube.

**Exercice 9** Idem avec l'octaèdre régulier.

**Exercice 10** Idem avec le dodécaèdre régulier.

**Exercice 11** Idem avec l'icosaèdre régulier.

## Produit semi-direct et actions de groupes

Josette Calais, Théorie des groupes
Perrin, Cours d'Algèbre

**Exercice 12** Soient $N$ et $H$ deux groupes, et $Aut(N)$ le groupe des automorphismes du groupe $N$. Soit $\varphi : H \to Aut(N)$ un morphisme.
**a)** Définir une opération de $H$ sur $N$ via $\varphi$.
**b)** Définir le produit semi-direct de $N$par $H$ relativement à $\varphi$.
**c)** Y a t-il unicité ?
**d)** Donner des exemples concrets.

**Exercice 13** Admettons ici que le groupe $G^+$ des isométries directes du cube unité de $\mathbb{R}^3$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$. Montrez que le groupe de toutes les isométries du cube s'obtient par produit semi-direct de $G^+$ par le groupe engendré par une isométrie de déterminant $-1$.

Déduisez-en qu'un produit direct peut être isomorphe à un produit semi-direct non trivial.

## Quaternions

Perrin, Cours d'Algèbre, chapitre 7.
Vidonne, Groupe circulaire, nombres complexes, etc

**Exercice 14** Montrer qu'il existe une algèbre, notée $\mathbf{H}$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, munie d'une base notée $1, i, j, k, l$, tq $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $ij = -ji = k$. On note $q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un élément de $\mathbf{H}$.

**Exercice 15** Si $q = a + bi + cj + dk$, on note $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ son conjugué. **a)** Vérifier que $\bar{q} = q$ ssi $q \in \mathbb{R}$ (i.e. $b = c = d = 0$).
**b)** On note $N(q) = q\bar{q}$. Vérifier que $N$ est une norme sur $\mathbf{H}$ (vu comme espace vectoriel).
**c)** Vérifier que la conjugaison est une isométrie pour cette norme.

On note $\mathbb{R}$ l'espace des quaternions réels, et $P$ celui des quaternions imaginaires purs ($a = 0$).

**Exercice 16** Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps, de centre $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Vérifier que la norme $N$ est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{H}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$. On notera $G$ son noyau, i.e. l'ensemble des quaternions de norme 1.

**Exercice 17 (Action de $G$ sur $\mathbb{R}^3$)** On considère l'action de $\mathbb{H}^*$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison.
**a)** Pourquoi suffit-il de considérer l'action du sous-groupe $G$ des quaternions de norme 1 ?
**b)** Notons $S_q : q' \in P \mapsto qq'q^{-1}$. Montrer que $S_q$ est une isométrie pour la norme $N$.
**c)** Montrer que $S_q$ peut se restreindre en une isométrie (toujours notée $S_q$) de $P$, pour la norme $N$.
**d)** L'application $S$ définit ainsi un morphisme de groupe de $G$ dans $O(N_{|P})$ identifié à $O(3, \mathbb{R})$. Quel est son noyau?
**e)** A l'aide de la définition de $G$, montrer que $G$ est connexe pour la topologie de $\mathbb{H}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.
**f)** Montrer que l'application $\det \circ S$ est continue de $G$ dans $\{\pm 1\}$.
**g)** En déduire que $S$ envoie $G$ dans $SO(3, \mathbb{R})$.
**h)** Soit $p \in P \cap G$ un imaginaire pur de norme 1. Montrer que $S_p$ fixe $p$, puis que $S_p$ est un retournement d'axe $< p >$.
**i)** Déduire des questions précédentes que $S : G/\{\pm 1\} \to SO(3, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Pour celles et ceux qui savent ce que c'est, $G$ est le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{R})$. En effet, $S$ est un revêtement, et $G$ est topologiquement une sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, donc simplement connexe (et connexe).

## Actions de groupes sur des espaces de matrices

Fresnel, Algèbre des matrices
Mneimé Testard Groupes de Lie
Gonnord-Tosel, Calcul difff́érentiel.

**Remarque importante** Tout ce qui concerne les opérations sur les lignes et les colonnes, les matrices semblables et équivalentes, les invariants de similitudes, les différentes décompositions matricielles peut bien évidemment prendre place dans la leçon “Exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices”.

Nous nous concentrons dans ce qui suit sur les groupes de Lie, notion qui apparait dans la leçon en question, mais aussi dans “exponentielle de matrices”, “sous-variétés”, “applications différentiables” ou “TIL, TFI”.

Rappelons qu'une sous-variété $M$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que chaque point $m \in M$ admet un voisinage $V$ dans $\mathbb{R}^n$ tq $V \cap M$ est le noyau d'une submersion. (C'est une des définitions, celle dont nous nous servirons ici.)

**Exercice 18 (Groupes de Lie)** Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}^k$, et qui en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^k$, et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \to G$, et l'inverse est un difféomorphisme de $G \to G$.

*Classiquement, un groupe de Lie linéaire est souvent défini comme étant un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$. L'équivalence des deux définitions est démontrée par exemple dans Mneimé Testard, ou Gonnord Tosel (« théorème de Von Neumann »).*

**a)** Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension : $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})\}$, $SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1 \text{ et } {}^tABA = B\}$, avec $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et $B$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(C), {}^t\overline{A}A = Id\}$.

**b)** Vérifier que ces groupes sont également des sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$.

**c)** Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, et $x \in M$. L'*espace tangent en $x$ à $M$* est par définition l'ensemble $T_xM := \{c'(0),\ c : ]-1, 1[ \to M \subset \mathbb{R}^k \text{ courbe } C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l'identité. L'espace tangent en l'identité est appelé *algèbre de Lie* du groupe de Lie.

Cf Gonnord TOsel exo 15 p76

**Exercice 19 (Application exponentielle)** On suppose connues les propriétés classiques de l'exponentielle sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\|M\| < 1$. On définit $\mathrm{Log}(Id + M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} M^k}{k}$.
**a)** Montrer que $\exp(\mathrm{Log}(Id + M)) = Id + M$ pour toute matrice $M$ tq $\|M\| < 1$.
**b)** Montrer que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}} e^{-\frac{A}{k}} e^{-\frac{B}{k}}\right)^{k^2} = e^{AB-BA}.$$

**c)** Soit $G$ un groupe de Lie linéaire (sous-variété et sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$). On pose $\underline{g} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, e^{tM} \in G\}$. Montrer que $\underline{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$, i.e. un sous-espace vectoriel stable par le crochet de Lie $[M, N] = MN - NM$.
**d)** Montrer que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire est incluse dans son espace tangent en l'identité.
**e)** Admettons le théorème de Von Neumann ([GT] ou [MT], qui nous dit que *Si $G$ est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage $V$ de $0$ dans $\underline{g}$ et un voisinage $W$ de $Id$ dans $G$ tq l'exponentielle réalise un homéomorphisme de $V$ dans $W$.*
En déduire que $\underline{g} = T_{Id}G$.
**f)** Quelle est l'algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$ ?

[GT]= Gonnord Tosel exos 19 et 20 p81 ou [MT]= Mneimé Testard p64 et suivantes

**Exercice 20 (Action adjointe, exponentielle)** Soit $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un groupe de Lie linéaire. On considère l'action de $G$ sur $GL_n(\mathbb{R})$ par conjugaison. Notons $C_g$ l'application $g' \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto gg'g^{-1}$.
**a)** Quelle est la différentielle de $C_g$ en l'identité ? On note $Ad(g) = d(C_g)_{Id} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application linéaire inversible ainsi définie, en rappelant que $\underline{gl}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.
**b)** Considérons maintenant $Ad$ comme représentation linéaire de $G$ dans $Aut(M_n(\mathbb{R}))$ ($Aut(E)$ désigne les endomorphismes linéaires inversibles de l'ev $E$). On l'appelle *représentation adjointe* de $GL_n(\mathbb{R})$. On note $adA : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application $ad(A)(H) = [A, H] = AH - HA$. Montrer que la différentielle de $Ad$ en l'identité vérifie $d(Ad)_{Id}(M) = ad(M)$.
**c)** Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t)$ un sous-groupe à un paramètre de $Gl_n(\mathbb{R})$, i.e. un morphisme additif de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est $C^\infty$. En déduire qu'il est de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tX)$, où $X = \varphi'(0)$.
**d)** Montrer la relation

$$\exp(t\, ad(X)) = Ad(\exp(tX)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En déduire l'injectivité de $ad$.

Notons que tout ce qui a été fait ci-dessus dans $\mathbb{R}$ est aussi valable sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 21 ($SU(2,\mathbb{C})$ et $SO(3,\mathbb{R})$)** Rappelons que $SU(2,\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices vérifiant $A^*A = id$. On montre dans cet exercice qu'il y a un isomorphisme explicite $SU(2,\mathbb{C})/\{\pm Id\} \to SO(3,\mathbb{R})$. (Voir aussi les exercices sur les quaternions.
**a)** Vérifier que $SU(2,\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère unité $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.
**b)** Montrer que $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie constituée des matrices anti-hermitiennes.
**c)** Vérifier que les matrices $\xi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\xi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i) \end{pmatrix}$ forment une base de $\underline{su}_2(\mathbb{C})$, et satisfont les relations $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$, $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$, et $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$.
**d)** Identifions ici $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ à $\mathbb{R}^3$, en tant qu'espaces vectoriels. Vérifier que si $g \in SU(2,\mathbb{C})$, alors $Ad(g)$ préserve $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ dans $M_2(\mathbb{C})$. En déduire que la représentation adjointe $Ad$ définit un morphisme de groupes de $SU(2,\mathbb{C})$ dans $Aut(\underline{su}_2(\mathbb{C})) = GL(3,\mathbb{R})$.
**e)** Si $A = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \in \underline{su}_2(\mathbb{C})$, montrez que $\det A = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.
**f)** Soit $g \in SU(2,\mathbb{C})$. Montrez que si $M \in \underline{su}_2(\mathbb{C})$, $\det(Ad(g).M) = \det M$. Déduisez-en que vu comme élément de $GL(3,\mathbb{R})$, $Ad(g) \in O(3,\mathbb{R})$, soit encore que $Ad$ définit un morphisme de groupes de $SU(2,\mathbb{C})$ dans $O(3,\mathbb{R})$. **g)**Par un argument de connexité, montrez que $Ad$ est un morphisme de groupes de $SU(2,\mathbb{C})$ dans $SO(3,\mathbb{R})$.
**h)** Vérifier que son noyau est $\{\pm Id\}$.
**i)** En utilisant la conclusion de la question f), et par un argument de dimension, montrer que l'application linéaire injective $ad : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, encore noté $ad$ par abus de notation, de $\underline{su}_2(\mathbb{C})$ dans $\underline{so}_3(\mathbb{R})$.
**j)** A l'aide du théorème d'inversion locale, montrer que $Ad$ envoie un voisinage de l'identité dans $SU(2,\mathbb{C})$ sur un voisinage de l'identité dans $SO(3,\mathbb{R})$.
**k)** Montrer que l'image de $SU(2,\mathbb{C})$ dans $SO(3,\mathbb{R})$ par $Ad$ est un sous-groupe ouvert et fermé. Conclure.
**l)**En utilisant la relation $\exp(ad(X)) = Ad(\exp(X))$ et la surjectivité de l'exponentielle (à démontrer) de $so(3,\mathbb{R})$ dans $SO(3,\mathbb{R})$, on peut conclure également à la surjectivité de $Ad$.

Voir par ex Mneimé Testard, page 125 et suivantes.

## Définition d'un angle

Vidonne, Audin, ...

**Exercice 22 (Angles) a)** Qu'est-ce qu'un angle orienté d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ?
**b)** Qu'est-ce qu'un angle non orienté de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ?
**c)** Qu'est-ce qu'un angle orienté de droites ?
**d)** Qu'est-ce qu'un angle non orienté de demi-droites ?
**e)** Comment *mesure*-t-on ces angles?

**Exercice 23 (Angles dans l'espace)** Qu'est-ce qu'un angle dièdre ? Un angle solide?

## Permutations et polynômes symétriques

Les actions par permutation de $\mathcal{S}_n$ sont un exemple fondamental, en particulier, l'action sur les polynômes à $n$ variables sont un exemple important. Il a été et sera traité par ailleurs, nous ne reviendrons pas dessus dans ce devoir.

## Actions de groupes et sous-groupes finis de $0(2,\mathbb{R})$ et $SO(3,\mathbb{R})$

Le sujet sera traité dans le devoir sur les isométries. La classification des sous-groupes finis de $SO(3,\mathbb{R})$ (et $0(2,\mathbb{R})$) fait appel à l'action d'un groupe fini $G$ d'isométries sur l'ensemble des points fixes des isométries non triviales de $G$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

## Actions de groupes et théorèmes de Sylow

Ce paragraphe est pris de Francinou Gianella Nicolas tome 1,
Serre "Représentations linéaires des groupes finis",
et Perrin "Cours d'Algèbre"
et Josette Calais, Théorie des groupes.

**Exercice 24 (Lemme de Cauchy) a)** Soit $G$ un groupe fini de cardinal $p^n$, $p$ premier, $n \geq 1$, qui opère sur un ensemble $E$ fini non vide. Posons $E^G = \{x \in E, \forall g \in G, g.x = x\}$. Montrez que $|E^G| \equiv |E| \mod p$.
**b)** Soit $H$ un groupe fini d'ordre $n$, et $p|n$ un diviseur premier de $n$. Montrez que $H$ contient un élément d'ordre $p$ (*Lemme de Cauchy*). On pourra pour cela utiliser une opération de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $E$ des $(x_1, \dots x_p) \in H^p$ tq $x_1 \dots x_p = e_H$.

Soit $G$ un groupe fini d'ordre $g = p^n m$, où $m$ est premier à $p$. Un *$p$-sous-groupe de Sylow* est un sous-groupe de $G$ d'ordre $p^n$.

Nous allons montrer

**Théorème 1** **a)** *Il existe des $p$-sous-groupes de Sylow.*
**b)** *Ils sont conjugués par automorphismes intérieurs.*
**c)** *Tout $p$-sous-groupe de $G$ est contenu dans un $p$-sous-groupe de Sylow.*
**d)** *Le nombre $k$ de $p$-Sylow vérifie $k|n$, $k \equiv 1 \mod p$, et donc $k|m$.*

**Exercice 25** Rédiger la preuve avec le plus d'actions de groupes possibles, et tous les détails, en suivant la trame de Serre, Représentations linéaires des groupes finis, paragraphe 8.4 théorème 15 (et Perrin pour d).

# Action de $SL(2, \mathbb{R})$ par homographies sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{H}$

Ceci sera traité dans le devoir sur les homographies.

# Actions de groupes et topologie

Voir Mneimé Testard, chapitre 1. Ne sera pas traité dans ce devoir.