

# Corrigé du devoir.

## Homographies, birapports, nombres complexes et géométrie.

### 1 Homographies et birapports

#### 1.1 Exercices élémentaires

**Exercice 1 (Le groupe des homographies)** On appelle homographie une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $h : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , où  $a, b, c, d$  sont des nombres complexes tq  $ad - bc \neq 0$ .

- 1) Quel est l'ensemble de définition, et l'image d'une homographie ?
- 2) Rappeler la définition de la droite projective complexe  $P^1(\mathbb{C})$ .
- 3) Montrer qu'une homographie se prolonge naturellement en une bijection de  $P^1(\mathbb{C})$  dans  $P^1(\mathbb{C})$ .
- 4) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{H}$  des homographies possède une structure naturelle de groupe, et que ce groupe est engendré par les similitudes directes et l'application  $z \mapsto 1/z$ .
- 5) On considère l'application de  $GL_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{H}$  définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left\{ h : z \in P^1(\mathbb{C}) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\}$$

Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes. Déterminer son image et son noyau.

1) Si  $c \neq 0$ , une homographie est définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ , et son image  $h(\mathbb{C} \setminus \{-d/c\})$  est  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ . En effet, on vérifie qu'elle induit une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  en exhibant son inverse  $z \mapsto \frac{1}{ad-bc} \frac{dz-c}{-bz+a}$ .

Lorsque  $c = 0$ , l'homographie est une translation, donc une bijection de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

2) La droite projective complexe est définie comme  $P^1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim$ , où  $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$  ssi il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tq  $(z_1, z_2) = \lambda(z'_1, z'_2)$ . On note  $[z_1, z_2]$  la classe d'équivalence dans  $P^1(\mathbb{C})$  de  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . La droite projective  $P^1(\mathbb{C})$  s'identifie à  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , via l'utilisation de coordonnées homogènes : si  $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , on lui associe bijectivement  $[z, 1]$  si  $z \in \mathbb{C}$ , ou  $[1, 0]$  si  $z = \infty$ . La topologie sur  $P^1(\mathbb{C})$  est un prolongement de celle de  $\mathbb{C}$  obtenu en considérant comme voisinages ouverts du point à l'infini les complémentaires des compacts de  $\mathbb{C}$ . Elle coïncide avec la topologie quotient de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim$  (exo).

3) Une homographie  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  se prolonge à  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  par  $h(\infty) = \frac{a}{c}$  et  $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ .

4) On compose deux homographies, et on vérifie explicitement par un calcul que la composée de deux homographies est encore une homographie. L'application  $z \mapsto z$  est clairement une homographie.

Maintenant, une homographie de la forme  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $c \neq 0$ ,  $a \neq 0$  peut s'écrire comme composée de  $z \mapsto cz + d$ , de  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , et de  $z \mapsto \alpha z + \beta$ , pour  $\alpha$  et  $\beta$  bien choisis. Les cas  $c = 0$  ou  $a = 0$  se traitent de manière analogue, et montrent que le groupe des homographies est engendré par les similitudes (homothéties-translations)  $z \mapsto \alpha z + \beta$ ,  $\alpha \neq 0$  et l'application  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

5) Les calculs -non rédigés dans ce corrigé- de la question précédente montrent que l'application de  $GL_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{H}$  définie dans l'énoncé est un morphisme de groupe. Son noyau est l'ensemble des matrices diagonales  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Il est clairement surjectif par définition d'une homographie.

**Exercice 2 (Birapport)** 1) Soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $P^1(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une unique homographie qui envoie  $a$  sur 0,  $b$  sur 1,  $c$  sur  $\infty$ . On supposera pour simplifier que  $a, b, c$  sont dans  $\mathbb{C}$ .

Soient  $a, b, c, d$  quatre éléments de  $P^1(\mathbb{C})$  dont les trois premiers sont deux à deux distincts. Soit  $h$  l'unique homographie qui envoie  $a$  sur 0,  $b$  sur 1,  $c$  sur  $\infty$ . Le birapport des quatre points, noté  $[a, b, c, d]$  est l'image  $h(d) \in P^1(\mathbb{C})$  de  $d$  par  $h$ .

2) Soit  $z \in P^1(\mathbb{C})$ . Calculer  $[0, 1, \infty, z]$ .

3) Montrer que le birapport est invariant par homographie, i.e. si  $f$  est une homographie, alors  $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$ .

4) Donnez une formule pour le birapport  $[a, b, c, d]$ .

1) Une homographie qui envoie  $a$  sur 0 et  $c$  sur  $\infty$  est de la forme  $z \mapsto \frac{\lambda(z-a)}{z-c}$ . Si elle envoie de plus  $b$  sur 1, cela impose  $\lambda \frac{b-a}{b-c} = 1$ , soit encore  $h(z) = \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$ . Elle est donc unique.

2) L'homographie  $h$  qui envoie 0 sur 0, 1 sur 1,  $\infty$  sur  $\infty$  est l'identité. Autrement dit  $[0, 1, \infty, z] = z$  pour tout  $z \in P^1(\mathbb{C})$ .

3) Soit  $[a, b, c, d]$  l'image de  $d$  par l'homographie  $h_0$  qui envoie  $a$  sur 0,  $b$  sur 1,  $c$  sur  $\infty$ . Soit  $h$  une autre homographie. Alors  $h_0 \circ h^{-1}$  envoie  $h(a)$  sur 0,  $h(b)$  sur 1,  $h(c)$  sur  $\infty$ , et  $h(d)$  sur  $[a, b, c, d] = h_0(d)$ . Autrement dit  $[h(a), h(b), h(c), h(d)] = [a, b, c, d]$ .

4) En utilisant la question 1, on trouve

$$[a, b, c, d] = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{d-a}{d-c}.$$

**Exercice 3 (Symétries du birapport)** Soient  $a, b, c, d$  quatre points de  $P^1(\mathbb{C})$  dont les trois premiers sont distincts.

1) Montrez que  $[c, d, a, b] = [a, b, c, d]$  (considérez l'homographie  $z \mapsto \frac{h(d)}{h(z)}$ , où  $h$  est l'homographie envoyant  $a$  sur 0,  $b$  sur 1,  $c$  sur  $\infty$ ).

2) Montrez que  $[a, d, c, b] = \frac{1}{[a, b, c, d]}$ .

3) Montrez que  $[b, a, c, d] = 1 - [a, b, c, d]$ .

1) L'homographie  $z \mapsto \frac{h(d)}{h(z)}$  envoie  $a$  sur  $\infty$ ,  $b$  sur  $h(d) = [a, b, c, d]$ ,  $c$  sur  $0$ ,  $d$  sur  $1$ . Autrement dit  $[c, d, a, b] = h(d) = [a, b, c, d]$ .

2) L'homographie  $z \mapsto \frac{h(z)}{h(d)}$  envoie  $a$  sur  $0$ ,  $d$  sur  $1$ ,  $c$  sur  $\infty$ , et  $b$  sur  $h(b) = \frac{1}{h(d)} = \frac{1}{[a, b, c, d]}$ . Autrement dit  $[a, d, c, b] = \frac{1}{[a, b, c, d]}$ .

3) L'homographie  $z \mapsto 1 - h(z)$  envoie  $a$  sur  $1$ ,  $b$  sur  $0$ ,  $c$  sur  $\infty$ , et  $d$  sur  $1 - h(d) = 1 - [a, b, c, d]$ . Autrement dit  $[b, a, c, d] = 1 - [a, b, c, d]$ .

**Exercice 4** Montrez qu'une application  $f : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$  qui laisse invariant le birapport de quatre points est une homographie.

Soit  $f$  une application telle que pour tous  $(a, b, c, d)$ , avec  $a, b, c$  deux à deux distincts,  $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$ . En particulier, les trois points  $f(a), f(b), f(c)$  sont aussi deux à deux distincts.

Alors pour tout  $z \in P^1(\mathbb{C})$ , on a  $[0, 1, \infty, z] = z = [f(0), f(1), f(\infty), f(z)]$ . Soit  $h$  l'homographie qui envoie  $f(0)$  sur  $0$ ,  $f(1)$  sur  $1$ ,  $f(\infty)$  sur  $\infty$ . Alors

$$z = [0, 1, \infty, z] = [f(0), f(1), f(\infty), f(z)] = [0, 1, \infty, h \circ f(z)] = h \circ f(z) \quad \text{pour tout } z \in P^1(\mathbb{C}).$$

Autrement dit,  $f(z) = h^{-1}(z)$  et  $f$  est une homographie.

**Exercice 5 (Cercles et birapports)** Dans  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la réunion d'une droite (réelle) de  $\mathbb{C}$  et du point à l'infini est appelée cercle de  $P^1(\mathbb{C})$  passant par l'infini. La famille des cercles de  $P^1(\mathbb{C})$  est la famille des cercles ci-dessus et des cercles ordinaires de  $\mathbb{C}$ . Cette terminologie se justifie par exemple par le fait que la projection stéréographique envoie les cercles de  $S^2$  sur les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$  ainsi définis.

Nous allons montrer que les homographies préservent la famille des cercles de  $P^1(\mathbb{C})$  et en déduire une célèbre condition de cocyclicité de quatre points. Mise en garde: les homographies préservent les cercles mais pas leurs centres!

1) On veut montrer que pour tout cercle  $C$  de  $P^1(\mathbb{C})$  et toute homographie  $h$ ,  $h(C)$  est un cercle. Montrez qu'il suffit d'établir ce résultat pour l'homographie  $h : z \mapsto \frac{1}{z}$ .

2) Montrer qu'on peut se ramener au cas où le cercle  $C$  est symétrique par rapport à l'axe réel (poser  $g(z) = e^{i\theta}z$  et calculer  $ghg$ ).

3) Montrer que  $h(C)$  est un cercle, en distinguant quatre cas suivant que  $0$  et  $\infty$  appartiennent ou pas au cercle  $C$ .

4) Montrer que quatre points  $a, b, c, d$  de  $\mathbb{C}$  sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel. (Ce résultat est un joli résultat pour les deux leçons.)

1) D'après l'exercice 1.4, le groupe des homographies est engendré par les similitudes  $z \mapsto \alpha z + \beta$ ,  $\alpha \neq 0$ , et l'application  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Les similitudes préservent clairement les droites et les cercles de  $\mathbb{C}$  (envoyant droites sur droites et cercles sur cercles), et donc les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$ . Il suffit donc de vérifier que l'homographie  $h$  préserve la famille des cercles de  $P^1(\mathbb{C})$ .

2) Un calcul donne  $ghg = h$ . Notons  $g_\theta : z \mapsto e^{i\theta}z$  la rotation de centre  $0$  et d'angle  $\theta$ . Soit  $C$  un cercle centré en  $re^{i\theta}$ . Alors  $g_{-\theta}(C)$  est un cercle de même rayon centré sur l'axe réel, et donc symétrique par rapport à l'axe réel. Si l'application  $h$  envoie  $g_{-\theta}(C)$  sur un cercle de  $P^1(\mathbb{C})$ , alors il en est de même pour  $g_{-\theta} \circ h$ , et donc  $h = ghg$  envoie  $C$  sur un cercle de  $P^1(\mathbb{C})$ . Le raisonnement est identique en partant d'une droite  $D$  de  $\mathbb{C}$ , et en faisant tourner par exemple un vecteur unitaire  $v = e^{i\theta}$  normal à  $D$  d'un angle  $-\theta$  pour le rendre horizontal, et donc la droite  $g_{-\theta}(D)$  verticale (et donc symétrique par rapport à l'axe réel). Il suffit donc de vérifier que l'homographie  $h$  préserve les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$  symétriques par rapport à l'axe réel.

3) Soit  $C$  un cercle de  $P^1(\mathbb{C})$  symétrique par rapport à l'axe réel.

**1er cas** Si  $0$  et  $\infty$  appartiennent à  $C$ ,  $C$  est la droite  $i\mathbb{R}$ . Son image par  $z \mapsto 1/z$  est elle-même. ( $h(0) = \infty$ ,  $h(\infty) = 0$ ,  $h(iy) = -i/y$ , si  $y \neq 0$ .)

**2ème cas** Si  $\infty \notin C$  et  $0 \in C$ . Alors  $C$  est un cercle de centre  $r$  et de rayon  $r$ . Les points de  $C$  sont de la forme  $r + re^{i\theta}$ . Leurs images par  $h$  sont de la forme  $\frac{1}{r(1+e^{i\theta})} = \dots = \frac{1}{2r}(1 - i \tan(\theta/2))$ , avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Autrement dit, l'image de  $C$  est la droite verticale de  $P^1(\mathbb{C})$  d'abscisse  $\frac{1}{2r}$ .

**3ème cas** Si  $\infty \in C$  et  $0 \notin C$ ,  $C$  est une droite verticale d'abscisse  $\alpha \neq 0$ . Quitte à considérer  $ghg$ , avec  $g = -Id$ , on peut supposer que son abscisse  $\alpha$  est strictement positive. Le 2ème cas et le fait que  $h$  est une involution montrent que  $h(C)$  est le cercle de centre  $r = \frac{1}{2\alpha}$  et de rayon  $r$ .

**4ème cas** Si  $\infty \notin C$  et  $0 \notin C$ . Les points de  $C$  sont de la forme  $R + re^{i\theta}$ . Leurs images sont de la forme  $\frac{1}{R+re^{i\theta}}$ . L'image de  $C$  va être un cercle, la difficulté sera de trouver son centre et son rayon. Supposons  $0 < r < R$  (les autres cas sont analogues). L'image du diamètre réel  $[R-r, R+r]$  est le segment  $[\frac{1}{R+r}, \frac{1}{R-r}]$ , de milieu  $\alpha = \frac{R}{R^2-r^2}$ , qui va être (à démontrer) le centre de  $h(C)$ . Et  $h(C)$  a pour rayon  $\rho = \frac{r}{R^2-r^2}$ . Il reste à vérifier tout de même que  $h(C)$  est bien le cercle de centre  $\alpha$  et de rayon  $\rho$ . Pour cela, si  $z = R + re^{i\theta}$ , on vérifie par un calcul qui ne sera pas recopié ici que  $|\frac{1}{z} - \frac{R}{R^2-r^2}| = \frac{r}{R^2-r^2}$ . L'application  $h$  étant une involution, l'image de  $C$  est nécessairement le cercle complet.

4) Soient  $a, b, c, d$  quatre points deux à deux distincts de  $\mathbb{C}$ . (Noter que trois points distincts de  $\mathbb{C}$  sont toujours cocycliques ou alignés...) Supposons  $a, b, c, d$  sont cocycliques ou alignés, i.e. appartiennent à un même cercle de  $P^1(\mathbb{C})$ . Soit  $h$  l'homographie envoyant  $a$  sur  $0$ ,  $b$  sur  $1$ ,  $c$  sur  $\infty$ , et  $d$  sur  $h(d) = [a, b, c, d]$ . Alors l'image de  $C$  par  $h$  est un cercle de  $P^1(\mathbb{C})$ ,

c'est donc l'axe réel. Donc  $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ . Réciproquement, si  $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ , alors les 4 points  $h(a), h(b), h(c), h(d)$  sont sur un même cercle de  $P^1(\mathbb{C})$  (l'axe réel), donc  $a, b, c, d$  sont cocycliques ou alignés.

**Exercice 6 (Homographies du demi-plan)** À quelle-s condition-s une homographie de  $P^1(\mathbb{C})$  préserve-t-elle l'axe réel? A quelle-s condition-s une homographie préserve-t-elle l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$  ?

Les homographies  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d$  réels tq  $ad - bc \neq 0$  préservent bien sûr l'axe réel. Une homographie  $h$  qui préserve l'axe réel vérifie bien sûr  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . Quitte à multiplier  $a, b, c, d$  par  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , comme  $ad - bc \neq 0$ , on peut supposer  $ad - bc = 1 \in \mathbb{R}$ . Les homographies sont holomorphes, donc  $C^1$ . Si  $h$  préserve l'axe réel, sa différentielle en tout  $z \in \mathbb{R}$  doit également préserver l'axe réel. Autrement dit,  $h'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} \in \mathbb{R}$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . En  $z = 0$ , cela donne  $d \in \mathbb{R}$ .

L'égalité  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}}$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$  implique bien sûr  $a\bar{c} = \bar{a}c, \bar{d}b = \bar{d}b$  et  $\bar{c}b + a\bar{d} = \bar{b}c + \bar{a}d$ . Le fait que  $d \in \mathbb{R}$  implique alors  $b \in \mathbb{R}$ , puis facilement  $a \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

Les homographies qui préservent l'axe réel sont donc celles qui peuvent s'écrire  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , avec  $a, b, c, d$  réels et  $ad - bc \neq 0$ . (Sachant bien sûr que  $\frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az+b}{cz+d}$ .)

Supposons maintenant  $a, b, c, d$  réels, avec  $ad - bc \neq 0$ . On calcule ensuite  $\text{Im}(\frac{az+b}{cz+d}) = \text{Im}(z) \times \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}$ , on en déduit immédiatement que les homographies qui préservent le demi-plan sont celles qui ont un déterminant positif.

**Exercice 7 (Suites homographiques)** Voici un résultat classique (de mon temps en tout cas!), et puis assez passe partout comme développement (homographies, suites récurrentes, comportement asymptotique, convergence de suites, utilisation des nombres complexes en géométrie, et pourquoi pas points fixes. Autres idées? Ref Vidonne dans votre bibliothèque d'agreg.)

1) Soit  $g$  une homographie de  $P^1(\mathbb{C})$ . Combien peut-elle avoir de points fixes? Donner des exemples les plus simples possibles d'homographies dans chacun des cas possibles.

2) Si  $g$  a un unique point fixe  $\alpha$ , étudier le comportement de la suite définie par  $z_0 \in P^1(\mathbb{C})$  et  $z_{n+1} = g(z_n)$  (on pourra considérer la suite  $y_n = \frac{1}{z_n - \alpha}$ ).

3) Même question si  $g$  a deux points fixes. (Étudier d'abord la suite auxiliaire  $y_n = \frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux points fixes de  $g$ .)

Je vous renvoie pour le corrigé à [Vidonne, théorème 5.1.1.]

1) Soit  $h$  une homographie. Résoudre  $h(z) = z$  revient à résoudre  $az + b = z(cz + d)$ , c'est-à-dire une équation du second degré, qui a une ou deux solutions distinctes dans  $P^1(\mathbb{C})$ .

L'homographie  $z \mapsto z + b$  fixe  $\infty$  et aucun point de  $\mathbb{C}$ .

L'homographie  $z \mapsto \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}^*$  fixe 0 et  $\infty$ .

L'homographie  $z \mapsto e^{i\theta}z$  fixe 0 et  $\infty$ .

Remarquons que  $z_0$  est un point fixe de  $h$  si et seulement si  $g(z_0)$  est un point fixe de la conjuguée  $g \circ h \circ g^{-1}$ . Et remarquons également que si  $g$  a deux points fixes  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{C}$ , on la conjugue aisément par  $h : z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\beta}$  à une homographie qui fixe 0 et  $\infty$ . Si elle n'a qu'un point fixe  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$ , on la conjugue par  $h : z \mapsto \frac{1}{z-\alpha}$  en une application qui ne fixe que l'infini.

2) Si  $g$  a un unique point fixe  $\alpha \in P^1(\mathbb{C})$ . Si  $\alpha \neq \infty$ , considérons  $f = h \circ g \circ h^{-1}$ , où  $h$  est l'homographie  $z \mapsto \frac{1}{z-\alpha}$ . Alors  $f$  fixe l'infini. Donc  $f$  est une similitude, qui n'a qu'un seul point fixe (car elle est conjuguée à  $g$ , donc les points fixes de  $f$  sont les images par la bijection  $h$  des points fixes de  $g$ ). C'est donc une translation, de la forme  $f(z) = z + b$ , avec  $b \neq 0$  car elle n'a qu'un point fixe. Soit  $z_0 \in P^1(\mathbb{C}), z_{n+1} = g(z_n)$ . Considérons la suite  $y_n = \frac{1}{z_n - \alpha} = h(y_n)$ . Alors  $y_{n+1} = h(z_{n+1}) = f(y_n)$ . D'où par une récurrence immédiate,  $y_n = y_0 + nb$ , et donc  $y_n \rightarrow +\infty$  dans  $P^1(\mathbb{C})$ . Donc  $z_n$  converge vers  $h^{-1}(\infty) = \alpha$ .

3) Si  $g$  a deux points fixes  $\alpha$  et  $\beta$ , on la conjugue par  $h(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$  à une application  $f = h \circ g \circ h^{-1}$  qui fixe exactement 0 et  $\infty$ . Elle est donc de la forme  $f(z) = \lambda z$ . On étudie la suite auxiliaire  $y_n = h(z_n)$ . Si  $|\lambda| > 1$ ,  $y_n$  converge vers l'infini, et  $z_n$  converge vers  $h^{-1}(\infty) = \beta$ . Si  $|\lambda| < 1$ ,  $y_n$  converge vers 0, et  $z_n$  vers  $\alpha$ . Si  $|\lambda| = 1$ , alors  $|y_n| = |y_0|$ . Si  $\lambda = e^{2i\pi p/q}$ , avec  $p, q$  premiers entre eux, alors la suite  $y_n$  est période  $q$ , et  $z_n = h^{-1}(y_n)$  est une suite périodique de période  $q$  sur le cercle de  $P^1(\mathbb{C})$   $h^{-1}(S(0, 1))$ . Si  $\lambda$  n'est pas une racine  $q$ -ième de l'unité, la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $S(0, 1)$  et la suite  $h^{-1}(y_n)$  est dense dans  $h^{-1}(S(0, 1))$ .

Remarquons qu'au détour de l'exercice, nous avons vu la propriété importante suivante.

Si  $g$  a deux points fixes distincts  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{C}$ , alors il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , telle que pour tout  $z \in P^1(\mathbb{C})$ ,

$$\frac{g(z) - g(\alpha)}{g(z) - g(\beta)} = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

Si  $g$  a un unique point fixe  $\alpha \in \mathbb{C}$ , il existe  $b \in \mathbb{C}^*$  tq pour tout  $z \in P^1(\mathbb{C})$ ,

$$\frac{1}{g(z) - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + b.$$

**Exercice 8 (Involutions de  $\mathcal{H}$ )** Rappelons qu'une involution est une application  $u \neq Id$  dont le carré vérifie  $u^2 = Id$ .

1) Montrer qu'une involution du groupe des homographies a nécessairement deux points fixes.

2) Soient  $\alpha, \beta$  les deux points fixes de  $u$ , et soit  $h_{\alpha, \beta}$  l'homographie définie par  $h_{\alpha, \beta}(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ . Montrer qu'alors  $u = h_{\alpha, \beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha, \beta})$ .

2bis Comparez  $h_{\alpha, \beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha, \beta})$  et  $h_{\beta, \alpha}^{-1} \circ (-h_{\beta, \alpha})$ . Une involution  $u$  est-elle déterminée par la donnée de ses points fixes ?

3) Si  $M \in PGL_2(\mathbb{C})$ , on note  $h_M$  l'homographie associée. Montrez l'équivalence entre les propriétés suivantes:

1.  $h_M$  est une involution

2. Il existe deux points  $\alpha, \beta \in P^1(\mathbb{C})$  tels que  $\frac{h_M(z)-\alpha}{h_M(z)-\beta} = -\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ , pour tout  $z \in P^1(\mathbb{C})$ ,

3.  $tr(M) = 0$

4.  $h_M$  échange deux points : autrement dit, il existe  $z \in P^1(\mathbb{C})$  tel que  $h_M(z) \neq z$  et  $h_M^2(z) = z$ .

4) Soit  $u$  une involution de  $\mathcal{H}$ . Montrer qu'alors  $u$  est de la forme  $z \mapsto -z + b$ ,  $b \in \mathbb{C}$ , ou bien  $z \mapsto \frac{c}{z-a} + a$ ,  $a, c \in \mathbb{C}$ .

5) Montrer qu'une homographie est le produit d'au plus deux involutions.

Cet exercice est encore tiré de Vidonne.

1) Supposons que  $u$  n'a qu'un unique point fixe  $\alpha$ . Alors il existe  $b \in \mathbb{C}^*$  tq  $\frac{1}{u(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + b$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . En particulier,  $\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{u \circ u(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + 2b$ , d'où une contradiction si  $b \neq 0$ .

2) En conjuguant par  $h_{\alpha, \beta}$ , on obtient une involution  $v = h_{\alpha, \beta} \circ u \circ h_{\alpha, \beta}^{-1}$  qui vérifie pour tout  $z \in \mathbb{C}$   $v(z) = \lambda z$ . Si  $u \neq id$ ,  $u^2 = id$ , ceci implique  $\lambda = -1$ , soit encore  $u = h_{\alpha, \beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha, \beta})$ .

2bis) Si on veut savoir si  $u$  est déterminée par la donnée de ses deux points fixes, il suffit de comparer  $h_{\alpha, \beta}^{-1} \circ (-h_{\alpha, \beta})$  et  $h_{\beta, \alpha}^{-1} \circ (-h_{\beta, \alpha})$ . On peut faire le calcul, ou bien se convaincre qu'en conjuguant  $u$  par  $h_{\alpha, \beta}$  comme par  $h_{\beta, \alpha}$ , on trouve dans les deux cas  $-id$ , et donc  $u$  est bien déterminée uniquement par ses points fixes.

3) Si  $h_M$  est l'homographie associée à la matrice  $M$ , d'après les questions précédentes, 1 implique 2.

Si l'écriture 2 est vraie, alors  $h_{\alpha, \beta} \circ h_M(z) = -h_{\alpha, \beta}(z)$ . De sorte que  $h_M(z) = h_{\alpha, \beta}^{-1} \circ I \circ h_{\alpha, \beta}(z)$ , où  $I(z) = -z = \frac{-z+0}{0z+1}$ . En particulier bien sûr,  $h_M$  est une involution, i.e. 2 implique 1.

De plus, dans  $GL_2(\mathbb{C})$ , on obtient, à multiplication par une homothétie  $\lambda Id$  près,  $M = \lambda Id \circ M_{\alpha, \beta}^{-1} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ M_{\alpha, \beta}$ , d'où  $Tr(M) = \lambda Tr \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ . Donc 2 implique 3.

Par ailleurs, l'involution  $z \mapsto -z$  échange par exemple 1 et  $-1$ , donc 1 implique 4. Soit  $h_M$  une homographie qui échange deux points,  $z$  et  $h_M(z)$ . Elle a au moins un point fixe  $\alpha$ . Les trois points  $\alpha, z, h_M(z)$  sont distincts. Donc  $h_M^2$  a au moins trois points fixes distincts. Donc  $h_M^2 = id$ . Donc 4 implique 1.

Reste à montrer que 3 implique 1. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Calculons  $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$ . Si  $Tr(M) = a+d = 0$ , on en déduit que  $M^2 = (a^2 + bc)Id$ , soit encore  $h_M^2 = Id$ . De plus,  $M$  ne peut pas être une homothétie (sinon sa trace serait non nulle), donc  $h_M \neq Id$ . Donc  $h_M$  est une involution. Donc 3 implique 1.

4) Soit  $u$  une involution. Si elle fixe l'infini, c'est une similitude, elle est clairement de la forme  $u(z) = -z + b$ . Si elle ne fixe pas l'infini, soit  $a = u(\infty)$ . Elle échange donc  $a$  et  $\infty$ . Soient maintenant  $z_1, z_2$  distincts. Comme  $u$  préserve le birapport, on a  $[a, \infty, z_1, z_2] = [\infty, a, u(z_1), u(z_2)]$ , d'où pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $(u(z_1) - a)(z_1 - a) = (u(z_2) - a)(z_2 - a)$ . Soit  $c = (u(z) - a)(z - a)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Alors,  $u(z) = a + \frac{c}{z-a}$ .

5) On vérifie aisément qu'étant donnés  $\alpha, \beta$  quelconques dans  $P^1(\mathbb{C})$ , il existe une involution qui échange  $\alpha$  et  $\beta$ . (Par conjugaison, on peut se ramener au cas où  $\alpha = 0, \beta = \infty$ , qui est évident.)

Soit  $h$  une homographie, et supposons qu'elle fixe deux points  $\alpha$  et  $\beta$ . Soit  $u$  une involution qui échange  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors  $h \circ u$  échange  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc c'est une involution. Donc  $h$  est le produit des deux involutions  $h \circ u$  et  $u = u^{-1}$ .

Si  $h$  a un unique point fixe, quitte à conjuguer  $h$  par  $z \mapsto \frac{1}{z-\alpha}$ , on peut supposer que  $h$  fixe l'infini. C'est donc une translation  $z \mapsto z + t$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathbb{C}$  tels que  $B - A = t/2$ . Alors la composée  $s_B \circ s_A$  est la translation de vecteur  $t \in \mathbb{C}$ . Donc (après éventuellement conjugaison par  $z \mapsto \frac{1}{z-\alpha}$ ),  $h$  est le produit de deux involutions. La conjugaison ne change rien à cela, donc  $h$  est bien le produit de deux involutions.

## 1.2 Inversions, groupe de Moebius et homographies

Dans ce paragraphe, un *cercle* est un cercle de  $\mathbb{C}$  ou bien une droite réelle du plan complexe à laquelle on ajoute le point à l'infini de  $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Le *groupe circulaire*, ou *groupe de Moebius*, noté  $\mathcal{M}$  est le groupe des transformations de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  dans lui-même qui préservent les cercles.

**Exercice 9** Montrer qu'une transformation de  $\mathcal{M}$  est de l'un des deux types suivants:

• une homographie  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ,

• une antihomographie  $f : z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,

où dans les deux cas,  $a, b, c, d$  sont quatre nombres complexes tels que  $ad - bc \neq 0$ .

Exercice tiré de Vidonne page 35.

Nous avons vu plus haut que les homographies préservent les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$ . La conjugaison complexe préserve également les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$ , de sorte que les anti-homographies préservent les cercles de  $P^1(\mathbb{C})$ . Soit  $h$  une transformation de  $P^1(\mathbb{C})$  qui préserve les cercles. Quitte à la composer par une homographie, on peut supposer qu'elle fixe  $\infty$ . Elle envoie donc toutes les droites du plan affine sur des droites. Le théorème fondamental de la géométrie affine (**REFERENCE A COMPLETER**) assure que c'est alors une application affine.

A conjugaison près par une homographie, l'application  $h$  s'écrit donc comme composée d'une application  $\mathbb{R}$ -linéaire (sur  $\mathbb{C}$  vu comme  $\mathbb{R}^2$ ) et d'une translation :  $h(v) = A.v + v_0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ . Les translations préservant droites et cercles de  $\mathbb{R}^2$ , il doit en être de même pour  $A$ . La décomposition polaire permet d'écrire  $A = O.S$ , où  $O$  est orthogonale et  $S$  symétrique définie positive, donc diagonalisable en BON. L'application linéaire associée à 0 est une isométrie euclidienne, qui préserve donc bien sûr cercles et droites de  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Soit  $C$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  dans une base orthonormée dans laquelle  $S$  est diagonale. Alors l'image de  $C$  par  $S$  est l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 1$ , où  $\lambda, \mu$  sont les valeurs propres de  $\mu$ . Si  $S$  préserve les cercles, cela implique  $\lambda = \pm\mu$ .  $S$  étant définie positive, on en déduit que  $\lambda = \mu$ , et donc que  $S$  est une homothétie.

Autrement dit, à conjugaison près par une homographie,  $f$  est la composée d'une homothétie (qui est une homographie), d'une application orthogonale (isométrie euclidienne), et d'une translation. Les isométries euclidiennes sont toutes soit des rotations (conjuguées par des homographies à l'application  $z \mapsto e^{i\theta}z$ , soit des symétries orthogonales (conjuguées à  $z \mapsto \bar{z}$  par des homographies. Ceci donne le résultat voulu.

**Exercice 10 (Transformations classiques du plan) 1)** Comment s'écrit une rotation de centre  $C$  d'affixe  $z$ , et d'angle  $\theta$  dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  ?

2) Comment s'écrit une symétrie d'axe vertical dans le plan complexe ? Et une symétrie d'axe quelconque ?

3) Comment s'écrit une translation en complexes ?

1) Une rotation de centre  $z_0$  s'écrit  $R(z) = z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$ .

2) Une symétrie d'axe vertical d'abscisse  $\alpha$  s'écrit  $z \mapsto 2\alpha - \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = 2\alpha - \bar{z}$ . Une symétrie  $\sigma$  d'axe à distance  $\alpha \geq 0$  de l'origine et de vecteur normal  $e^{i\theta}$  s'écrit  $\sigma = g_{-\theta}\sigma'g_\theta$ , où  $\sigma'$  est la symétrie d'axe vertical d'abscisse  $\alpha$ , et  $g_\theta$  la rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ . L'image d'un point  $z$  par  $\sigma$  s'en déduit par composition:  $z \mapsto 2\alpha e^{-i\theta} - e^{-2i\theta}\bar{z}$ .

3) Une translation est de la forme  $z \mapsto z + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 11 (Involutions de  $\mathcal{M}$ )** Soit  $u$  une involution de  $\mathcal{M}$ .

1) Montrer que si  $u$  est une anti-homographie qui fixe l'infini,  $u$  est une réflexion par rapport à une droite verticale. Sinon, montrer que  $u$  s'écrit  $u(z) = a + c\frac{z-a}{|z-a|^2}$ , où  $a = u(\infty)$ , et  $c \in \mathbb{R}^*$ .

2) Si  $u$  ne fixe pas l'infini, montrer qu'il existe un point  $P$  du plan, et un réel  $c \neq 0$  tq  $u(P) = \infty$  et pour tout  $M \neq P$ ,  $u(M) = M'$  ssi  $P, M, M'$  sont alignés et  $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = c$ . On appelle  $u$  l'inversion de pôle  $P$  et de puissance  $c$ .

2bis) Que peut-on dire du cercle de centre  $P$  et de rayon  $\sqrt{|c|}$  ?

Remarquez (dessin!) que l'inversion de  $P^1(\mathbb{C})$  de centre 0 et de puissance 1 s'obtient comme composée de la réciproque de la projection stéréographique par rapport au pôle nord de la sphère unité, avec la projection stéréographique par rapport au pôle sud de la même sphère. D'où son nom d'inversion.

Voir Vidonne

1) Une antihomographie qui fixe l'infini est de la forme  $z \mapsto a\bar{z} + b$ , avec  $|a|^2 - 1 = 0$  et  $a\bar{b} + b = 0$ . En posant  $a = -e^{-2i\theta}$ , on voit que  $e^{i\theta}b$  est nécessairement réel. En posant  $2\alpha e^{-i\theta} = b$ , on retrouve l'expression de la réflexion d'axe à distance  $\alpha$  de l'origine, et de vecteur normal  $e^{i\theta}$ .

Sinon, supposons que  $u$  est une anti-homographie involutive qui ne fixe pas l'infini. Soit  $a = u(\infty)$ . Soit  $i$  l'involution  $i : z \mapsto a - z$ . La conjuguée  $v = i \circ u \circ i$  de  $u$  par  $i$  est encore une anti-homographie involutive, qui échange 0 et  $\infty$ . Une vérification immédiate montre qu'elle est nécessairement de la forme  $v(z) = \frac{c}{z}$ . Le fait que  $v^2 = id$  implique  $\frac{c}{c} = 1$ , soit encore  $c \in \mathbb{R}$ . On en déduit immédiatement que  $u = i \circ v \circ i$  est de la forme voulue:  $u(z) = a + \frac{c}{\bar{z}-a} = a + \frac{c(z-a)}{|z-a|^2}$ , avec  $a = u(\infty) \in \mathbb{C}$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ .

2) Si  $u$  ne fixe pas l'infini, et si  $a = u(\infty)$ , alors  $u(z) = a + \frac{c(z-a)}{|z-a|^2}$ . En particulier,  $u(a) = \infty$ . Le point  $P$  du plan est le point d'affixe complexe  $a$ . De plus, si  $z$  est l'affixe de  $M$ , et  $z'$  celle de  $M'$ , avec  $M \neq P$ , alors  $M' = u(M)$  ssi  $z' - a = \frac{c}{|z-a|^2}(z - a)$ , ce qui implique que  $\overline{PM}$  et  $\overline{PM'}$  sont colinéaires, et que  $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = c$ . Réciproquement, si  $P, M, M'$  sont alignés et satisfont  $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = c$ , cela signifie que  $|(z' - a)(z - a)| = c$ , et  $z' - a = k(z - a)$ , avec  $k$  réel non nul, d'où  $k = \frac{c}{|z-a|^2}$ . D'où  $z' = u(z)$ .

2bis) Le point  $M$  appartient au cercle de centre  $P$  et de rayon  $\sqrt{|c|}$  ssi  $|z - a|^2 = c^2$ . On voit qu'alors,  $|u(z) - a|^2 = c^2$ , autrement dit  $M'$  est encore sur le même cercle. Le fait que  $P, M, M'$  soient colinéaires implique que  $M' = M$  si  $c > 0$ , et  $M'$  est le point diamétralement opposé à  $M$  si  $c < 0$ .

**Exercice 12 (Différentiation de l'inversion)** (A caser dans la leçon sur les applications différentiables, aussi!) Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x) = a + c \frac{x-a}{\|x-a\|^2}$  de pôle  $a$  et de puissance  $c$ . Montrer qu'elle est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$  et calculer sa différentielle au point  $x$ . Montrer que la différentielle au point  $x$  est une similitude, composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à la perpendiculaire à  $x - a$ .

2) En déduire que si  $f$  est une inversion positive préservant le cercle  $C$ , et si  $f(M) = M'$ , alors tout cercle (ou droite) passant par  $M$  et  $M'$  est orthogonal à  $C$ .

VOir Vidonne.

1) L'application  $f$  s'écrit comme composée d'applications  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ . Sa différentielle vérifie (par composition)

$$df_x.v = \frac{cv}{\|x-a\|^2} - \frac{2c(x-a)}{\|x-a\|^4} \langle x-a, v \rangle = \frac{c}{\|x-a\|^2} \left( v - \frac{2 \langle x-a, v \rangle}{\|x-a\|^2} (x-a) \right) = \frac{c}{\|x-a\|^2} L_x(v).$$

Autrement dit, la différentielle  $df_x$  est la composée de l'application  $L_x$ , qui est la réflexion d'axe orthogonal à  $x - a$ , et de l'homothétie de rapport  $\frac{c}{\|x-a\|^2}$ . Cela signifie qu'infiniment, une inversion est une symétrie par rapport au cercle, renormalisée par un facteur d'homothétie?

2) Soit  $f$  une inversion positive qui préserve  $C$ , et  $M, M'$  deux points hors de  $C$  tq  $f(M) = M'$ . Soit  $C'$  un cercle passant par  $M$  et  $M'$ , et soit alors  $x$  un point d'intersection de  $C$  et  $C'$ . Comme  $f$  est une inversion positive,  $f(x) = x$ . L'image de  $C'$  par  $f$  est un cercle passant par  $f(M')$ ,  $f(M)$ , et  $x$ . Autrement dit,  $f(C') = C'$ . Soit  $v$  un vecteur tangent à  $C'$  en  $x$ . Alors  $df_x.v$  doit être tangent à  $f(C') = C'$  en  $x$  aussi. Comme  $df_x$  est la composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à l'orthogonale à  $x - a$ , cela implique que  $v$  doit être colinéaire ou orthogonal à  $x - a$ . Le cas  $v$  orthogonal à  $x - a$  est exclu, car le cercle  $C'$  traverse  $C$ , puisqu'il passe par  $M$  et  $M'$ . Donc  $v$  est colinéaire à  $x - a$ . Donc  $C'$  est orthogonal à  $C$ .

**Exercice 13** Décrire par des dessins les différentes possibilités lorsqu'on compose deux inversions ou réflexions orthogonales.

\* Si on compose deux réflexions par rapport à des axes parallèles, on obtient une translation de vecteur... (exo de collège).

\* Si les axes sont sécants, on obtient une rotation d'angle 2 fois l'angle des deux droites, centrée en le point d'intersection des deux axes.

\* Si les deux cercles sont concentriques et disjoints, la composition des deux inversions donne une homothétie de rapport  $c'/c$ .

\* Par conjugaison à l'aide d'homographies judicieusement choisies déplaçant le point à l'infini, et donc changeant droites en cercles ou cercles en droites, on se ramène à l'un des cas précédents.

**Exercice 14** Montrer que  $\mathcal{M}$  est engendré par les inversions positives.

Montrer que  $\mathcal{H}$  est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{M}$ .

On a vu plus haut que  $\mathcal{M}$  est le groupe engendré par les similitudes directes et indirectes de  $\mathbb{C}$ , et l'application  $z \mapsto 1/z$ . Les similitudes directes et indirectes s'écrivent toutes comme produit de réflexions. L'application  $z \mapsto 1/z$  s'écrit comme produit de l'inversion positive  $z \mapsto 1/\bar{z}$  et de la réflexion orthogonale  $z \mapsto \bar{z}$ .

Pour montrer que  $\mathcal{H}$  est distingué dans  $\mathcal{M}$ , il suffit de vérifier qu'il est d'indice 2. On peut vérifier que si  $a, b, c, d$  sont quatre points distincts vérifiant  $[a, b, c, d] = i$ , l'application  $g \in \mathcal{M} \mapsto \frac{1}{2}[g(a), g(b), g(c), g(d)] \in \{+1, -1\}$  est un morphisme de groupe de noyau  $\mathcal{H}$ .

### 1.3 Rotations de $\mathbb{R}^3$ et homographies

**Exercice 15** On identifie l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  avec  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ , on note  $S^2$  sa sphère unité, et on identifie  $\mathbb{C}$  avec le plan  $\mathbb{C} \times \{0\}$ . La projection stéréographique  $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty = P^1(\mathbb{C})$  est la projection depuis le pôle nord  $N = (0_{\mathbb{C}}, 1)$  définie par  $\sigma(M) = (MN) \cap \mathbb{C}$  et  $\sigma(N) = \infty$ .

1) On note  $(z, t)$  les coordonnées d'un point  $M$  de  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ . Donnez l'expression de  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  dans ces coordonnées.

2) On oriente le plan tangent en un point  $M$  de  $S^2$  par la normale sortante en ce point; On note  $f_\theta$  la rotation d'axe vertical  $[ON]$  et d'angle  $\theta$ , et  $g_\varphi$  la rotation d'axe  $[OI]$  et d'angle  $\varphi$ , où  $I = (1_{\mathbb{C}}, 0)$ . Soit  $R$  une rotation d'axe  $[0x]$  et d'angle  $\psi$ . Montrer qu'il existe  $\theta, \varphi$  tq  $x = (f_\theta \circ g_\varphi)(I)$ . En déduire que  $R = (f_\theta g_\varphi) \circ f_\psi \circ (f_\theta g_\varphi)^{-1}$ .

3) Soit  $R$  une rotation de  $SO(3, \mathbb{R})$ , vue comme transformation de  $S^2$  et  $\tilde{R} = \sigma^{-1} \circ r \circ \sigma$  la bijection induite sur  $\mathbb{C}$ . Pourquoi est-il « clair » géométriquement - sans calcul - que  $\tilde{R}$  appartient au groupe de Moebius  $\mathcal{M}$ .

3bis) Montrer que  $\tilde{f}_\theta(z) = e^{i\theta} z$  et  $\tilde{g}_\varphi(z) = -i \frac{z \cos(\varphi/2) + i \sin \varphi/2}{z \sin \varphi/2 - i \cos \varphi/2}$ .

4) En déduire un morphisme de groupe injectif de  $SO(3, \mathbb{R})$  dans  $PSU(2, \mathbb{C}) \subset PGL(2, \mathbb{C})$ .

Voir notes de Serge Cantat sur le site de la prépa agreg de Rennes, ou Vidonne ch 8 et 9.

## 1.4 Homographies et espace des réseaux de $\mathbb{R}^2$

**Exercice 16** Faire le problème 1 d'Alessandri (corrigé dans le livre) sur l'action par homographies du groupe modulaire  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur le demi-plan hyperbolique.

## 1.5 Isométries de l'espace hyperbolique

Le demi-plan hyperbolique est  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , identifié à l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ . L'espace tangent  $T\mathbb{H}$  à l'espace hyperbolique est l'ensemble des couples "point-vitesse"  $T\mathbb{H} := \mathbb{H} \times \mathbb{R}^2$ , où le couple  $(z, v)$  doit être pensé comme une vitesse  $v$  au point  $z$ .

La norme hyperbolique est définie par  $\|(z, v)\|_{hyp} = \frac{|v|}{\text{Im}(z)}$ , où  $|v|$  est la norme euclidienne de  $v$ . On notera  $\|v\|_z$  la norme hyperbolique de  $v$  au point  $z$ .

Si  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  est une courbe de classe  $C^1$ , la longueur hyperbolique de  $c$  est définie par  $L_{hyp}(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{c(t)} dt$ . La distance hyperbolique entre deux points  $z$  et  $z'$  sur  $\mathbb{H}$  est définie par  $d(z, z') = \inf L_{hyp}(c)$  où l'inf est pris sur l'ensemble des courbes  $C^1$   $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  tq  $c(a) = z$  et  $c(b) = z'$ .

**Exercice 17 (Groupe des isométries de  $\mathbb{H}$ ) 1)** Vérifier qu'une homographie préserve  $\mathbb{H}$  ssi elle peut s'écrire sous la forme  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  avec  $a, b, c, d$  réels et  $ad - bc > 0$ . On parlera désormais d'homographies de  $\mathbb{H}$ .

2) Vérifier que les homographies de  $\mathbb{H}$  préservent la norme hyperbolique, et en déduire que ce sont des isométries de  $\mathbb{H}$  (au sens où elles préservent la distance).

3) Même question avec les antihomographies.

4) En déduire que le groupe des homographies est le groupe des isométries directes de  $\mathbb{H}$  et que le groupe circulaire est le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$ .

1) Ceci a déjà été vérifié plus haut.

2) Une homographie est une application holomorphe. En particulier, vue comme application de  $\mathbb{R}^2$ , elle vérifie  $dh_z.v = h'(z).v$ . On calcule  $h'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  et  $\text{Im}(h(z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \text{Im}(z)$  de sorte que

$$\|h'(z).v\|_{h(z)} = \frac{|h'(z).v|}{\text{Im}(h(z))} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \frac{|v|}{\text{Im}(h(z))} = \frac{|v|}{\text{Im}(z)} = \|v\|_z$$

Ainsi, pour toute homographie  $h$  et pour tout  $(z, v) \in T\mathbb{H}$ , on a  $\|h(z, v)\| = \|(h(z), h'(z).v)\| = \|(z, v)\|$ , de sorte que  $h$  préserve la longueur de tous les chemins  $C^1$ , et donc leur inf, et donc la distance hyperbolique. Les homographies sont donc des isométries pour la distance hyperbolique sur  $\mathbb{H}$ .

3) Les anti-homographies sont obtenues comme composées de  $z \mapsto -\bar{z}$ , qui préserve la norme hyperbolique (à vérifier) et d'homographies. Ce sont donc également des isométries hyperboliques.

4) Une homographie est holomorphe. Elle préserve donc les angles orientés. En particulier, le groupe des homographies est un sous-groupe du groupe des isométries directes de  $\mathbb{H}$ . Soit maintenant  $f$  une isométrie directe de  $\mathbb{H}$ . À l'aide de l'exercice suivant, on vérifie que  $f$  préserve les cercles et droites de  $\mathbb{H}$ . On en déduit que  $f$  est une homographie de  $\mathbb{H}$ . Les détails sont admis (**A REDIGER**). Le même raisonnement montre que  $\mathcal{M}$  est le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$ .

**Exercice 18 (Géodésiques de  $\mathbb{H}$ )** Une géodésique de  $\mathbb{H}$  est une courbe  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$  tq pour tous  $t, t' \in \mathbb{R}$ ,  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ . En d'autres termes,  $c$  est une courbe qui est le plus court chemin entre deux quelconques des points de son image.

1) Montrer que si  $c$  est une géodésique de  $\mathbb{H}$ , et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un difféomorphisme  $C^1$ , alors  $\gamma = c \circ \varphi$  est encore une géodésique de  $\mathbb{H}$ , de même image.

2) Soit  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  définie par  $c(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $x$  et  $y$  étant deux fonctions  $C^1$  à valeurs réelles, avec  $x(a) = x(b) = 0$  et  $\gamma(t) = iy(t)$ . Vérifier que  $L(\gamma) \leq L(c)$ .

3) En déduire que la courbe  $t \in \mathbb{R} \mapsto ie^t$  est une géodésique de  $\mathbb{H}$ , et exprimer la distance entre deux points  $z_1 = iy_1$  et  $z_2 = iy_2$ .

1) Il s'agit du théorème de changement de variable, qui permet de dire que  $L(c) = L(\gamma)$ .

2) On vérifie que pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \geq |y'(t)|$ , d'où en intégrant sur  $[a, b]$ ,  $L(c) \geq L(\gamma)$ , avec égalité ssi  $x'(t) = 0$  presque sûrement sur  $[a, b]$ . Comme  $x$  est  $C^1$ , cela équivaut à  $x' = 0$  sur  $[a, b]$ , et donc  $x(t) = x(a) = 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

3) Une courbe réalisant l'inf des longueurs des courbes  $C^1$  entre  $z_1$  et  $z_2$  est nécessairement verticale d'après la question précédente. Un argument élémentaire montre que la fonction  $t \mapsto y(t)$  doit être strictement monotone presque partout pour réaliser l'inf (sinon, on s'arrête ou on fait demi tour, et on parcourt alors certaines portions de courbes plusieurs fois, ce qui ne minimise certainement pas la longueur). Ensuite, on calcule la longueur de  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $t \mapsto iy(t)$  avec  $y(a) = y_1$ ,  $y(b) = y_2$ , et  $y'(t) > 0$  presque partout. On trouve  $L(c) = \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln(y(b)) - \ln(y(a)) = \ln \frac{y_2}{y_1} = d_{\mathbb{H}}(iy_1, iy_2)$ . En particulier, toute courbe de cette forme réalise la distance. Et la courbe  $t \mapsto ie^t$  convient. (Noter que toutes ces courbes ont même image).

**Exercice 19 (Distance et birapport)** On souhaite exprimer la distance hyperbolique en termes de birapport.

1) Soient  $z, z'$  deux points distincts de  $\mathbb{H}$ , et  $a, a'$  dans  $\mathbb{R} \times \{0\}$  les extrémités du demi-cercle passant par  $z$  et  $z'$  et centré sur l'axe réel horizontal (dans l'ordre  $a, z, z', a'$ ). Montrer qu'il existe une homographie de  $\mathbb{H}$  qui envoie  $a$  sur 0,  $z$  sur  $i$ ,  $z'$  sur un imaginaire pur  $iy'$ , et  $a'$  sur  $\infty$ .

2) Quelle est la distance entre  $i$  et  $iy'$  ? L'exprimer à l'aide du birapport des quatre points  $0, i, iy'$  et  $\infty$ . En déduire la distance entre  $z$  et  $z'$ , exprimée en termes de birapport.

1) L'application  $z \mapsto z - a$  est une homographie de  $\mathbb{H}$  qui envoie  $a$  sur 0. l'application  $z \mapsto \frac{1}{z-a'} + \frac{1}{a'}$  est une homographie de  $\mathbb{H}$  qui fixe 0 et envoie  $a'$  sur  $\infty$ . Par homothétie de rapport  $\lambda > 0$ , on envoie  $z$  sur  $i$  (notations très mal choisies, trop de  $z$ !) en fixant 0 et  $\infty$ .

2) La distance de  $i$  à  $iy'$  vaut  $|\ln(y')|$  d'après l'exercice ci-dessus. Le birapport  $[0, 1, \infty, y']$  vaut  $y'$ . Et bien sûr, l'application  $z \mapsto iz$  étant une homographie, elle préserve le birapport, de sorte qu  $[0, i, \infty, iy'] = y'$ . D'où  $d_{\mathbb{H}}(i, iy') = |\ln[0, i, \infty, iy']|$ .

Si maintenant  $z$  et  $z'$  sont deux points quelconques de  $\mathbb{H}$ , et  $a, a'$  sont les extrémités de la géodésique qui les joint, comme ci-dessus, on vérifie que leur distance hyperbolique est donnée par

$$d_{\mathbb{H}}(z, z') = |\ln[a, z, a', z']| .$$

## 2 Nombres complexes et angles

**Exercice 20** Lire Vidonne, chapitre 3 et Goblots chapitre 3. Vérifiez que vous maîtrisez les notions d'exponentielle complexe (voir aussi le préambule de Rudin, *Real and complex analysis*), de cosinus et sinus, de groupe des nombres complexes de module 1, de groupe des angles, de  $SO(2, \mathbb{R})$ , de mesure d'angles, ...

## 3 Autres thèmes, non traités dans ce devoir, mais...

Qui auraient pu: par exemple, polynômes cyclotomiques, racines n-ièmes de l'unité, polygones réguliers, nombres constructibles à la règle et au compas, et autres jolis problèmes de géométrie sont des thèmes pertinents dans les applications des nombres complexes à la géométrie. Je vous renvoie à vos cours de M1 sur le sujet.

Quaternions et angles en dimension 3: Ce sujet est traité dans Vidonne, ou dans le chapitre 7 de Perrin, ou...