Suites, exercices. Corrigé

Biblio : Gourdon, Ramis exercices analyse 1, Chambert Loir analyse 1 et 2, Francinou-Gianella-Nicolas exercices analyse 1, hubbard West équations différentielles, Arnaudies Fraysse, Monier, Lelong Ferrand Arnaudies, Ciarlet, Schatzman, demailly..

Équivalents de suites, développements asymptotiques

Exercice 1 (Série harmonique) Trouver un équivalent, puis les trois premiers termes du développement asymptotique de $H_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$.

La série de terme général $1/n$ diverge. Le théorème de comparaison série intégrale dans le cas divergent donne $H_n \sim \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln n$. Ensuite, on étudie $H_n - \ln(n) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}))$. Or $\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) = \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})$. Donc cette série converge. Donc $H_n - \ln(n)$ converge vers une constante appelée $\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_1^\infty(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})$, et $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. Ensuite $H_n - \ln(n) - \gamma = \frac{1}{n} + \sum_1^{n-1}(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})) - \gamma = \frac{1}{n} - \sum_{k=n}^\infty(\frac{1}{k} - \ln(1+1/k))$. Et $\frac{1}{k} - \ln(1+1/k) \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$. La somme est donc équivalente à $\frac{1}{2n}$. Donc $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. Et on pourrait continuer la méthode. *A réviser impérativement, grand classique cette comparaison série intégrale*

Exercice 2 Étude, puis équivalent de $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $u_0 > 0$?
Même question avec $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = v_n + e^{-v_n}$.

Par récurrence, on mq (u_n) est croissante et > 0. Si elle tend vers l alors $l = l + 1/l$ donc $l = +\infty$. (u_n) ne peut pas converger vers $l < \infty$. Elle n'est donc pas majorée, et croissante, elle tend donc vers $+\infty$. Équivalent? Raisonnement heuristique d'abord: si $u_n \sim f(n)$ avec f une fonction régulière. Alors $f(n+1) \simeq f(n) + \frac{1}{f(n)}$. En continu, cela donnerait $f'(n) = \frac{1}{f(n)}$, ce qui donne $f(n) = \sqrt{2n}$. Ce n'est pas une démo! Alors comment faire? Quand on s'attend à un équivalent en une puissance de n voici ce qu'on fait. On cherche à se ramener à une suite auxiliaire (w_n) reliée à (u_n) telle que $w_{n+1} - w_n \sim 1$. Alors comme on sait très bien sommer $\sum_{k=1}^n 1 = n$, on a $w_n \sim n$. Ici comme on s'attend à $u_n \sim \sqrt{2n}$, u_n^2 devrait être équivalent à $2n$. On attaque alors la démonstration rigoureuse. $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n^2 + \frac{1}{u_n^2} + 2 - u_n^2 \sim 2$ quand $n \to \infty$. Donc $u_n^2 \sim 2n$ donc $u_n \sim \sqrt{2n}$.

De même pour v_n. Par récurrence, on voit que (v_n) est croissante et tend vers $+\infty$. Heuristiquement, $v_n \sim f(n)$ donne $f(n) \sim \ln n$. On veut "sommer des 1". On étudie $w_n = e^{v_n}$. On a $w_{n+1} = w_n e^{1/w_n}$. Un DL de exp en 0 donne $w_{n+1} - w_n = 1 + o(1)$, d'où $w_n \sim n$ donc $v_n \sim \ln n$. **Mise en garde: les équivalents ne passent pas à l'exponentielle! Ici $w_n \sim n$ implique $\ln(w_n) \sim \ln n$ (EXO). Mais la réciproque est fausse! Exemple : $n+1 \sim n$ mais $e^{n+1}/e^n \to e$ quand $n \to \infty$. En revanche les DL avec un reste tendant vers 0 passent à l'exponentielle.** Cela dit, mieux vaut le vérifier à la main plutôt que de retenir un tel résultat et risquer la confusion.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. En étudiant la quantité $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$, trouver un équivalent de u_n, puis donner un développement asymptotique à deux termes de la suite.

(u_n) décroit et tend vers 0 (exo). La même méthode que ci-dessus donne $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$ d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. On peut continuer...

Exercice 4 Par le même raisonnement, trouver un équivalent de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \to 0$, $f(x) = x - Ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0.

$u_n \sim (n(\alpha-1)A)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Exercice 5 (Formule de Stirling) Démontrer que $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. Donner les premiers termes de son développement asymptotique. *Utiliser les intégrales de Wallis pour obtenir* $\sqrt{2\pi}$

On étudie $u_n = \frac{1}{n!}\sqrt{n}(n/e)^n$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln u_n$. On obtient $v_n = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. D'où $\sum v_n$ converge, d'où $\ln(u_n)$ converge vers l et $u_n \to l$.

Pour calculer l, on utilise les intégrales de Wallis. (A faire au moins une fois). On démontre aisément que si $I_n = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt$, alors $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On obtient alors $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors un équivalent de I_{2n} d'une part, et de I_{2n+1} d'autre part, en fonction de l. On remarque enfin que la suite (I_n) est décroissante, et que $I_{n+2}/I_n \to 1$, ce qui permet de conclure que $I_{n+1} \sim I_n$ et donc d'obtenir $l = 1/\sqrt{2\pi}$.

Pour avoir la suite du DA, on a $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$ d'où ... Ceci permet d'obtenir un terme du DA de $n!$. Pour avoir la suite, on étudie $u_n - \frac{1}{12n}$, en continuant le DL de v_n au rang d'après...

Exercice 6 Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$. Donner un équivalent, puis le deuxième terme du développement asymptotique.

Réponse $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. (étudier le comportement de u_n, l'encadrer, par exemple $\sqrt{n} \le u_n \le \sqrt{n} + 1$ puis étudier $v_n = u_n/\sqrt{n}$, puis $w_n = u_n - \sqrt{n}$...

Exercice 7 Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Donner un équivalent, puis le deuxième terme du développement asymptotique.

Réponse $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$. Voir F-G-N p104 tome 1.

Exercice 8 Même question avec la suite définie implicitement par $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

L'étude de $\varphi_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ montre que $u_n \in]0, \frac{1}{n}[$. Donc $u_n \to 0$. Donc $u_n^5 = o(u_n)$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. On étudie $v_n = u_n - 1/n$ et $w_n = nu_n - 1$. On obtient $w_n \sim -\frac{1}{n^5}$ d'où $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o(\frac{1}{n^6})$.

Suites récurrentes

Exercice 9 Suites recurrentes linéaires.

Cours standard...

Exercice 10 Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit (z_n) la suite définie par récurrence par $z_{n+1} = S(z_n)$ avec $S(z) = \alpha z + \frac{\beta}{z}$. On suppose que (z_n) est définie pour tout $n \geq 0$.
1. On suppose z_0 imaginaire pur. Étudier le comportement de (z_n).
2. On suppose maintenant $\mathrm{Re}(z_0) > 0$. Montrer que $z_n \to 1$.

1) $z_0 = iy_0$. Si $z_n \to l \in \mathbb{C}$, alors $y_n = \Im z_n \to \Im l \in \mathbb{R}$. On vérifie que $z_{n+1} = iy_{n+1} = i(\alpha y_n - \beta/y_n)$. Donc si z_n converge la limite l est forcément un point fixe ± 1 de S, mais alors y_n converge vers $\Im \pm 1 = 0$ qui n'est pas un point fixe de $y \mapsto \alpha y - \beta/y$. Contradiction. Donc z_n ne converge pas. Il faudrait une étude plus approfondie pour avoir son comportement.

2) Commençons par le cas où $z_0 = x_0 > 0$. Remarquons que pour tout $n \geq 0$, on a $\min(z_n, \frac{1}{z_n}) \leq \min(z_{n+1}, \frac{1}{z_{n+1}}) \leq \max(z_{n+1}, \frac{1}{z_{n+1}}) \leq \max(z_n, \frac{1}{z_n})$. Autrement dit, les suites $m_n = \min(z_n, \frac{1}{z_n})$ et $M_n = \max(z_n, \frac{1}{z_n})$ sont monotones et bornées, donc convergentes (dans $\mathbb{R}_+^*$. Remarquons que si $m_n \to L \leq 1$, alors $M_n \to \frac{1}{L} \geq 1$.

Observons ensuite que m_{n+1} tend d'une part vers $L \leq 1$ (suite extraite de (m_n)), mais aussi vers $\min(\alpha L + (1-\alpha)/L, \frac{1}{\alpha L + (1-\alpha)/L})$. Ces deux quantités sont égales. On en déduit aisément que $L = 1$.

Supposons $\mathrm{Re} z_0 > 0$, mais $\mathrm{Im}(z_0) \neq 0$. Notons $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, et $t_n = \tan \theta_n = y_n / x_n$.

a) En utilisant la définition de la suite z_n, on montre aisément que $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\alpha(1+t_n^2)+(1-\alpha)/x_n^2}{\alpha(1+t_n^2)-(1-\alpha)/x_n^2}$, et donc que la suite $|t_n|$ est décroissante, et donc converge vers une limite positive ou nulle.
b) La suite x_n est bornée. En effet, $x_{n+1} = \alpha x_n + \frac{(1-\alpha)}{x_n(1+t_n^2)}$. En utilisant $a^2 + b^2 \geq 2ab$, on trouve $x_{n+1} \leq 2\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{1+|t_0|^2}} = m$.

c) De a) et b) on déduit que $t_n \to 0$ et donc que $\theta_n \to 0$.

d) Remarquons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive, et $|z| \leq 1$ on a $|\frac{1}{z^2}| = |z|^2 + |z - \frac{1}{z}|^2 - 2\cos\gamma$ où γ est l'angle au sommet d'affixe z dans le triangle de sommets d'affixes $z, 1/z$, et 0. Remarquons aussi que $\gamma \in [\pi/2, \pi]$ implique que le segment $[z, 1/z]$ n'intersecte pas le disque $D(0, |z|)$. Soit $\theta = |Arg(z)| = |Arg(1/z)|$. Remarquons que $|z - \frac{1}{z}|^2 = |z|^2 + |\frac{1}{z}|^2 - 2\cos\theta$. On déduit de toutes ces remarques que si $0 \leq \theta \leq \varepsilon$ et $|z| \leq 1 - 2\varepsilon$, alors $\gamma \geq \pi/2$.

e) Appliquons ce qui précède à z_n ou $1/z_n$ (celui de module minimal), pour $n \geq N_\varepsilon$ suffisamment grand pour avoir $|\theta_n| \leq \varepsilon$. On obtient l'encadrement $\min(|z_n|, \frac{1}{|z_n|}, 1 - 2\varepsilon) \leq \min(|z_{n+1}|, \frac{1}{|z_{n+1}|}) \leq \max(|z_{n+1}|, \frac{1}{|z_{n+1}|}) \leq \max(|z_n|, \frac{1}{|z_n|}, \frac{1}{1-\varepsilon})$.

f) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $m_n = \min(r_n, 1/r_n) \leq 1 - 2\varepsilon$. Dans ce cas, la suite est croissante et majorée, donc converge vers $0 < L \leq 1 - 2\varepsilon$. De même, $M_n \to \frac{1}{L}$. On conclut comme dans le cas réel que $L = 1/L$, d'où contradiction.

Dans le cas contraire, 1 est valeur d'adhérence de z_n. Mais $|S'(1)| < 1$ donc l'égalité des accroissements finis permet de conclure que la suite $z_n \to 1$.

Exercice 11 (Suite de Syracuse) Elle est définie par $u_0 \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair. Testez la sur quelques exemples? Que se passe-t-il? (par exemple $u_0 = 5$, $u_0 = 13$, $u_0 = 79$...) Plus d'infos sur `http://wikipedia.fr` (ou `www.enigmath.fr` si ça vous amuse)

Le cycle $(4, 2, 1)$ est attractif, toute suite converge vers le cycle... personne ne sait le démontrer (à ma connaissance)!

Exercice 12 Soit (u_n) une suite récurrente $(u_{n+1} = f(u_n))$ avec $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'elle converge ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$. (Voir Chambert Loir par ex)

Si u_n converge; alors $u_{n+1} - u_n \to 0$ bien sûr. Réciproquement. Supposons que $l_1 < l_2$ soient deux v.a. de u_n. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon << |l_1 - l_2|$. Il existe N tq $\forall n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Il existe $n_1 \geq N$ tq $|u_{n_1} - l_1| < \varepsilon$. Et il existe $n_2 \geq n_1$ tq $|u_{n_2} - l_2| \leq \varepsilon$. Soit $l \in]l_1, l_2[$. Alors il existe $n \geq N$, $n \in [n_1, n_2]$ tq $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε et N assez grand, l est aussi v.a. Autrement dit, nous venons de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle (de $[0, 1]$).

Maintenant, soit l une valeur d'adhérence de (u_n). Il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)}) \to l$. De plus $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \to 0$. Donc $u_{\varphi(n)+1} \to l$ aussi. Mais $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \to f(l)$. Donc $l = f(l)$. Autrement dit, tout l'intervalle de valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle de points fixes de f.

S'il est réduit à un point, la suite (u_n) converge, ce que l'on souhaite.

Sinon, comme c'est un intervalle de valeurs d'adhérence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_{n_0} est dans l'intervalle de points fixes. Mais alors la suite est stationnaire et converge vers u_{n_0}. Contradiction avec le fait que tous les points de l'intervalle sont valeurs d'adhérence.

Exercice 13 Étudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$, avec $\lambda \in]0,1]$ et $u_0 \in]0,1[$.
Même question avec $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = 2 - v_n^2$.
Que peut-on dire de la suite définie par $w_0 \in \mathbb{R}$ et $w_{n+1} = aw_n(1 - w_n)$, $0 \le a \le 4$. Discuter.

Si la suite u_n converge, c'est vers l'unique point fixe $x = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}$ de f sur $]0,1]$. La fonction $f : x \mapsto 1 - \lambda x^2$ est décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones et bornées, donc elles convergent. Si elles sont adjacentes, elles convergent vers le point fixe $x_\lambda = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}$ de f sur $[0,1]$. Sinon, elles convergent chacune vers un point fixe de $f \circ f$.

Si $\lambda < 1/2$, remarquons que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2\lambda} < 1$. Donc f est contractante et u_n converge vers l'unique point fixe de f.

Si $\frac{1}{2} \le \lambda < 3/4$, et $\varepsilon > 0$ est petit, alors $S_\varepsilon = \{x \in [0,1], |f'(x)| \le 1 - \varepsilon\}$ est un intervalle de la forme $[0, (1-\varepsilon)/2\lambda]$ contenant x_λ dans son intérieur. L'intervalle $I_\varepsilon = S_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\varepsilon)$ est stable et attractif. L'égalité des accroissements finis dit que f est strictement contractante sur I_ε, et que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I_\varepsilon$, alors $\forall k \ge n$, $u_k \in S_\varepsilon$ et $|u_k - x_\lambda| \le (1-\varepsilon)^{k-n}|u_n - x_\lambda|$.

De plus, si $u_0 \notin I_\varepsilon$, on peut vérifier que u_n finit par tomber dedans.

NB: cette preuve est incomplète (on peut la compléter et vérifier qu'il existe n tq $u_n \in I_\varepsilon$, mais elle a le mérite d'utiliser des notions plus générales que celle de FGN (étude des points fixes de $f \circ f$): ensembles stables et bassins d'attraction.

Si $\lambda > 3/4$, $|f'(x_\lambda)| > 1$, et l'égalité des accroissements finis implique qu'il existe un voisinage de x_λ tel que si u_n tombe dedans, alors $|u_{n+1} - x_n| \ge (1+\varepsilon)|u_n - x_\lambda|$. Donc u_n ne converge pas vers le point fixe x_λ, sauf si $u_0 = x_\lambda$. u_{2n} et u_{2n+1} convergent donc vers d'autres limites, points fixes de $f \circ f$.

Si $\lambda = 3/4$, une étude plus fine s'impose. En étudiant les points fixes de $f \circ f$, on remarque que x_λ est le seul point fixe de $f_{3/4}$. Donc u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers ce point, donc u_n aussi (voir FGN analyse 1).

Remarquons que si $f(x) = 2 - x^2$, alors $f([-2,2]) \subset [-2,2]$. Si $v_0 < -2$, $v_n \to -\infty$. Si $v_0 > 2$, $v_n \to +\infty$. Dans les autres cas, la suite v_n a un comportement souvent « chaotique ». Voir Hubbard West et FGN analyse 1 par exemple. Il y a de nombreuses orbites périodiques de toutes périodes, et aussi de nombreuses orbites au comportement complètement pathologique. Ceci signifie qu'en fonction du choix de $v_0 \in [-2,2]$, les comportements de (v_n) peuvent être très différents (suite périodique, suite dense, ...)

Exercice 14 Énoncer le théorème du point fixe pour les applications contractantes, avec vitesses de convergence. Démonstration? Exemples d'application?

Cours

Convergence en moyenne de Cesàro

Exercice 15 Soit (a_n) une suite de nombres positifs, bornés. Montrer que (a_n) tend vers 0 en moyenne de Cesàro (i.e. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to 0$) si et seulement si il existe une partie A de $\mathbb{N}$ de densité nulle (i.e. t.q $\lim_{n\to\infty} \frac{\#A\cap[0,n-1]}{n} \to 0$) en dehors de laquelle (a_n) converge vers 0: $\lim_{n\to\infty, n\notin A} a_n = 0$.

Autrement dit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne de Cesàro ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$ converge, pour A très petit (de densité nulle).

S'il existe une telle partie A, on introduit la suite b_n qui vaut $b_n = a_n$ si $n \notin A$ et $b_n = 0$ sinon. Alors $b_n \to 0$ et comme A est de densité nulle, et (a_n) bornée, alors $\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} a_k - \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} b_k \to 0$.

Réciproquement. Supposons $M_n = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} a_k \to 0$. Alors $\forall p \ge 1$ il existe $n_p \ge 1$ tq si $n \ge n_p$ alors $0 \le M_n \le \frac{1}{p}$. On définit $A = \{n \in \mathbb{N}, \exists p \ge 1 \text{ tq } n_{p-1} \le n < n_p \text{ et } a_n \ge \frac{1}{\sqrt{p}}\}$. Comme $M_n \to 0$, si $n_{p-1} \le n < n_p$, on montre que $\frac{1}{n}\#A \cap [0, n[\frac{1}{\sqrt{p}} \le M_n \le \frac{1}{p-1}$. On en déduit que $\frac{1}{n}\#A \cap [0, n[\le \frac{\sqrt{p}}{p-1}$, et donc que A est de densité nulle. Par ailleurs, si $n \notin A$, soit $p = \varphi(n)$ tq $n_{p-1} \le n < n_p$; alors $a_n \le \frac{1}{\sqrt{\varphi(n)}} \to 0$.

Exercice 16 (Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue; soit $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = f(v_n)$, $n \ge 0$. Soit $u_n = \frac{\sum_{k=0}^n v_k}{n+1}$.
1. On suppose (u_n) bornée. montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant un point fixe unique a mais telle que si $v_0 \ne a$, alors (u_n) ne converge pas vers a.

1) Si f n'a pas de point fixe, alors $\forall x, f(x) > x$ ou $\forall x, f(x) < x$. Alors v_n est strictement monotone et ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Elle tend donc vers $\pm\infty$ Donc u_n n'est pas bornée.
2) $f(x) = 2x$

Exercice 17 (Moyennes de Cesàro généralisées) Soit (a_n) une suite d'un espace vectoriel normé E et (α_n) une suite de nombres positifs avec $\alpha_0 > 0$ et $\sum_n \alpha_n = +\infty$.
1. On suppose que $a_n \to l$. Montrer que la suite(b_n) définie par $b_n = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k a_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$ converge vers l.
2. On suppose que $a_{n+1} - a_n \to \lambda$. Montrer que $\frac{a_n}{n} \to \lambda$.
3. Application: trouver un équivalent de x_n défini par $x_{n+1} = \sin x_n$, en utilisant un DL de sin au voisinage de 0 puis en prenant $a_n = \frac{1}{x_n^2}$.

Classique. A faire

Exemples, divers

Exercice 18 (suites arithmétiques, géométriques)

Exercice 19 (suites arithmético-géométriques et variantes) Soient $a, b > 0$. **1.** On définit (a_n) et (b_n) par récurrence en posant $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune, la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.
2. Même question lorsque $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}$.

1)On montre que a partir de $n = 1$ au moins , on a $a_1 \geq a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \geq b_1$. (récurrence et $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$) Donc les suites convergent. Avec a la limite $a_\infty + b_\infty = 2a_\infty$ d'où elles ont même limite.

Exercice 20 $y_n = x_{n-1} + 2x_n$ converge ssi (x_n) converge.

Evidemment, $x_n \to l$ implique $y_n \to 3l$. Réciproquement, suposons $y_n \to l \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer y_n par $y_n - l$ et x_n par $x_n - l/3$, on peut supposer $l = 0$.

Remarquons que x_n ne peut pas tendre vers $\pm\infty$, sinon y_n ferait pareil. Soit $0 < \varepsilon$. Soit N assez grand tq si $n \geq N$, alors $y_n = \pm\varepsilon$. Alors $x_{N+1} = -\frac{x_N}{2} \pm \varepsilon$. Et par récurrence, pour tout $k \geq 1$, $x_{N+k} = (-1)^k \frac{x_N}{2^k} \pm \varepsilon$. Donc il existe $N_2 \geq N$ tel que si $N + k \geq N_2$, alors $x_{N+k} = \pm 2\varepsilon$. On en déduit que (x_n) tend vers 0 .

Exercice 21 (suites sous additives) Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tous n, m, $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Montrer que $\frac{u_n}{n}$ converge vers $l = \inf \frac{u_n}{n}$.

On vérifie aisément que pour n fixé, et $k \in \mathbb{N}$, et $0 \leq p \leq n-1$, on a $u_{kn+p} \leq ku_n + \max_{1 \leq i \leq p-1} u_i$. Par conséquent, $\limsup_{k\to\infty} \frac{u_{kn+p}}{kn+p} \leq \frac{u_n}{n}$. Ceci étant vrai pour tout $0 \leq p \leq n-1$, on a $\limsup_{m\to\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$. Ceci est vrai pour tout $n \geq 1$, on en déduit d'une part $\limsup_{m\to\infty} \frac{u_m}{m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n}$ et d'autre part $\limsup_{m\to\infty} \frac{u_m}{m} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n}$. En particulier, la suite u_m/m converge. De plus comme on a toujours $\inf_n u_n/n \leq \liminf_n u_n/n$, on en déduit que la limite est égale à $\inf_n u_n/n$.

Exercice 22 (développement en fractions continues) **1.** Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{N}$ et $x = \frac{p}{q}$ une écriture irréductible, $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x-E(x)}$. Montrer que si $f(x) = \frac{p'}{q'}$ est une écriture irréductible, alors $q' < p'$. Soit $x_0 = x$, et tant que ça a un sens, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $x_n \in \mathbb{N}$. On note $y_n = E(x_n)$, puis $x = x_0 = y_0 + \frac{1}{y_1+\frac{1}{y_2+\frac{1}{\cdots}}}$, ou encore $x = [y_0, y_1, \ldots, y_n]$.
2.Soit $x \notin \mathbb{Q}$. Soit $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_n = E(x_n)$. On définit par récurrence deux suites d'entiers par $P_0 = y_0$, $P_1 = y_0 y_1 + 1$, $Q_0 = 1$, $Q_1 = y_1$, $P_{n+1} = P_n y_{n+1} + P_{n-1}$, $Q_{n+1} = Q_n y_{n+1} + Q_{n-1}$. Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que $x = \dfrac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}$.
3. Soit $\xi_n = [y_0, \ldots, y_n]$. Montrer que $\xi_n = \dfrac{P_n}{Q_n} = \dfrac{P_{n-1}y_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}y_n + Q_{n-2}}$.
4. Montrer que Q_n,$n \geq 2$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$. Montrer que $P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (-1)^n$. En déduire que (ξ_{2n}) est croissante, (ξ_{2n+1}) décroissante.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $|x - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{1}{Q_nQ_{n-1}}$ et $\xi_n \to x$ et si $|x - p/q| < |x - \frac{P_n}{Q_n}|$ alors $q > Q_n$.

1) élémentaire. Pas de piège!
2) Récurrence élémentaire.
3) Récurrence avec pour hypothèse $\forall (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on a $[y_0, \ldots, y_n] = \frac{P_n}{Q_n}$ où les P_n, Q_n sont définis en fonction de $(y_0, \ldots, y_n)$ comme ci-dessus. Pour passer de n à $n+1$, on considère $(y_0, \ldots, y_{n-1}, y'_n)$ avec $y'_n = y_n + \frac{1}{y_{n+1}}$ et $P'_n = P_{n-1}y'_n + P_{n-2}$ et idem pour Q'_n.
4) pas de difficulté majeure.
5) Observons que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_nQ_{n+1}}$. On en déduit aisément que ξ_{2n} est croissante, ξ_{2n+1} décroissante, et que par ailleurs $|\xi_{n+1} - \xi_n|$ tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes, donc convergentes.

De plus, $\frac{P_{n+p}}{Q_{n+p}} - \frac{P_n}{Q_n} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}}$. C'est une série alternée. On en déduit que $\left|\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_k}{Q_k} - \dfrac{P_n}{Q_n}\right| \leq \dfrac{1}{Q_nQ_{n-1}}$. Reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ et que l'approximation par les fractions continues est la meilleure possible. Je vous renvoie a l'excellente référence Hardy-Wright, dont il existe maintenant une traduction francaise.

Exercice 23 Étudier la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^n k^n$.

$u_n = \sum_{k=0}^n (1-\frac{k}{n})^n$. Chacun des termes de la somme converge vers e^{-k}. Si on a de la chance, la somme converge vers $\sum_{k=0}^\infty e^{-k} = \frac{e}{e-1}$. C'est bien le cas, et toute la démonstration consiste à démontrer que le théorème de convergence monotone s'applique.

Exercice 24 Soit (u_n) une suite vérifiant $u_n \to +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \to 0$. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $v_n = u_n - E(u_n)$ (E est la partie entière.)

C'est $[0,1]$.

Divers

Exercice 25 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin 2u_n$.

Quoi qu'il arrive, $u_1 \in [-1,1]$. On peut donc déjà supposer $u_0 \in [-1,1]$. Par parité de sin, on peut supposer $u_0 \geq 0$. Si $u_0 = 0$ la suite est stationnaire à 0. Sinon, tant que $u_n \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a $u_{n+1} > u_n$. Comme la fonction $x \mapsto \sin 2x$ n'a pas de point fixe sur cet intervalle, la suite (u_n) en sort nécessairement en temps fini. Par ailleurs, l'application est contractante sur $[\frac{\pi}{4}, 1]$ (exo). Donc (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur cet intervalle.

Exercice 26 Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{a(1+a^2)}{1+u_n^2}$.

f est paire donc on peut supposer $u_0 \geq 0$. De même, par symétrie on suppose $a \geq 0$, et même $a > 0$ car $a = 0$ est sans intérêt. On étudie f, un seul point fixe $x = a$. Tant que $u_n < a$, $u_{n+1} > u_n$. Si $u_n > a$, $u_{n+1} < u_n$.

Si $|a| < \sqrt{2}$, $|f'(a)| < 1$ et (u_n) converge vers a. Lorsque a est proche de 0, f est même contractante (pour quelles valeurs de a exactement? Essayer de majorer $\max f'$ par 1 pour les trouver)

Si $|a| \geq \sqrt{2}$. On sait que $\mathbb{R}_+$ est stable. Et même, $]\frac{a(1+a^2)}{1+a^2(1+a^2)^2}, a(1+a^2)[$ est stable. Si $u_0 > a(1+a^2)$ alors $u_1 \leq a(1+a^2) = \max f$. Et $u_2 \geq \frac{a(1+a^2)}{1+a^2(1+a^2)^2}$. Autrement dit, à partir de $n = 2$ on est dans l'intervalle. Sur cet intervalle, f est décroissante, donc $f \circ f$ est croissante. donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. En étudiant le signe de $f \circ f(x) - x$, ou bien de $u_2 - u_0$ suivant les différentes valeurs de u_0, ce qui revient au même, on en déduit le comportement de ces deux sous-suites. (A Finir, désolée, je n'ai plus le temps).

Méthodes numériques

Exercice 27 (Convergence locale de la méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$) 1. Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
1. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous x, y de la boule $\overline{B}$, on ait $\|df_x - df_y\| \leq \gamma \|x - y\|$. En déduire que pour tous x, y de la boule $\overline{B}$, on a $\|f(x) - f(y) - df_y(x-y)\| \leq \frac{\gamma}{2}\|x-y\|^2$.
2. On suppose de plus que pour tout $x \in B$, df_x est inversible, et qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\|df_x^{-1}\| \leq \beta$. On définit une suite (x_n) par récurrence par $x_{n+1} = x_n - df_{x_n}^{-1}.f(x_n)$. Supposons que $\alpha = \|x_1 - x_0\| < \frac{2r}{2+\beta\gamma}$. Alors la suite (x_n) vérifie pour tout $n \geq 0$ $x_n \in B$ et $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha h^{2^n - 1}$, où $0 < h < 1$ est une constante à préciser.
3. Montrer que (x_n) converge vers un élément $\xi \in B$ tel que $f(\xi) = 0$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\|x_n - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^n - 1}}{1 - h^{2^n}}.$$

4. Commentaires.

Corrigé dans Chambert Loir Analyse 2. Pour 1, on étudie $t \mapsto f(tx + (1-t)y)$. Pour 2), l'astuce est d'écrire $\|x_{n+1} - x_n\| = \| - df_{x_n}^{-1}.f(x_n)\| \leq \beta \|f(x_n)\|$. Mais $f(x_{n-1}) + df_{x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) = 0$. On rajoute ce terme dans la norme. On peut alors utiliser 1 et obtenir $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\beta\gamma}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2$. Le reste est de la simple récurrence avec $h = \alpha\beta\gamma/2$. Pour 4). Noter que la convergence est extrêmement rapide, mais il faut arriver à trouver un bon point de depart, très proche de la limite ξ, pour avoir $\|x_1 - x_0\|$ assez petit déjà. En pratique, on utilise une méthode numérique plus lente mais plus sure, on trouve une valeur approchée grossière de ξ et on s'en sert comme point de départ.

Exercice 28 (Accélération de convergence, méthode d'Aitken) Soit (x_n) une suite convergeant vers une limite ξ, mais "trop lentement". On suppose qu'il existe une constante k telle que $0 < |k| < 1$ telle que $x_{n+1} - \xi \sim k(x_n - \xi)$.Soit encore $x_n - \xi \sim k^n(x_0 - \xi)$.

1. On peut remplacer x_n par $v_n = \frac{x_{n+1} - kx_n}{1-k}$. Vérifier que v_n converge vers ξ plus vite que x_n (i.e. $(v_n - \xi)/(x_n - \xi) \to 0$.
2. La méthode d'Aitken consiste à remplacer la suite (x_n) par la suite (y_n) définie par $y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$, soit encore $y_n = \frac{x_{n+1} - k_n x_n}{1 - k_n}$ avec $k_n = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n}$. (Noter qu'il n'y a pas besoin de connaître k!) Montrer que (y_n) converge plus vite que (x_n), i.e. $(y_n - \xi)/(x_n - \xi) \to 0$.

1) un calcul donne $\frac{v_n - \xi}{x_n - \xi} = \frac{k}{1-k}.o(1) \to 0$. 2) est interessant quand on ne connait pas k, qu'on approche par k_n. Calculs analogues

Exercice 29 (Accélération de convergence des suites récurrentes) Soit (x_n) une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, avec f de classe C^1. On considère alors la suite définie de la manière suivante: $X_0 = x_0$, $X_{n+1} = g(X_n) = X_n - \frac{(f(X_n)-X_n)^2}{f\circ f(X_n)-2f(X_n)+X_n}$. **1.** Montrer que les points fixes de g sont aussi des points fixes de f. Réciproquement, montrer que si $f(\xi) = \xi$ et $f'(\xi) \neq 1$ alors $g(\xi) = \xi$.
2. On suppose que ξ est un point fixe répulsif de f ($|f'(\xi)| > 1$ et $f(\xi) = \xi$). Que fait (x_n)? Montrer que si X_0 est assez proche de ξ, $X_n \to \xi$. Quelle est la vitesse de convergence de X_n? Commentaires?

remarque Étourderie de ma part.J'aurais dû regrouper les exos. Il s'agit de la même méthode d'Aitken que ci-dessus, mais on ne suppose plus que la suite initiale (x_n) converge.
1) on fait un DL de f et g au voisinage d'un point fixe. Si $f(\xi) = \xi$ et $f'(\xi) \neq \pm 1$, le DL montre que g se prolonge par continuité avec $g(\xi) = \xi$. 2) Lorsque $|f'(\xi)| > 1$ et $f(\xi) = \xi$, on obtient $g'(\xi) = -1$. On transforme donc un point fixe répulsif en point fixe indifférent. x_n ne converge pas vers ξ mais la suite X_n peut peut-être converger vers ξ. Effectivement, si on calcule $g'(x)$ pour $x \neq \xi$ et qu'on fait un D.L. au voisinage de ξ, on en déduit que $g'(\xi) = 0$. Autrement dit, si x_0 est suffisamment proche de ξ, la suite (X_n) va converger rapidement vers ξ.

Pour les exercices suivants, on consultera avec profit Schatzmann et Demailly

Exercice 30 (Résolution numérique d'équations différentielles) Décrire la méthode d'Euler. Quand converge-t-elle? Intérêts et inconvénients? Lien avec les suites? Idem avec la méthode de Runge Kutta

Exercice 31 (Intégration numérique) Décrire (si possible sur des exemples) la méthode des trapèzes, du point milieu, de Simpson, de Runge Kutta. Convergence? Vitesse?

Exercice 32 Décrire l'algorithme de transformation de Fourier rapide. Intérêt?

Exercice 33 On itère une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($U_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U_{n+1} = A.U_n$. Que peut-il se passer? Discuter suivant les valeurs propres de A, et le point de départ U_0.

Systèmes dynamiques

Définition 1 *Un* système dynamique *est la donnée d'un espace X et d'une application $f : X \to X$. Lorsque X est un espace topologique, on suppose en général f continue. Lorsque $(X, \mathcal{B}, m)$ est un espace mesuré, on suppose f mesurable. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, on peut supposer f différentiable...*

On s'intéresse alors aux orbites *du système dynamique. L'*orbite *de $x_0 \in X$ est la suite de points $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots\}$. La théorie des systèmes dynamiques cherche à décrire le comportement des orbites de tous les points x_0 de X.*

À x_0 fixé, il ne s'agit "que" de l'étude d'une suite récurrente. Mais les systèmes dynamiques s'intéressent au comportement de toutes les orbites lorsque le point de départ $x_0 \in X$ varie.

Exercice 34 (Équirépartition) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n \mod 1$, $u_0 \in [0,1[$. Nous allons montrer le résultat suivant. *Il existe un ensemble $Q \subset [0,1[$ de mesure de Lebesgue $\lambda(Q) = 1$ tel que pour tout $u_0 \in Q$ et pour tout intervalle $[a,b[\subset [0,1[$, le nombre moyen de termes de la suite (u_n) dans l'intervalle $[a,b[$ converge vers $b-a$.* Soit encore $\dfrac{1}{n}\#\{1 \le k \le n,\ u_k \in [a,b[\} \to b-a$ quand $n \to \infty$. Ceci signifie qu'asymptotiquement, la suite (u_n) se répartit uniformément dans tous les sous-intervalles $[0,1[$, proportionnellement à la longueur de chaque intervalle.

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe $x \in [0,1[$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de $u_0 = x$ est périodique de période exactement m: $u_m = u_0$ et $u_n \neq u_0$ pour $1 \le n \le m-1$. Trouver tous les u_0 possibles. En déduire que les suites associées ne sont pas équiréparties au sens ci-dessus.

2) Nous allons démontrer le théorème pour $a = 1/2$ et $b = 1$. Notons $I_0 = [0, 1/2[$ et $I_1 = [1/2, 1[$. Si $x \in [0,1[$ notons $X_0(x) = 0$ si $x \in I_0$ et $X_0(x) = 1$ si $x \in I_1$. On construit ensuite la suite $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_{n+1}(x) = X_n(f(x)) = X_O(f^{\circ n}(x))$. Autrement dit, $X_n(x) = 0$ si $f^n(x) \in I_0$ et $X_n(x) = 1$ sinon.
2.a) Montrer que pour tout $n \ge 1$,

$$x \in I_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k(x)}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^n}\right[$$

En déduire que $x = \displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{X_n(x)}{2^{n+1}}$.
2.b) On munit $I = [0,1[$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
2.c) À l'aide de la loi forte des grands nombres, en déduire le théorème lorsque $[a,b[= I_0$ ou I_1. **3a)** L'étape suivante est la démonstration du théorème pour les intervalles dyadiques $[a,b[= [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$, $m \ge 1$. Pour cela, on fait le même raisonnement en remplaçant f par $f^m : x \to 2^m x$, avec 2^m intervalles $I_k^{(2^m)} = [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[$. On construit une suite de v.a. iid $X_n^{(2^m)}$ de loi de Bernoulli, $P(X_n^{(2^m)} = 1) = \frac{1}{2^m}$. Et le même raisonnement donne $\dfrac{1}{n}\#\{n \in \mathbb{N}, f^{nm}(x) \in I_k^{(2^m)}\} \to \dfrac{1}{2^m}$
3b) On obtient le résultat annoncé pour les intervalles dyadiques $I_k^{(2^m)}$ avec f en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

$p\in\mathbb{N}$ et $0\le r\le m-1$ tel que $n=mp+r$. On utilise 3a et un argument de moyenne de Cesàro pour démontrer le théorème pour tous les intervalles dyadiques d'ordre m.
4 On passe à tous les intervalles $[a,b[$ par un argument d'approximation de a et b par des nombres dyadiques.

Avant tout, un ex de suite dense non équidistribuée: $u_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$ et $u_{2(n+1)}=2u_{2n} \mod 1$
Si $[a,b[$ est un intervalle ne contenant pas 0, asymptotiquement, la proportion de termes u_k, $0\le k\le n-1$ de la suite qui sont dans l'intervalle $[a,b[$ tend vers $(b-a)/2$ quand $n\to\infty$. Si $[a,b[$ contient 0, la proportion tend vers $1/2+(b-a)/2$.
1)Dessiner f; $f\circ f$, $f\circ f\circ f$;... pour voir les points fixes et comprendre ce qui se passe. $m=1$, le seul point fixe est 0. $m=2$, $f\circ f$ a trois points fixes: $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$. Si $m\ge 1$ $f^m x=2^m x \mod 1$ $f^m x=x$ ssi $x=\frac{k}{2^m-1}$, $0\le k\le 2^m-2$. La fonction f a donc 2^m-1 points périodiques de période m. (En fait, graphiquement, tres facilement ,on en compterait 2^m si le point 1 n'etait pas identifie a 0.
2a) $X_0=\mathbf{1}_{[1/2,1[}$ et $X_{n+1}=X_n(2x \mod 1)=X_0(2^n x \mod 1)$. Représenter sur l'intervalle $[0,1[$ l'ensemble $\{x,X_0(x)=0\}$ (resp. $\{x,X_0(x)=1\}$). Idem pour X_1, X_2... On montre par récurrence que $x\in I_n(x)$ pour tout $n\ge 1$. Pour $n=1$, c'est la définition quasiment de X_0. L''hypothèse de récurrence est $\forall x\in[0,1[, x\in I_n(x)$. Le passage du rang n au rang $n+1$ se fait en appliquant l'hypothèse de récurrence à $f(x)$ et en remarquant que $X_0(x)=0$ ssi $x=f(x)/2$ et $X_0(x)=1$ ssi $x=(f(x)+1)/2$.

Les intervalles $(I_n(x)_{n\ge1}$ sont emboités les uns dans les autres et de longueur $1/2^n$. Leur intersection est réduite à un point, x qui s'écrit donc nécessairement $x=\sum_{n\ge0}\frac{X_n(x)}{2^n}$ C'est le développement binaire ou dyadique de x.
2b) $P(X_0=0)=\lambda(\{x\in[0,1[,X_0(x)=0\})=\lambda(I_0(x))=1/2$ De même $P(X_0=1)=1/2$. Ensuite, si $(a_0,\dots,a_n)\in\{0,1\}^{n+1}$, on a $P(X_0=a_0,\dots,X_n=a_n)=\lambda([\sum_0^n\frac{a_k}{2^{k+1}},\sum_0^n\frac{a_k}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}[=\frac{1}{2^{n+1}}$. On en déduit d'abord que pour tout $n\ge1$ et tout $a\in\{0,1\}$, $P(X_n=a)=\frac12$. En effet, $P(X_n=a)=\displaystyle\sum_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n}P(X_0=a_0,\dots,X_{n-1}=a_{n-1},X_n=a)=\displaystyle\sum_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\{0,1\}^n}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac12$. Autrement dit, les $X_n:[0,1[\to\{0,1\}$ sont des variables aléatoires (fonctions mesurables) de paramètre 1/2. Ensuite, on voit que $P(X_0=a_0,\dots,X_{n-1}=a_{n-1},X_n=a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}=\Pi_{k=0}^n P(X_k=a_k)$. Les X_n sont donc indépendantes.

On peut appliquer la loi des grands nombres, qui nous dit alors que pour λ-presque tout $x\in[0,1[$ (i.e pour tout x dans un ensemble borélien $\Omega\in[0,1[$, avec $\lambda(\Omega)=1$) $\displaystyle\frac1n\sum_{k=0}^{n-1}X_k(x)$ converge vers $E(X_0)=1/2$. Ceci donne le résultat voulu pour l'intervalle $[1/2,1[$.
3a) On considère $I^k=[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}[$ et f^k la composée k fois de f. On note $Y_0(x)=\sum_{i=0}^{2^m-1}i1_{[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}[}$ et $Y_{n+1}(x)=Y_n(f(x))$. On note $I_n(x)$ l'intervalle $[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X_j(x)}{(2^m)^{j+1}},\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X_j(x)}{(2^m)^{j+1}}+\frac{1}{2^mn}[$. On introduit aussi $X_O(x)=\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}[}$. On remarque que $P(X_0=1)=P(Y_0=k)$. On effectue le même raisonnement qu'à la question 2, et on obtient que les (X_n) sont une suite de v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2^m$. La loi des grands nombres donne $\displaystyle\frac1n\sum_0^{n-1}X_k(x)\to E(X_0)=\frac{1}{2^m}$.
3b) On écrit $n=mq+r$. Ici m est fixé, n varie, et $q=q(n)$, $0\le r=r(n)\le m-1$. On note que $\#\{0\le j\le n-1,x_j\in[k/2^m,(k+1)/2^m[\}=\sum_{r=0}^{m-1}\#\{0\le j\le q(n)-1,f^{mj}(f^r(x_0))\in[k/2^m,(k+1)/2^m[\}$. Pour tout $0\le r\le m-1$, il existe $\Omega_r\subset[0,1[$ de mesure 1 tq $forally\in\Omega_r$, la suite $f^{mj}(y)$ est équirépartie. Il existe donc (exo: détailler pourquoi) un ensemble $\Omega\in[0,1[$ de mesure 1 tq pour tout $x_0\in\Omega$, on a $f^r(x_0)\in\Omega_r$. En particulier, pour tout $x_0\in\Omega$, et pour tout $0\le r\le m-1$ on a $\frac{1}{q(n)}\#\{0\le j\le q(n)-1,f^{mj}(f^r(x_0))\in[k/2^m,(k+1)/2^m[\}\to\frac{1}{2^m}$ quand $n\to\infty$. On conclut en remarquant que $\frac1n\#\{0\le j\le n-1,x_j\in[k/2^m,(k+1)/2^m[\}=\frac{q(n)}{n}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{q(n)}\#\{0\le j\le q(n)-1,f^{mj}(f^r(x_0))\in[k/2^m,(k+1)/2^m[\}\to\frac1m\sum_{r=0}^{m-1}\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^m}$. On a donc montré que pour tout intervalle dyadique de la forme $I_m^k=[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}[$, il existe un ensemble $\Omega=\Omega_m^k$ de mesure 1 tq pour tout x_0 dans $\Omega_{k,m}$ la suite (x_n) est équirépartie. L'intersection de tous les $\Omega_{k,m}$ pour $m\ge1$, $0\le k\le 2^m-1$ est un ensemble $\tilde\Omega$ de mesure 1. Pour tout $x_0\in\tilde\Omega$, la suite (x_n) associée est équirépartie dans tous les intervalles dyadiques $[k/2^m,(k+1)/2^m[$.
4) Un intervalle $[a,b[$ quelconque peut s'écrire comme union au plus dénombrable d'intervalles dyadiques du type précédent. Si $x_0\in\tilde\Omega$, la suite (x_n) vérifiera $\frac1n\#\{0\le i\le n-1,x_i\in[a,b[\}\to b-a$.

Exercice 35 (Equirépartition (bis)) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1[$.
1. Montrer que si (x_n) est *équirépartie dans* $[0,1[$, i.e. pour tout $[a,b[$ dans $[0,1[$, $\displaystyle\frac1n\#\{1\le k\le n,\, x_n\in[a,b[\}\to b-a$ quand $n\to\infty$, alors (x_n) est dense dans $[0,1[$. Quel est l'ensemble de ses valeurs d'adhérence?
2.a. Montrer que (x_n) est équirépartie dans $[0,1[$ ssi pour toute fonction Riemann intégrable f sur $[0,1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n f(x_k)=\int_0^1 f(t)\,dt$. (On notera $S_n(f)=\frac1n\sum_{k=1}^n f(x_k)$.
2.b Montrer le même résultat avec f continue sur $[0,1[$.
2.c. Montrer qu'il suffit de supposer que pour tout entier non nul $m\in\mathbb{Z}^*$, on a $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi m x_k}=o(n)$ quand $n\to\infty$.
3. Soit $\theta\notin\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $x_n=n\theta \mod 1$ est équirépartie dans $[0,1[$. Interpréter le résultat en termes de rotations.

Tiré de Francinou Gianella ou Chambert-Loir

Exercice 36 (Suite logistique) *cf exo 11. suite $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=ax(1-x)$.*

Exercice 37 (Théorème de Sarkovski) 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Soit $[\alpha, \beta] \subset f([0,1])$. Montrer qu'il existe un segment $[u,v] \subset [0,1]$ tel que $f([u,v]) = [\alpha, \beta]$.
2. On suppose qu'il existe n segments $I_0, \ldots, I_{n-1}$ tels que $I_0 \subset f(I_{n-1})$, $I_{k+1} \subset f(I_k)$ pour $n-2 \geq k \geq 0$. Montrer que $f^n = f \circ f \circ \ldots f$ admet un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout k.
3. Théorème de Sarkovski Un point fixe d'ordre n est un point x_0 tel que $f^n(x_0) = x_0$ et $f^k(x_0) \neq x_0$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Si f a un point fixe d'ordre 3, montrer qu'alors pour tout $n \geq 1$, elle a un point fixe d'ordre n. *Indication: prendre les intervalles $I_0 = [x_0, f(x_0)]$, $I_1 = [f(x_0), f^2(x_0)]$ et $I_2 = [f^2(x_0), f^3(x_0) = x_0]$ et essayer d'appliquer ce qui précède avec une suite de n intervalles bien choisis.*

Exo tiré de (entre autres) Francinou-Gianella-Nicolas. Très bel exercice.

Exercice 38 (Itération complexe) *Regarder le paragraphe en question dans Hubbard-West.*